MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL

2022, Vol. 20, No. 1 Enero - Junio

El Kernel de Poisson para un dominio doblemente conexo

The Poisson Kernel for a doubly connected domain

José Vergara Ibarra y Carmen Vanegas Espinoza

Recepción: 03/11/2021 **Aceptación:** 28/01/2022 **Publicación:** 30/01/2022

Abstract In this work the Dirichlet problem for the Laplace equation in a doubly connected domain is solved. For the solution of the proposed problem, we have the Green harmonic function on this domain, and from this function, the Poisson Kernel is obtained explicitly. With these elements and the properties of the conformal mappings, the integral representation formula that solves the Dirichlet problem for the Laplace equation is obtained. This application to obtain Poisson's Kernel through the theory of conformal transformations makes it possible to solve problems of boundary values on a variety of domains in which the known method of parqueting-reflection is not admissible and the method via the Schwarz problem.
Keywords border value problems, conformal transformations, Green function, Poisson Kernel.

Resumen En este trabajo se resuelve el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un dominio doblemente conexo. Para la solución del problema planteado se cuenta con la función armónica de Green sobre este dominio, y a partir de esta función, el Kernel de Poisson es obtenido de manera explícita. Con estos elementos y las propiedades de los mapeos conformes se obtiene la fórmula de representación integral que resuelve el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace. Esta aplicación para obtener el Kernel de Poisson a través de la teoría de las transformaciones conformes posibilita resolver problemas de valores de frontera sobre una variedad de dominios en los que no es admisible el conocido método de parqueting-reflection y el método vía problema de Schwarz.

José Luis Vergara Ibarra, Ing.
Docente, Colegio Veintitrés de Octubre, Portoviejo, Ecuador e-mail: `jose.vergara@utm.edu.ec`, https://orcid.org/0000-0002-2735-9246

Carmen Judith Vanegas Espinoza, Ph.D.
Docente, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática y Estadística, Portoviejo, Ecuador, e-mail: `carmen.vanegas@utm.edu.ec`, https://orcid.org/0000-0003-0748-5963

Palabras Claves función de Green, Kernel de Poisson, problemas de valores de frontera, transformaciones conformes.

1 Introducción

En análisis complejo, los problemas de valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales tienen por objetivo obtener soluciones de forma analítica o exacta, muchos resultados en la literatura relacionada son conocidos por tipos especiales de ecuaciones como ecuaciones elípticas con coeficientes constantes o analíticos (Begehr, 1994; Begehr y Gilbert, 1992; Dzhuraev, 2000; Gakhov, 1966; Garnett, 1981; Muskhelishvili, 1953; Vekua, 1962).

Autores como, Ying y Xuefang (2016); Abdymanapov, Begehr, y Tungatarov (2005, 2009); Begehr y Harutyunyan (2006); Akel y Hussien (2012); Begehr y Vaitsiakhovich (2009a, 2012, 2009b); Shupeyeva (2012, 2013), entre otros, han considerado los problemas de valores de frontera en dominios simplemente conexos, tal vez por la razón de que trabajar con problemas de valores de frontera en dominios multiplemente conexos conduce a muchas dificultades adicionales. Lo antes dicho ha implicado que se conozcan pocos resultados sobre este tema (Vaitsiakhovich, 2007; Vergara y Vanegas, 2021), a pesar de que representan un interés especial ya que aparecen naturalmente en muchos problemas de mecánica, especialmente en la teoría de la filtración en hidrodinámica y también en la teoría de materiales compuestos (Richardson, 2001; Adler, 1992).

Es conocido que la ecuación de Laplace es una ecuación diferencial importante en todas las matemáticas aplicadas. Surge en una gran variedad de sistemas físicos y matemáticos, como el electromagnetismo, la mecánica de fluidos, la teoría del potencial, la conducción de calor, entre otros. Por eso es valioso e importante investigar problemas de valores de frontera que involucran esa ecuación o su ecuación no homogénea correspondiente, la ecuación de Poisson, que modela muchos fenómenos de estado no estacionario.

La función armónica de Green es una solución fundamental para el operador de Laplace por lo que es indispensable conocerla explícitamente. Existen varios métodos para construirla, por ejemplo, el principio de parqueting-reflection, el problema de Schwarz y la invarianza conforme (Begehr y Vaitsiakhovich, 2010a, 2010b).

El método de la invarianza conforme es utilizado para encontrar funciones armónicas en dominios donde exista un mapeo analítico y cuyo dominio por la forma especial que tiene, no admite un parqueting o el problema de Schwarz (Begehr y Vaitsiakhovich, 2010a; Begehr, 2017; Vergara y Vanegas, 2021).

En ciertos problemas de valores de frontera, frecuentemente se necesita resolver la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en un dominio $\mathcal{D}$ en el plano complejo, y por razones de la estructura del dominio $\mathcal{D}$ no es posible determinar u. Sin embargo, es posible determinar un mapeo conforme $w : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$, donde la imagen de $\mathcal{D}$ tenga una forma conveniente y conduzca a la solución del problema en $\mathcal{D}$.

Ante este contexto, dada la función armónica de Green para un dominio doblemente conexo se plantean los objetivos:

- Obtener explícitamente el Kernel de Poisson para un dominio doblemente conexo.
- Construir la fórmula de representación integral para la solución del problema de Dirichet para la ecuación de Laplace sobre un dominio doblemente conexo.
- Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace sobre un dominio doblemente conexo a través de las propiedades de los mapeos conformes.

El desarrollo del presentre trabajo empieza con la sección 2 de preliminares en la que se define el Kernel de Poisson para un dominio regular D y se establecen algunas de sus propiedades. Además, a través de un teorema se establece una importante conexión entre las funciones armónicas y holomorfas, específicamente su composición. En la sección 3 se describe un tipo especial de transformación conforme, llamado transformación de Möbius de un dominio doblemente conexo del z-plano complejo ($\mathbb{D}_2$) al anillo concéntrico del w-plano complejo (Ω). También en esta sección se muestra la función armónica de Green para $\mathbb{D}_2$. En la sección 4 se construye el Kernel de Poisson para un dominio doblemente conexo $\mathbb{D}_2$, al realizar la derivada normal exterior de la función armónica de Green reescrita en términos de suma, sobre la frontera del dominio doblemente conexo, logrando así el primer objetivo de esta investigación. Finalmente en la sección 5, se da un ejemplo para la ecuación de Laplace usando el Kernel de Poisson que se ha construido en la sección 4, es decir, se construye una fórmula de representación integral de la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un dominio doblemente conexo. Con esta sección se alcanzan los otros dos objetivos de la presente investigación.

2 Preliminares

Definición 1. Sea D un dominio regular con función de Green $G(z,\zeta) = \frac{1}{2}G_1(z,\zeta)$ (Vaitsiakhovich, 2008). El Kernel de Poisson para D está definido por

$$g_1(z,\zeta) = -\frac{1}{2}\partial_{\nu_\zeta} G_1(z,\zeta),\ z \in D,\ \zeta \in \partial D. \tag{1}$$

El Kernel de Poisson posee las siguientes propiedades:

i) $g_1(\cdot,\zeta)$ es armónica en D para todo $\zeta \in D$,

ii) $g_1(z,\cdot)$ es continua sobre ∂D para todo $z \in D$,

iii) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) g_1(z,\zeta) \mathrm{d}s_\zeta = \gamma(z_0)$,

para $z_0 \in \partial D$; γ es integrable sobre ∂D y continua en el punto z_0.

Teorema 1. *Sean V y U conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ y $F : V \longrightarrow U$ una función holomorfa. Si $u : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función armónica, entonces $u \circ F$ es armónica en V (Stein y Shakarchi, 2003).*

3 Dominio $\mathbb{D}_2$ y mapeo conforme

El dominio $\mathbb{D}_2$ está definido por:

$$\mathbb{D}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathbb{C} \setminus \{D_s(r) \cup \mathbb{D}\}, 0 < r < \frac{\delta - 1}{2} \right\}$$

donde $s = \dfrac{\delta + \beta}{2}$, $r = \dfrac{\delta - \beta}{2}$, $\delta, \beta \in \mathbb{R}$, $1 < \beta < \delta$ con $D_s(r) = |z - s| < r$ y $\mathbb{D} = |z| < 1$, ver figura 1.

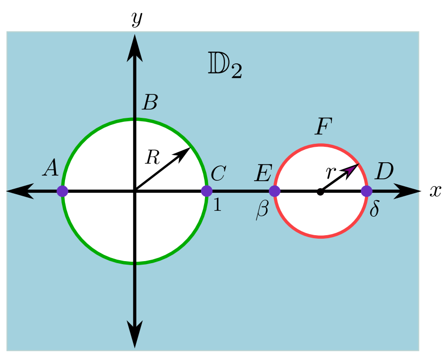


Figura 1: Dominio $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_2$ to the left, Ω to the right
Fuente: Adaptado de Vergara y Vanegas (2021)

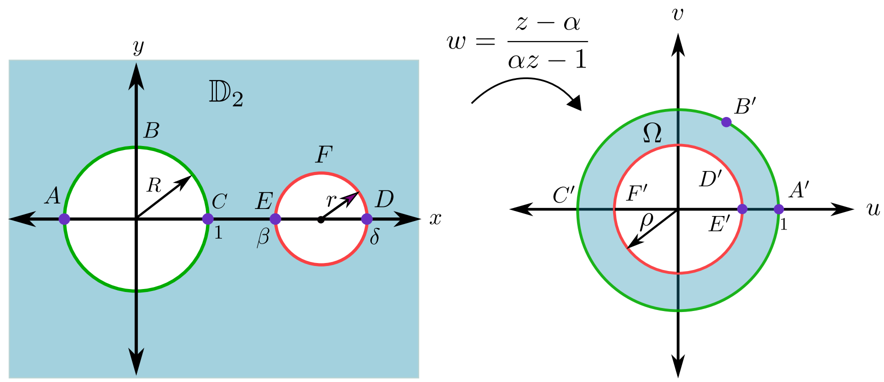
La transformación conforme

$$w(z) = \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1} \tag{2}$$

mapea $\mathbb{D}_2$ en

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \rho < |w| < 1\}.$$

Tal como se muestra en la figura 2.



(a) Región doblemente conexa $\mathbb{D}_2$ **(b)** Anillo concéntrico Ω

Figura 2: Mapeo $w : \mathbb{D}_2 \longrightarrow \Omega$, $\mathbb{D}_2$ to the left, Ω to the right
Fuente: Adaptado de Vergara y Vanegas (2021)

3.1 Función armónica de Green para $\mathbb{D}_2$

Usando el mapeo conforme 2 y la función armónica de Green para el anillo concéntrico Ω de la figura 2b se obtiene la función armónica de Green $G_1(z,\zeta)$ para $\mathbb{D}_2$, ver Vergara y Vanegas (2021)

$$
\begin{aligned}
G_1(z,\zeta) =& \frac{\log\left|\frac{z-\alpha}{\alpha z-1}\right|^2 \log\left|\frac{\zeta-\alpha}{\alpha\zeta-1}\right|^2}{\log\left(\frac{\alpha s-1}{r}\right)^2} - \log\left|\frac{(\zeta-z)}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)}\right|^2 \\
&- \log\prod_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\alpha s-1)^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)-r^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)}{(\alpha s-1)^{2n}(z-\alpha)\left(\overline{\zeta}-\alpha\right)-r^{2n}\left(\alpha\overline{\zeta}-1\right)(\alpha z-1)}\right|^2 \\
&- \log\prod_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\alpha s-1)^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)-r^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)}{(\alpha s-1)^{2n}(\alpha\overline{z}-1)(\alpha\zeta-1)-r^{2n}(\overline{z}-\alpha)(\zeta-\alpha)}\right|^2 . \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Dados los elementos necesarios para resolver el problema de Dirichlet planteado, a continuación se reescribe la función armónica de Green $G_1(z,\zeta)$ (3) en términos de suma para aplicar la definición 1, la cual proporciona el Kernel de Poisson para $\mathbb{D}_2$. Este Kernel satisface las propiedades de la definición 1 bajo los supuestos del teorema 1 y las propiedades de las transformaciones conformes. Por último, a través del mapeo conforme (ver figura 2), la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el anillo concéntrico Ω y el Kernel de Poisson para $\mathbb{D}_2$; se obtiene como resultado la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un dominio doblemente conexo $\mathbb{D}_2$.

$$
\begin{aligned}
G_1(z,\zeta) &= \frac{\log\left|\frac{z-\alpha}{\alpha z-1}\right|^2}{\log\left(\frac{\alpha s-1}{r}\right)^2}\left[\log(\zeta-\alpha)\left(\overline{\zeta-\alpha}\right)-\log(\alpha\zeta-1)\left(\overline{\alpha\zeta-1}\right)\right]\\
&= -\left[\log(\zeta-z)\left(\overline{\zeta-z}\right)-\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\left(\overline{1-z\overline{\zeta}}\right)\right]\\
&= -\left[\log\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tau^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)-r^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)\right)\right.\\
&\quad \times\left(\overline{\tau^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)-r^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)}\right)\\
&\quad -\log\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tau^{2n}(z-\alpha)\left(\overline{\zeta}-\alpha\right)-r^{2n}\left(\alpha\overline{\zeta}-1\right)(\alpha z-1)\right).\\
&\quad \left.\times\left(\overline{\tau^{2n}(z-\alpha)\left(\overline{\zeta}-\alpha\right)-r^{2n}\left(\alpha\overline{\zeta}-1\right)(\alpha z-1)}\right)\right]\\
&\quad -\left[\log\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tau^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)-r^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)\right)\right.\\
&\quad \times\left(\overline{\tau^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)-r^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)}\right)\\
&\quad -\log\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tau^{2n}(\alpha\overline{z}-1)(\alpha\zeta-1)-r^{2n}(\overline{z}-\alpha)(\zeta-\alpha)\right)\\
&\quad \left.\times\left(\overline{\tau^{2n}(\alpha\overline{z}-1)(\alpha\zeta-1)-r^{2n}(\overline{z}-\alpha)(\zeta-\alpha)}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

4 Kernel de Poisson para $\mathbb{D}_2$

En esta sección se construye el Kernel de Poisson para un dominio doblemente conexo $\mathbb{D}_2$.

El Kernel de Poisson es utilizado en la fórmula de representación de Green para funciones armónicas. Este se obtiene a partir de la derivada normal exterior de la función de Green sobre la frontera $\partial\mathbb{D}_2$. En el caso del dominio $\mathbb{D}_2$ el Kernel de Poisson se obtiene explícitamente y tiene la forma:

$$
p(z,\zeta)=\begin{cases}\mathrm{Re}\,\widehat{p}(z,\zeta), & |\zeta|=1\\ \dfrac{1}{r}\mathrm{Re}\,\widehat{p}(z,\zeta) & |\zeta-s|=r.\end{cases}\tag{5}
$$

Aquí $\widehat{p}(z,\zeta)=-\zeta\partial_\zeta G_1(z,\zeta)$ y la derivada normal exterior sobre la frontera de $\mathbb{D}_2$ con orientación negativa está dada por:

$$\partial_{\nu_\zeta} = \begin{cases} -\zeta\partial_\zeta - \overline{\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}, & |\zeta| = 1 \\ -\dfrac{\zeta}{r}\partial_\zeta - \dfrac{\overline{\zeta}}{r}\partial_{\overline{\zeta}}, & |\zeta - s| = r. \end{cases}$$

Considerando las derivadas normales hacia afuera en las diferentes partes de la frontera, se obtiene lo siguiente:

para $|\zeta| = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} -\widehat{p}(z,\zeta) = {} & \frac{\zeta \log|w(z)|^2}{\rho^2(\zeta-\alpha)} - \frac{\zeta\alpha\log|w(z)|^2}{\rho^2(\alpha\zeta-1)} - \frac{\zeta}{\zeta-z} - \frac{\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\tau^{2n}\alpha\zeta(z-\alpha) - \zeta r^{2n}(\alpha z-1)}{\tau^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1) - r^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1)}\right. \\ & \left. + \frac{\zeta\tau^{2n}(\overline{z}-\overline{\alpha}) - \overline{\alpha}\zeta r^{2n}(\overline{\alpha z}-1)}{\tau^{2n}(\overline{z}-\overline{\alpha})(\zeta-\overline{\alpha}) - r^{2n}(\overline{\alpha}\zeta-1)(\overline{\alpha z}-1)}\right] \\ & - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\zeta\tau^{2n}(\alpha z-1) - \alpha\zeta r^{2n}(z-\alpha)}{\tau^{2n}(\zeta-\alpha)(\alpha z-1) - r^{2n}(z-\alpha)(\alpha\zeta-1)}\right. \\ & \left. + \frac{\alpha\zeta\tau^{2n}(\alpha\overline{z}-1) - \zeta r^{2n}(\overline{z}-\alpha)}{\tau^{2n}(\alpha\overline{z}-1)(\alpha\zeta-1) - r^{2n}(\overline{z}-\alpha)(\zeta-\alpha)}\right] \end{aligned}$$

y para $|\zeta - s| = r$ se obtiene dividiendo $\widehat{p}(z,\zeta)$ por $\dfrac{1}{r}$.

5 Problema de valor de frontera

A lo largo de esta sección, se establece una fórmula de representación integral del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un dominio doblemente conexo usando el Kernel de Poisson obtenido en la sección 4.

Es evidente que la función armónica de Green, es una solución fundamental para el operador de Laplace y se puede utilizar para representaciones integrales de la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace. El Kernel de Poisson $p(z,\zeta)$ (ver 5) para nuestro dominio doblemente conexo $\mathbb{D}_2$ se puede escribir en forma compacta como:

$$p(z,\zeta) = -\frac{1}{2}\partial_{\nu_\zeta} G_1(z,\zeta), \quad z \in \mathbb{D}_2, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}_2.$$

Como la función de Green es armónica, lo es el Kernel de Poisson y de acuerdo con las propiedades del Kernel de Poisson (sección 2) y la representación dada en Vaitsiakhovich (2007) se verifica la siguiente propiedad:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_2} \varphi(z)p(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \varphi(z_0),\; z\in\mathbb{D}_2,\; z_0\in\partial\mathbb{D}_2,\; \varphi\in C(\partial\mathbb{D}_2,\mathbb{C}). \quad (6)$$

La solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace del anillo concéntrico Ω, es un caso particular con respecto a la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson (ver Vaitsiakhovich (2007)). Esta solución es

$$\psi(z) = -\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial R} |\zeta|\partial_{\nu_\zeta} G_1(z,\zeta)\,\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (7)$$

y está conectada con la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace para $\mathbb{D}_2$ a través del mapeo conforme, es decir, el método consiste en reubicar el problema desde el dominio doblemente conexo $\mathbb{D}_2$ al anillo concéntrico Ω.

El primer hecho importante que se utiliza por el lema 1 es: la composición de una función armónica con una función holomorfa sigue siendo armónica. Además debido a la regularidad de las fronteras de ambos dominios y la inyectividad del mapeo conforme, claramente φ es continua sobre la frontera de $\mathbb{D}_2$.

En el anillo concéntrico Ω la solución $\psi(z)$ se expresa en términos de la convolución con el Kernel de Poisson. Mediante el mapeo conforme $w(z)$ (ver 2), $\psi(z)$ se mueve de regreso al dominio $\mathbb{D}_2$, dando así la solución del problema a través del siguiente resultado:

Teorema 2. *Sea un dominio doblemente conexo $\mathbb{D}_2$. El problema de Dirchlet para la ecuación de Laplace ,*

$$\omega_{z\bar{z}} = 0 \,en\; \mathbb{D}_2 \quad \omega = \varphi \;sobre\; \partial\mathbb{D}_2, \quad (8)$$

donde $\varphi \in C(\partial\mathbb{D}_2,\mathbb{C})$, es resoluble en el espacio $C^2(\mathbb{D}_2,\mathbb{C})\cap C(\overline{\mathbb{D}}_2,\mathbb{C})$. La solución es única y está dada por

$$\omega(z) = -\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_2} \varphi(z)|\zeta|p(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (9)$$

Demostración. Como el Kernel de Poisson es armónico en $\mathbb{D}_2$, entonces 9 satisface la ecuación de Laplace en $\mathbb{D}_2$. En vista de 6 se cumple la condición de frontera.

El teorema anterior ilustra un ejemplo de problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace sobre un dominio doblemente conexo, de la cual se pueden derivar problemas particulares sobre este tipo de dominios. Por ejemplo, se podría considerar una aplicación en flujo de calor, cuyo problema consiste en hallar la temperatura de estado estable que satisface condiciones de frontera específicas, y como aplicación en la electrostática se puede encontrar el potencial electrostático con condiciones de fronteras dadas. La temperatura de estado estable y el potencial electrostático son soluciones de la ecuación de Laplace en cada caso.

6 Conclusiones

El resultado principal de esta investigación fue la construcción del Kernel de Poisson para dominios doblemente conexos. Esto se hizo en la sección 4, para lo cual se usó la función armónica de Green obtenida en la sección 3 escrita en términos de sumatorias. Luego en la sección 5 se usó este Kernel de Poisson para dar una fórmula de representación a la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

La existencia de un mapeo analítico $w : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ permite resolver problemas con valores en la frontera más complicados y de gran interés en el campo de la física. Por otra parte, el método para obtener el Kernel de Poisson mediante una función de Green dada para dominios doblemente conexos también se puede aplicar para obtener otros núcleos de funciones especiales a partir de las funciones de Neumann armónicas y las funciones Robin armónicas en tales dominios. Con estas funciones se puede entonces obtener otras fórmulas de representación integral, que posibiliten resolver problemas de valores en la frontera diferentes del planteado en este trabajo y que pueden servir como modelos para diferentes fenómenos físicos. El estudio de los problemas de valores de fronteras en dominios multiplemente conexos desde el punto de vista numérico sigue siendo objeto de investigación.

7 Bibliografía

Referencias

Abdymanapov, S., Begehr, H., y Tungatarov, A. (2005). Some schwarz problems in a quarter plane. *Eurasian Math.J.3*, 22-35.

Abdymanapov, S., Begehr, H., y Tungatarov, A. (2009). Four boundary value problems for the Cauchy-Riemann equation in a quarter plane. *More Progress in Analysis*, 1137-1147. doi: 10.1142/9789812835635_0109

Adler, P. (1992). *Porous media. geometry and transport.* Paris: Butterworth Heinemann.

Akel, M., y Hussien, S. (2012). Two basic boundary value problems for inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in an innite sector. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, *3*(3), 315-328. doi: 10.1515/apam-2012-0009

Begehr, H. (1994). *Complex analytic methods for partial dierential equations.* World Scientic.

Begehr, H. (2017). Fundamental solutions to the laplacian in plane domains bounded by ellipses. , *4*, 293–311. doi: 10.1007/978-981-10-4642-1_25

Begehr, H., y Gilbert, R. (1992). *Transformations, transmutations, and Kernel functions.* Longman Scientic Technical.

Begehr, H., y Harutyunyan, G. (2006). *Complex boundary value problems in a quarter plane, complex analysis and applications, proc.13th intern.conf.on finite or innite dimensional complex analysis and appl., Shantou, China.* N. J. Y.Wang. World Sci., Ed.

Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2009a). Harmonic boundary value problems in half disc and half ring. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, *40*(2). doi: 10.7169/facm/1246454030

Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2009b). A polyharmonic Dirichlet problem of arbitrary order for complex plane domains. *Further Progress in Analysis*, 327-336. doi: 110.1142/9789812837332_0027

Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2010a). How to find harmonic Green functions in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *56*(12), 1169–1181. doi: 10.1080/17476933.2010.534157

Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2010b). The parqueting-reflection principle for constructing Green functions. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations*.

Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2012). Harmonic Dirichlet problem for some equilateral triangle. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *57*(4), 185-196. doi: 10.1080/17476933.2011.598932

Dzhuraev, A. (2000). *Singular partial dierential equations.* Boca Raton London: Chapman Hall CRC Press.

Gakhov, F. (1966). *Boundary value problems.* Pergamon Press: Oxford.

Garnett, J. (1981). *Bounded analytic functions.* New York: Academic Press.

Muskhelishvili, N. (1953). *Singular integral equations.* Noordho: Groningen.

Richardson, S. (2001). Hele-shaw ows with time-dependent free boundaries involving a multiply connected region. *Euro J. Appl. Math*, *12*(5), 571-599.

Shupeyeva, B. (2012). Harmonic boundary value problems in a quarter ring domain. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, *3*, 393-419. doi: 10.1515/apam-2012-0025

Shupeyeva, B. (2013). *Boundary value problems for complex partial differential equations in quarter a ring and half exagon* (Doctoral Thesis). Freie Universitat Berlin.

Stein, E., y Shakarchi, R. (2003). *Complex analysis (princeton lectures in analysis, no. 2).* Princeton University Press Illustrated edition.

Vaitsiakhovich, T. (2007). Boundary value problems to second order complex partial differential equations in a ring domain. *Siauliai Mathematical Seminar*, *2*(10), 117-146.

Vaitsiakhovich, T. (2008). *Boundary value problems for complex partial diferential equations in a ring domain* (Doctoral Thesis). Freie Universität Berlin.

Vekua, I. (1962). *Generalized analytic functions.* Pergamon Press: Oxford.

Vergara, J., y Vanegas, C. (2021). A fundamental solution for the Laplace operator in a doubly connected domain. *Bull CompAMa: Bulletin of Computational Applied Mathematics*.

Ying, W., y Xuefang, Z. (2016). Schwarz boundary value problem for the Cauchy-Riemann equation in a rectangle. *Boundary Value Problems*, *1*. doi: 10.1186/s13661-016-0520-z