

Los fractales y sus aplicaciones. Revisión documental

The fractals and their applications. Documentary review

Luis Basurto Santos y Oswaldo Larreal Barreto

Recepción: 09/07/2021 **Aceptación:** 15/10/2021 **Publicación:** 30/01/2022

Abstract The purpose of the research is to carry out a documentary review on fractals and their applications in the areas of medicine, chemistry, geology, computing, study of new mathematical theories, as well as programs used in the graphing of fractals, the content of which will serve as a guide, for future studies. For the documentary search, a meticulous study of articles in magazines of great impact worldwide was carried out that show the origins and advances of the applications of fractals in different scientific areas. Among the most important results was found in medicine, the diagnosis of cancer and heart problems; in geology, the study of the seismicity of territorial faults such as the San Andrés fault and the Lorca-Alhama fault found in Murcia; in chemistry, the study of elements such as zinc and porosity; in computing, image compression; as well as the application of programs such as XaoS, Fractint and Python in the generation of fractal images. Concluding that fractal theory, studies nature in a recurrent way based on mathematical theory and the use of computational algorithms applied in various areas of science and engineering.

Keywords application, computing, fractal, mathematics, study.

Resumen El propósito de la investigación consiste en realizar una revisión documental sobre los fractales y sus aplicaciones en las áreas de medicina, química, geología, computación, estudio de nuevas teorías matemáticas, así como programas utilizados en la graficación de fractales, cuyo contenido servirá de guía para futuros estudios. Para la búsqueda documental se realizó un estudio minucioso de artículos en revistas de alto impacto a nivel mundial que muestran los orígenes y avances

Luis Vicente Basurto Santos, M.Sc.(c)

Estudiante de Maestría, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Posgrado, Portoviejo, Ecuador, e-mail: lbasurtosantos@gmail.com,  <https://orcid.org/0000-0002-3302-4995>

Oswaldo José Larreal Barreto, Ph.D.

Docente, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática y Estadística, Portoviejo, Ecuador, e-mail: oswaldo.larreal@utm.edu.ec,

 <https://orcid.org/0000-0001-7604-7030>

de las aplicaciones de fractales en diferentes áreas científicas. Entre los resultados más importantes se encontró en la medicina, el diagnóstico de cáncer y problemas cardíacos; en la geología, el estudio de la sismicidad de fallas territoriales como la famosa Falla de San Andrés y la Falla de Lorca-Alhama que se encuentra en Murcia; en química, el estudio de elementos como el zinc y la porosidad; en computación, la compresión de imágenes; así como la aplicación de programas como XaoS, Fractint y Python en la generación de imágenes fractales. Concluyendo que la teoría fractal, estudia la naturaleza de forma recurrente basándose en la teoría matemática y el uso de algoritmos computacionales aplicados en varias áreas de la ciencia e ingeniería. **Palabras Claves** aplicación, computación, estudios, fractal, matemáticas.

1 Introducción

Desde la formación del planeta se han encontrado en la naturaleza una gran diversidad de formas complejas y caóticas que no podían ser descritas con la geometría euclidiana, llegando a ser consideradas monstruosidades geométricas (Moreles, 2003). En geometría un objeto regular en un plano posee dos dimensiones y en el espacio tres dimensiones; en cambio, si el objeto presenta una forma irregular (fractal), para conocer sus dimensiones debe medírsela mediante la geometría fractal, calculando para ello la dimensión fractal (Rodríguez et al., 2018). La dimensión fractal es considerada la medida más adecuada para calcular las formas irregulares del cuerpo humano (Rodríguez et al., 2006).

“Un fractal es un objeto geométrico que tiene una geometría complicada o irregular y es aproximadamente auto-similar” (Clark Robinson, 2012). Estas estructuras se las encuentra en las nubes, copos de nieves, esponjas, árboles, montañas, costas, propagación de fuego en los bosques y la distribución de las galaxias (Dehouve, 2017).

Existen muchos fractales generados por los matemáticos, entre ellos destacan el Conjunto de Cantor, el triángulo Sierpinski y la curva de Koch que son fractales de sistema de función iterada; el Conjunto de Julia y el Conjunto de Mandelbrot que fueron desarrollados por investigadores líderes en el campo de los fractales de los números complejos como Gaston Julia y Benoit Mandelbrot (Ahmed, Akter, Hossain, y Nurujjaman, 2016).

Estudiar las diversas formas y fenómenos presentes en la naturaleza, se ha vuelto uno de los problemas de mayor dificultad, debido a la escasez de herramientas que permitan analizar propiedades de autosemejanza, de ahí la importancia de la geometría fractal que se acomoda a formas, fenómenos y problemas, descifrando su comportamiento; conocer el patrón de comportamiento de un fenómeno o proceso, es de gran utilidad para predecir su evolución en el tiempo (López y Rivera, 2011).

Debido a que el análisis fractal está presente en la naturaleza y al ser un campo poco estudiado en las matemáticas por su reciente interés, la investigación aportará una revisión documental sobre los fractales y sus aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia, analizando su evolución e influencia, demostrando que la teoría y la

práctica son vitales para la exploración de este campo, sirviendo de ejemplo para futuros estudios.

2 Métodos

Para la búsqueda de contenido bibliográfico se realizó una revisión concisa mediante la utilización de bases de datos como Web of Science y Scimago, que indican el índice de impacto de las revistas científicas de mayor prestigio a nivel mundial en diferentes áreas de la ciencia; adicionalmente, se utilizaron otros buscadores de artículos científicos como Google Académico, Scielo, Dialnet y Redalyc. De la información obtenida se seleccionaron los avances más importantes sobre la teoría fractal en áreas como la medicina, geología, química, computación y matemática; los cuales fueron evaluados mediante lectura crítica y verificados con su DOI (Digital Object Identifier, en español Identificador de objeto digital).

3 Desarrollo y discusión

Las diversas teorías matemáticas como la geometría fractal han permitido estudiar objetos naturales (fractales), cuyas formas irregulares no se podían estudiar con las matemáticas básicas y que la irregularidad que los caracteriza se mide a través de la dimensión fractal (Rodríguez et al., 2014). El nombre de fractales a estos objetos que se caracterizan por presentar forma fragmentada, interrumpida y caótica se lo dio Benoit Mandelbrot, quien retomó estudios realizados anteriormente por matemáticos como Gastón Julia y Pierre Fatou que estudiaron estas áreas complejas de forma primitiva, cuyo procedimiento era tedioso e imposible de calcular por las infinitas fragmentaciones que mostraban los objetos, por lo que se los dejó de lado; pero Mandelbrot con la aparición de ordenadores en los años 70 pudo terminar estos estudios (Arenzana, 2015).

3.1 *¿Qué son los fractales y por qué son tan útiles?*

En la actualidad los fractales son una herramienta muy importante para describir los fenómenos de los objetos naturales. Las propiedades de estos objetos pueden ser la longitud de un borde, el espectro de tiempo de relajación de un proceso, la estructura geométrica de los árboles, el borde de las células, la cristalización en los procesos químicos, una costa, un copo de nieve o un río. Todos comparten una característica común que es su medida y cierta complejidad geométrica. La longitud (o área) del copo de nieve al igual que una costa es difícil de medir en términos geométricos, el mismo problema ocurre en otros objetos complejos.

Todos estos objetos tienen una medida muy complicada de determinar a pesar que su geometría suele ser muy simple, la cual se debe a la suma de pequeñas cantidad a razón de su escala. Todas las medidas derivadas de tales objetos están relacionadas con la elección de la longitud de escala. Los ejemplos naturales mencionados aportan, con un poco de reflexión, a la dificultad de dar una definición en cuanto a su medida. Si definimos una medida geométrica como la determinación de una medida cuantificable de estos ejemplos, como la longitud o el área, entonces las medidas geométricas de las características físicas son difíciles de establecer.

Félix Hausdorff fue uno de los pocos matemáticos que pensó en este problema. En 1918, Hausdorff publicó un importante artículo en *Mathematische Annalen*, este artículo dio un nuevo tratamiento a la medida de Lebesgue (Hausdorff, 1918). Aproximadamente 60 años después del artículo de Hausdorff, Benoit Mandelbrot anexó el término fractal en su “Geometría de la naturaleza”. Mandelbrot examinó una gran cantidad de objetos naturales, artificiales y geométricos. También introdujo experimentos numéricos para demostrar la belleza fractal de los mapeos. El famoso conjunto de Mandelbrot es un ejemplo que demuestra la naturaleza fractal mediante un mapa iterado. Benoit Mandelbrot es el padre fundador de la comunidad fractal que incorpora campos de la física, la biología, la química, la ciencia de los materiales, la arquitectura, etc.

La aplicación de conceptos fractales en la ciencia actual es omnipresente en todas las disciplinas. La determinación de una longitud de contorno se puede realizar de diferentes maneras. Un método para determinar la longitud total de un contorno es la aplicación del método Box Counting, que obtuvo su nombre del recuento de casillas o cuadrados separados en el plano. Los cuadrados o cajas se pueden reemplazar por otros objetos geométricos como esferas, elipsoides, cilindros, etc. La forma explícita del elemento de medición básico utilizado es de menor importancia en la estimación de la longitud de un contorno.

El Box Counting es uno de los métodos más utilizados para determinar la dimensión fractal, su popularidad se debe en gran parte a su relativa facilidad de cálculo matemático y estimación empírica.

Ahora veamos la definición formal “Box Counting”. Sea S un subconjunto acotado no vacío de \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^n) y sea $N(\epsilon)$ el número de conjuntos de diámetro máximo ϵ , que pueden cubrir S .

Definimos el valor de la dimensión de Box Counting de S como:

$$D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (1)$$

Los fractales son muy tentadores para su estudio y debido a ello siempre se ha intentado desarrollar nuevos gráficos de los Conjuntos de Mandelbrot y de Julia (Szoke y Holban, 2008). Como se mencionó anteriormente, sin el desarrollo de los ordenadores no se hubiera podido estudiar los fractales, es claro que el estudio fractal está vigente de manera recurrente en la naturaleza, así como el progreso de los métodos matemáticos e informáticos, lo cual ha conllevado a aplicarse en varios campos de la ciencia donde se caracterizan diferentes fenómenos (Urgiles, Vaca, Tixi, Erazo, y Cardenas, 2020).

3.2 Programas especiales para graficar fractales

Existe una gran variedad de programas que permiten graficar fractales, solo mostraremos algunos que consideramos útiles para dicho fin.

3.2.1 XaoS

Es un programa que tiene definido diferentes funciones que muestran impresionantes figuras de fractales. XaoS tiene versiones para Windows, Linux y Mac. Es gratis de código abierto, se puede descargar desde <https://xaos-project.github.io/>.

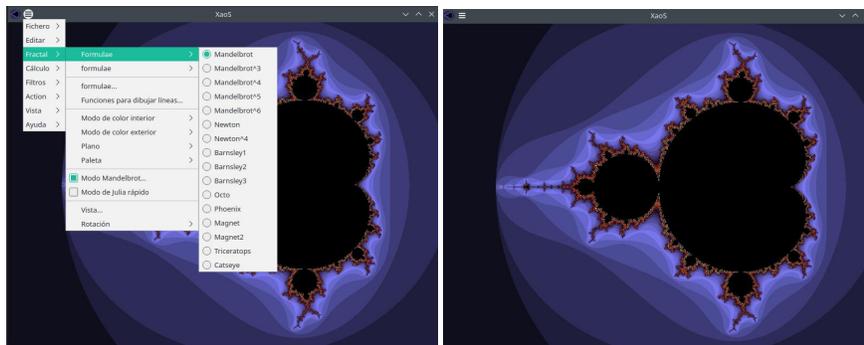


Figura 1: Imagen del Conjunto de Mandelbrot generada del programa XaoS
Fuente: Elaboración propia

3.2.2 Fractint

El Fractint es un programa similar al XaoS, al igual que el programa anterior es gratis de código abierto, además permite la manipulación de la fórmulas que definen los fractales.

3.2.3 Python

En el lenguaje de programación Python tenemos la librería fractals, la cual tiene definidas varias fórmulas de fractales como ejemplos: Mandelbrot, Julia. Por ejemplo, si se desea graficar el conjunto de Julia, se debe realizar lo siguiente en Python:

```
from fractal import Julia
```

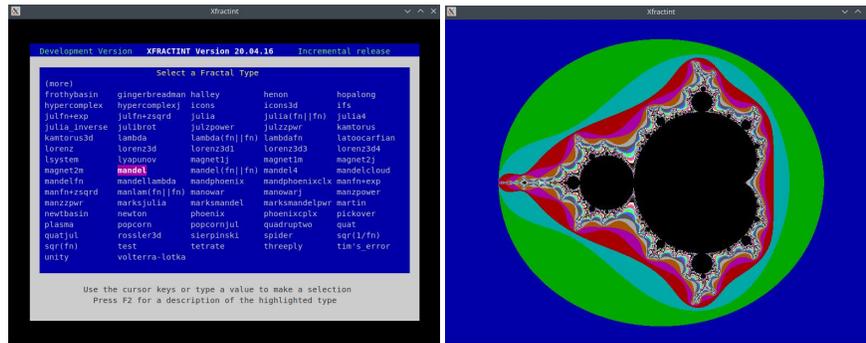


Figura 2: Imágen del Conjunto de Mandelbrot generada del programa Fractint.
Fuente: Elaboración propia

```
ju = Julia([500, 500])
ju.setC(0 - 1j)
ju.doJulia(500)
ju.wait()
```

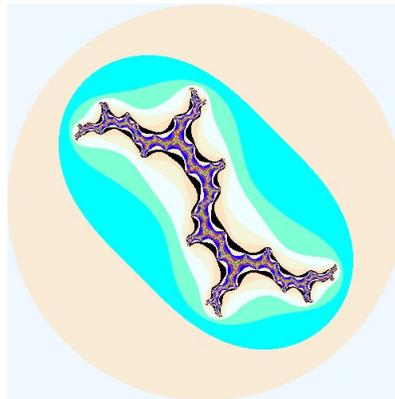


Figura 3: Imagen del conjunto de Julia generada por el código anterior con la librería fractals de Python

Fuente: Elaboración propia

Con pocas líneas de código podemos realizar fractales muy interesantes, se sugiere que se lea el manual de la librería fractal (<https://pypi.org/project/fractals/>) al igual que el de Python.

3.3 *Aplicaciones de los fractales*

En la actualidad, la geometría fractal y multifractal abarca áreas tan diversas como la física, biología, medicina, meteorología, informática, economía y el arte (Caicedo, Castañeda, y Santiago, 2017). La matemática y la física estudian los fractales mediante los sistemas dinámicos caóticos, los físicos describieron la ruta del orden del caos (atractores extraños) mediante fractales a través de estudios de flujos turbulentos en fluidos; en la biología las estructuras fractales han permitido estudiar la velocidad de relajación térmica de las proteínas que presenta el hierro, en geología ha permitido estudiar la famosa falla de San Andrés, así como terremotos de magnitud menor de 6 en la escala de Richter (Spinadel, 2003). “La dimensión fractal ha sido considerada la medida más apropiada para medir las formas irregulares del cuerpo humano” (Rodríguez et al., 2006).

A continuación se presentan estudios que incluyen los hallazgos de varios autores de la aplicación fractal en diversas áreas de la ciencia con sus respectivos análisis, además de demostraciones de teorías matemáticas que se generan día a día:

3.3.1 **Medicina**

En el estudio de las irregularidades que presenta el cuerpo humano, la medicina aplica la dimensión fractal en sus áreas clínicas y experimentales para caracterizar sus diferentes estructuras a nivel neuronal y pulmonar, así como vasos sanguíneos e intestinos; desde el punto clínico se ha podido realizar estudios morfométricos en áreas oncológicas, así como en el diagnóstico de cáncer de huesos (Bernal et al., 2016).

Una de las primeras investigaciones que relacionó los fractales y la medicina, consistió en el diagnóstico pre-mortem para la identificación del tumor auricular metastásico mediante electrocardiográfica-patológica, donde analizaron la metástasis auricular derecha de un carcinoma broncogénico y las arritmias auriculares; pero los investigadores no reconocieron el comportamiento fractal (Goldberger y Ludwig, 1978). Posteriormente se estudió un mecanismo de estabilidad eléctrica cardíaca en los ventrículos mediante el sistema His-Purkinje, cuya estructura presenta múltiples frecuencias, donde identificaron que el proceso que se daba allí presentaba conducción fractal, con lo que se sugirió el estudio de la dinámica fractal (estructura no lineal) y su aplicación para la observación de un sistema fisiológico estable (Goldberger, Bhargava, Mandell, y West, 1985).

También se ha publicado una revisión documental donde se presenta varios estudios realizados por el médico Joseph Goldberger, en el cual se indica que ciertas características del caos dinámico se relaciona con las estructuras fractales y su comportamiento fractal; siendo principios para estudiar la fisiología animal y sus patologías, entre las que se incluye la fibrilación ventricular. Con ello se dio respuesta a la aplicación del análisis no lineal en el comportamiento cardiovascular, así como en diferentes estructuras a nivel fisiológico (Goldberger, 1987). Mediante la dinámica compleja no lineal se ha estudiado el envejecimiento fisiológico de los

órganos sanos, donde se ha cuantificado y modelado el envejecimiento, observando pérdidas según avanza la edad tanto en controles cardiovasculares, potenciales electroencefalográficos y liberación de hormonas pulsátiles; cuyos datos obtenidos se cuantificaban y permitían evaluar el tamaño de los órganos. Además en este estudio, también se exploró el corazón, permitiendo el diagnóstico de los intervalos entre latidos y la gravedad de arritmias cardíacas, es decir, el comportamiento fractal que se observaba, ayuda a prevenir posibles infartos o predecir la mortalidad que tiene uno (Lipsitz y Goldberger, 1992).

En el cuello uterino, la geometría fractal ha sido aplicada para la detección de anomalías presentes en células normales, atípicas escamosas (ASC-US) del epitelio escamoso y lesiones intraepiteliales escamosas de bajo grado (LEIBG), evidenciándose la dinámica fractal en los tres tipos de células estudiadas; las cuales no presentaron anomalías, debido a que no existía diferencias entre ellas (Rodríguez et al., 2006). El estudio de la complejidad fractal y las aplicaciones de herramientas computacionales han permitido analizar la variabilidad de los ritmos cardíacos, dichas técnicas permitieron analizar la variabilidad entre ellos, mostrando que múltiples enfermedades cuya patogenia no se puede apreciar, se debe a la degradación de los sistemas complejos (Martínez, 2012).

La dimensión fractal se ha aplicado con conceptos de armonía matemática intrínseca (AMI) y variabilidad celular para el diagnóstico de células preneoplásicas y cancerígenas del epitelio escamoso cervical pertenecientes al cuello uterino, donde evaluaron las diferencias entre núcleo, citoplasma y la totalidad, para encontrar la existencia de irregularidades; demostrándose que no existen anomalías según las diferencias matemáticas de las células normales en relación a las células L-SIL y H-SIL (Bernal et al., 2016). En la figura 4, se presentan imágenes esqueléticas de redes vasculares, donde el trayecto de distancia mínima destaca en la vasculatura del tumor, ilustrando la tortuosidad de los vasos estudiados y el comportamiento fractal existente:

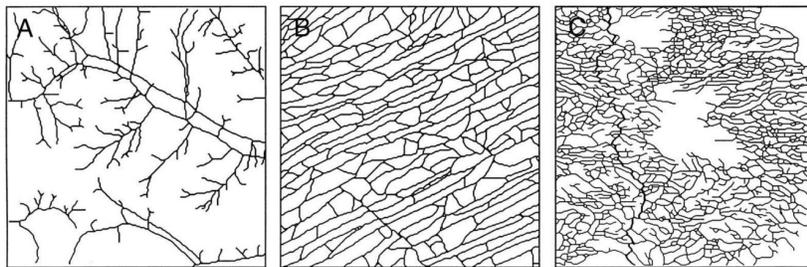


Figura 4: (A) arterias y venas normales; (B) capilares subcutáneos normales; (C) vasculatura tumoral

Fuente: (Baish y Jain, 2000).

Una de las investigaciones más recientes que se ha realizado con la aplicación fractal, surge por el problema de mayor preocupación a nivel mundial en la actuali-

dad, el COVID-19, donde se presenta algunas ideas geométricas generadas por las curvas de contagio de la epidemia, utilizando el número total de casos en relación al tiempo ajustado por el modelo de Richards Generalizado, mostrando similitud en sus curvas de contagios, por lo tanto, un comportamiento fractal (Materassi, 2019).

Como se mencionó anteriormente, también se ha aplicado la geometría fractal para el estudio de neuronas. En este tipo de estudios se han utilizado los fractales para representar el sistema de funciones iteradas (IFS) que se produce en las neuronas, logrando de esta forma comprender el comportamiento de las redes neuronales generadas por redes neuronales profundas (DNN); los resultados mostraron que existe la combinación de autosimilitudes y que las DNN tienen la capacidad de aproximarse a las IFS, lo cual se vuelve llamativo en el procesamiento de imágenes (Dym, Sober, y Daubechies, 2020).

3.3.2 Geología

La primera contribución de la geometría fractal en las ciencias de la Tierra fue realizada por Thrcotte y Huang, quienes describen características y procesos geológicos con características fractales como concentraciones de minerales y petróleo, rotura de rocas, sismicidad y tectónica, erupciones volcánicas, intensidad de fracturas, topografía de la superficie y morfología de cuencas de drenaje; así mismo Mandelbrot y Wallis sentaron las bases para la revolución que se avecinaba con el uso de la dimensión fractal en esta ciencia (Barton y La-Pointe, 1995). La geometría fractal se ha aplicado para el análisis cuantitativo de la zona de Falla de Lorca-Alhama que se encuentra en Murcia, donde se estudió trazos de las fallas mapeados en una escala de 1:25, obteniéndose que la dimensión fractal promedio es de 1,25 para la totalidad de la zona de la Falla; además se identificó que los sectores con valores de dimensión fractal menores de 1,15 son totalmente sísmicos (Silva, 1996).

También se han realizado modelos tridimensionales de flujo de agua de diferencias finitas mediante el cálculo de la dimensión fractal de caja, donde el modelo desarrollado simula acuíferos fracturados y porosos. Este modelo fue basado en el modelo de Baecher y la dimensión de masa del modelo fractal de Levy-Lee, cuyo modelo resultante fue comparado con el modelo MODFLOW, coincidiendo en sus cálculos de dimensión fractal sin necesidad de usar una ecuación fractal (Chon y Choi, 2001). Se ha analizado fractalmente las series de tiempo en la producción de petróleo y de gas, para lo cual, se ha propuesto un algoritmo que permite el cálculo de la dimensión fractal; resultando un método de alta precisión y de rapidez de convergencia, aplicables para cálculo de ingeniería afines y procedimientos caóticos, pero con la limitación que el algoritmo presentaba una restricción, que solo se puede trabajar con un limitado número de datos (AbbasovB, Ismaylov, y Suleymanova, 2009).

Se han aplicado métodos de análisis fractal para estudiar la dimensión del caudal del río Yangtze de la ciudad de Chongqing durante el periodo de inundación medio y total, identificándose que mientras mayor es la dimensión, más se curvará el río;

la dimensión media sin inundación presentaba una margen izquierda de $-0,3321$ y a la derecha de $-0,3323$ y el valor de la dimensión fractal durante la inundación a la izquierda es $-1,6884$ y a la derecha es $-1,6859$ (Jing, Lichun, Ming-hui, Qiang, y Zhihui, 2013).

La teoría de fracción y transporte secuencial (SFT) ha definido una nueva dimensión fractal, que permitió analizar la actividad volcánica de las erupciones de los años 1723 y 1963-65 del volcán Irazú, para ello, se incorporó el coeficiente de Hurst y el exponente de la ley de potencia; el modelo generado concuerda con las observaciones de campo (Brenes y Alvarado, 2013). Este nuevo modelo fractal, se amplió para deducir una relación log-logística generalizada para los volcanes Colima, Soufriere y Erebus, dando sustento teórico a la relación log-logística empírica realizada anteriormente para el volcán Soufriere, y cuya diferencia en relación al modelo de Brenes y Alvarado, es que Brenes incluye la variación de tiempo; cuya modelación es característica de la formación de fracturas en el magma (Brenes, 2016).

Se ha descrito y cuantificado la complejidad de la red de drenaje del río San Cristóbal mediante la aplicación de la dimensión fractal, obteniendo valores promedio de las corrientes de $1,04$ respecto a la autoafinidad, mostrando el predominio de las corrientes rectas estudiadas tectónicamente, mientras que la dimensión fractal de la red, por su autosimilitud varía entre un rango de $1,47$ y $1,59$ (Ramírez y Cáceres, 2017). Como se indicó, también se han realizado estudios para calcular la dimensión fractal de las regiones estelares Hubble V y Hubble X de la galaxia NGC 6822 mediante el método de conteo de cajas, obteniendo valores en sus dimensiones de $1,31 \pm 0,04$ Hubble V y $1,41 \pm 0,03$ en la Hubble X, indicándose un bajo comportamiento en las estructuras irregulares de las regiones HII (Caicedo et al., 2017).

La figura 5 presenta la famosa falla de San Andrés, la cual también se ha estudiado mediante la dimensión fractal.



Figura 5: Falla de San Andrés

Fuente: (Medina, 2019)

3.3.3 Química

Se ha desarrollado un modelo fractal para el estudio de permeabilidad del fluido Ellis en medios porosos saturados y mediante el cálculo de la dimensión fractal, donde pudieron concluir que cuanto mayor sea la constante del material menor será la permeabilidad efectiva (Y. Li, Yu, Chen, y Wang, 2008). También se ha estudiado la dimensión fractal D_f de un patrón formado en una celda de capa delgada de zinc en el proceso de electrodeposición, en la cual se demostró que la dimensión fractal aumenta según aumenta la concentración inicial de iones de zinc, pero hasta cierto límite donde tiende a disminuir su dimensión. Esta dimensión se encuentra dada por la siguiente expresión: $D_f = C_1 + \frac{2}{C_1} + 1$; C_1 es la densidad de las partículas de zinc que corresponde a la fracción de superficie (Betancourt, Izquierdo, Llanos, Nieto, y Suárez, 2013). La figura 6, muestra la imagen obtenida del crecimiento, la cual se convirtió a blanco y negro mediante el programa ImageJ 1.36 b; posteriormente se analizó la dimensión fractal por conteo de caja con el programa Harfa 5.

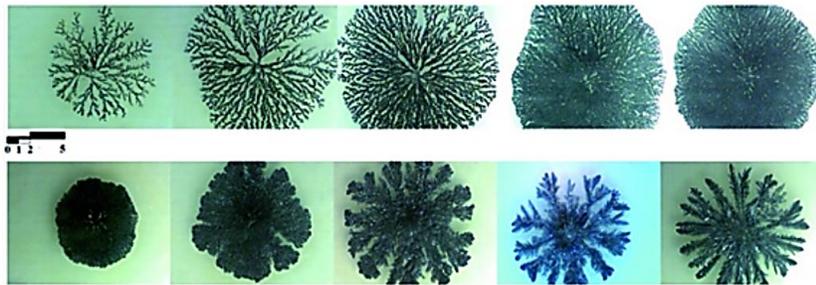


Figura 6: Arriba.- Electrodeposición de zinc a 8.5 V concentraciones de 0.001, 0.002, 0.004, 0.008 y 0.001 respectivamente a los 10 minutos. Abajo.- Electrodeposición de zinc a 8.5 V concentraciones de 0.01, 0.02, 0.03 0.04, y 0.05 respectivamente a los 5 minutos

Fuente: (Betancourt et al., 2013)

Se ha presentado un modelo de estructuras de poros fractal para lutitas basado en la teoría fractal, con él se analizó los efectos de los diferentes poros en la dimensión fractal D_f y la influencia de la dimensión fractal sobre la porosidad, mostrándose que la D_f disminuye según aumenta el parámetro de estructura q/m en relación al diámetro del poro, además de que la D_f tiene una relación positiva con la porosidad (Zhang, Li, Tang, y Guo, 2014). Asimismo se ha desarrollado un nuevo modelo fractal que permite calcular la porosidad dual de flujo de fluidos monofásico mediante medios porosos fracturados, basados en una expresión analítica que depende de la dimensión fractal y la apertura de fractura, produciendo un modelo que permite visualizar las características estadísticas de las fracturas formadas que se encuentren (Xu, Liu, Pulung, Qiu, y Li, 2017). Otro modelo fractal creado para áreas de la química, consistió en adsorción fractal multicapa, donde se identificó el

comportamiento de las capas según la presión en la adsorción de metano de 2,5 y 10 nm, obteniendo que el número de capas aumenta según aumenta la presión y que la dimensión fractal de la superficie de poros varía en un rango de 2,31-2,63 (Zhang et al., 2018).

Se ha determinado el diámetro medio de poros, el área superficial específica, el volumen de los poros, la permeabilidad y la porosidad, mediante el estudio de dos dimensiones fractales D_1 y D_2 , para ello, se tomaron 14 muestras de nanotubos para D_1 y D_2 . Como resultado se obtuvieron curvas morfológicas correspondientes a la absorción de nitrógeno, posteriormente, se concluyó que la dimensión fractal promedio según los parámetros de las estructuras de poros de D_2 (2,4645) es mayor que D_1 (2,1187), demostrando la diferencia entre las muestras estudiadas (X. Li et al., 2019). Mediante modelos computacionales se simularon procesos bioquímicos de síntesis de eritritol y manitol, los cuales presentaban mecanismos complejos; para comparar los resultados se utilizó modelos de orden entero y fraccionario, y se demostró que los modelos fraccionarios permiten simular de mejor manera los procesos bioquímicos y su evolución (Dulf, Vodnar, Danku, Muresan, y Crisan, 2020).

3.3.4 Computación

Pese a que ya se han nombrado varias investigaciones donde se ha dado el uso de la computadora para la simulación fractal, es importante revisar sus inicios y una de sus aplicaciones más importantes que es la compresión de datos e imágenes. En 1991, Lauwerier indicó que a partir del desarrollo de las microcomputadoras se crearon los primeros fractales, debido a que las herramientas informáticas permitieron un mayor estudio de estos objetos complejos; y que Maling en 1968, fue uno de los primeros investigadores en relacionar los algoritmos matemáticos para descifrar objetos complejos, a través de la teoría fractal (Urgiles et al., 2020).

La compresión de imágenes se ha estudiado basada en transformaciones fractales mediante sistemas de funciones iteradas (IFS) desde el punto teórico-práctico. Dado que los algoritmos simples generan imágenes fractales complejas, se concluye que los parámetros más relevantes de un algoritmo son los que deben almacenarse (Fisher, Jacobs, y Boss, 1992). Se han descrito técnicas de compresión de imágenes fractales basados en los fundamentos matemáticos para comprimir imágenes fracturadas, para ello se utilizó técnicas como la compresión de imágenes con códigos IFS en la codificación para generar así la imagen fractal durante la decodificación. Otra técnica es la codificación segmental, en la que se codifica de manera eficiente de acuerdo a la dimensión fractal; y la última técnica es la codificación de vara para medir de manera similar al Differential Pulse Code Modulation (DPCM) (Lu, 1993).

La compresión fractal de imágenes se ha dado explicando la teoría que sustenta el método de compresión, mostrando un algoritmo para su implementación, comprimiendo y descomprimiendo imágenes en cierto tiempo. Se determina que el tiempo de compresión de un computador de procesador de 2.83GHz es de 30 min para la primera celda que cubre la celda de rango y para uno de 7 GHz es de 2 horas aproximadamente si cubre todas las celdas dominio (Pérez, 2012). También se ha realizado

un estudio exhaustivo de los principios matemáticos que intervienen en la comprensión de imágenes fractales. Se concluye que la compresión de imágenes fractales permite el almacenamiento de grandes cantidades de datos solo comprimiéndolos, además de que los sistemas de funciones iteradas en un archivo comprimido se presentan en escalas indefinidas (Drakopoulos, 2013).

Los avances en diseño de codificación de imágenes fractales, han examinado modelos fundamentales de los avances de los fractales con sistemas de funciones iteradas (IFS) mediante el uso de algoritmos como ICA y DBSCAN (Joshi, Kumar, y Gupta, 2018). Para optimizar la compresión de imágenes fractales se ha dado la aplicación metaheurística de la naturaleza como el algoritmo de manada de lobos (WPA) y el inspirado en murciélagos (BIA), con la cual, se ha logrado la optimización de la compresión de imágenes fractales (FIC). Con esto se han mostrado mejoras en varias características como tiempo de codificación, relación pico señal/ruido (PSNR), tasa de compresión (CR) y error cuadrático medio (MSE) (Menassel, 2020). La figura 7 describe las imágenes de Lena antes y después de aplicar la compresión de los algoritmos WPA y BIA:



Figura 7: Imagen de Lena comprimida y descomprimida, tomado de Fractal Analysis - Selected Examples

Fuente: (Menassel, 2020)

3.3.5 Matemática

Como ya se conoce, los fractales son objetos matemáticos irregulares con autosimilitud, por ello es importante destacar teorías matemáticas que se forman a partir de ellos y aplicaciones de su teoría en líneas de investigación matemática. Se han propuesto nuevas técnicas para el cálculo de la dimensión fractal de objetos desde el punto de vista numérico, representados en contornos cerrados, para ello, se ha utili-

zando la transformada de Fourier, resultando el espectro de potencia de Fourier y demostrando la relación existente entre potencia y frecuencia a través de la dimensión fractal (Florindo y Bruno, 2011). También se ha demostrado la relación existente entre las leyes de potencia, transformada de Fourier y la geometría fractal, mediante la densidad espectral de potencia que presentan los fractales, evidenciando que el espectro de potencia de señal fractal se comporta según la expresión $P(\omega) \propto \omega^{-1}$, este valor de -1 es el que se relaciona con la dimensión fractal (López y Rivera, 2011).

A partir de los números primos también se ha obtenido fractales, para ello se describieron los resultados de un experimento numérico combinando la teoría de los números primos, la teoría de grupos y las matrices hermitianas circulantes; basándose en la transformación de Fourier, y que al presentarlos gráficamente mediante polígonos regulares se obtiene polígonos fractales y curvas fractales (Vartziotis y Wipper, 2017).

La presencia fractal se ha estudiado también en funciones lacunares poligonales centradas a partir de la exploración del conjunto de Julia completo, tomando espacios que incluyen desplazamiento iterativo y que muestran rotación de fase. Además exponen el análisis de la dinámica iterativa, en la cual, el comportamiento del punto fijo va en función de la rotación de fase, observando una simetría rotacional y exhibiendo características fractales (Mork, Vogt, Sullivan, Rutherford, y Ulness, 2019). También se han investigado análogos de los conjuntos de Julia y Mandelbrot para sistemas dinámicos en los números hiperbólicos de la forma $x + ry$ para $x, y \in \mathbb{R}$, y $r^2 = 1$ pero $r \neq \pm 1$; mostrando que el análogo hiperbólico del conjunto de Mandelbrot logra parametrizar conectividad en los conjuntos de Julia hiperbólicos (Blankers, Rendfrey, Shukert, y Shipman, 2019).

4 Conclusiones

La teoría fractal ha permitido estudiar la naturaleza de manera recurrente a través del uso de las computadoras y la creación de teorías matemáticas que se desarrollan constantemente para aplicarse en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería; siendo el método Box Counting, el más utilizado en el estudio de la dimensión fractal, estimando la longitud de contorno de objetos y fenómenos naturales. El estudio de los fractales desde el punto computacional puede realizarse a través de programas como XaoS, Fractint y Python, que permiten el estudio y manipulación de las funciones que los definen. En la medicina, la aplicación de la dimensión fractal en áreas clínicas y experimentales ha permitido estudiar morfométricamente el cuerpo humano, para el diagnóstico de anomalías y enfermedades como cáncer en el cuello uterino (Rodríguez et al., 2006), ritmos cardíacos (Martínez, 2012), redes neuronales (Dym et al., 2020). En la geología, la dimensión fractal ha permitido el estudio de procesos geológicos en fenómenos y objetos formados en la naturaleza, como la sismicidad de la zona de Falla de Lorca-Alhama (Silva, 1996). En la química, mediante la dimensión fractal se ha dado el estudio de dimensiones de elementos químicos como

zinc (Betancourt et al., 2013), la permeabilidad de fluidos porosos y sus diferentes propiedades (Y. Li et al., 2008; Zhang et al., 2014; Xu et al., 2017; X. Li et al., 2019).

5 Bibliografía

Referencias

- AbbasovB, A., Ismaylov, A., y Suleymanova, A. (2009). Fractal analysis of time series in oil and gas production. *Chaos, Solitons and Fractals*, 41, 2474–2483. doi: 10.1016/j.chaos.2008.09.039
- Ahmed, P., Akter, R., Hossain, A., y Nurujjaman, M. (2016). Fractals generating techniques. *Sonargaon University Journal*, 1(2), 43-54. Descargado de https://www.researchgate.net/publication/335572530_Fractals_Generating_Techniques
- Arenzana, V. (2015). La influencia de los ordenadores en el desarrollo de los métodos iterativos. *Ciencia y Técnica entre la Paz y la Guerra*, 899-906. Descargado de https://www.researchgate.net/profile/Francisco-Gonzalez-Redondo/publication/347936191_Ciencia_y_Tecnica_entre_la_Paz_y_la_Guerra_1714_1814_1914_Vol_2/links/5fe8b374299bf14088502c44/Ciencia-y-Tecnica-entre-la-Paz-y-la-Guerra-1714-1814-1914-Vol-2.pdf#page=167
- Baish, J., y Jain, R. (2000). Fractals and cancer. *Perspectives in Cancer Research*, 60(14), 3683–3688. Descargado de <https://cancerres.aacrjournals.org/content/60/14/3683>
- Barton, C., y La-Pointe, P. (1995). Fractals in the earth sciences. *Springer Book Archive*. doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1397-5>
- Bernal, H., Cifuentes, R., Correa, C., López, F., Méndez, L., Prieto, S., . . . Soracipa, Y. (2016). Fractales: ayuda diagnóstica para células preneoplásicas y cancerígenas del epitelio escamoso cervical confirmación de aplicabilidad clínica. *Med*, 24(1), 79-88. Descargado de <https://www.redalyc.org/pdf/910/91049626007.pdf>
- Betancourt, J., Izquierdo, G., Llanos, J., Nieto, J., y Suárez, E. (2013). Análisis estocástico de la dimensión fractal en electrodeposición de zinc en capa delgada. *Revista Mexicana y física*, 59(5), 412–418. Descarga-

do de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0035-001X2013000500003

- Blankers, V., Rendfrey, T., Shukert, A., y Shipman, P. (2019). Julia and Mandelbrot sets for dynamics over the hyperbolic numbers. *Fractal Fract*, 3(1), 1-9. doi: 10.3390/fractalfract3010006
- Brenes, J. (2016). Modelo fractal de una erupción aplicado a volcanes denominados log-logísticos: Colima, Soufriere y Erebus. *Revista Geológica de América Central*, 55, 61-69. doi: 10.15517/rgac.v55i0.26966
- Brenes, J., y Alvarado, G. (2013). Aplicación de la teoría de fragmentación/transporte secuencial a los depósitos de las erupciones de 1723 y 1963-65 del volcán Irazú, Costa Rica. Caso de dispersión positiva y modelo fractal. *Revista Geológica de América Central*, 48, 87-98. Descargado de <https://www.scielo.sa.cr/pdf/rgac/n48/a05n48.pdf>
- Caicedo, H., Castañeda, H., y Santiago, E. (2017). Fractalidad en regiones de formación estelar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 39(3), e3301-e3308. doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2017-0006
- Chon, B., y Choi, Y. (2001). Modeling of three-dimensional groundwater flow using the method to calculate fractal dimension. *Korean Journal of Chemical Engineerin*, 18, 382-386. doi: 10.1007/bf02699182
- Clark Robinson, R. (2012). *An introduction to dynamical systems continuous and discrete* (Second ed.). American Mathematical Society. Descargado de <https://anyflip.com/jaoc/bfjc/>
- Dehouve, D. (2017). El fractal: ¿una noción útil para la antropología americanista? *Desacatos*(53), 130-149. Descargado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13949642009>
- Drakopoulos, V. (2013). Fractal-based image encoding and compression techniques. *Komunikacie*, 15(3), 48-55. Descargado de https://www.researchgate.net/publication/287907539_Fractal-based_image_encoding_and_compression_techniques
- Dulf, E., Vodnar, D., Danku, A., Muresan, A., y Crisan, O. (2020). Fractional-order models for biochemical processes. *Fractal Fract*, 4(2), 12. doi: 10.3390/fractalfract4020012
- Dym, M., Sober, B., y Daubechies, I. (2020). Expression of fractals through neural network functions. *IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory*, 1(1), 57-66. doi: 10.1109/jsait.2020.2991422

- Fisher, Y., Jacobs, W., y Boss, R. (1992). Fractal image compression using iterated transforms. *Springer, Boston, MA. Image and Text Compression, 176*, 35-61. doi: 10.1007/978-1-4615-3596-6_2
- Florindo, J., y Bruno, O. (2011). Closed contour fractal dimension estimation by the fourier transform. *Chaos, Solitons Fractals, 44(10)*, 851-861. doi: 10.1016/j.chaos.2011.07.008
- Goldberger, A. (1987). Nonlinear dynamics, fractals, cardiac physiology and sudden death. Temporal disorder in human oscillatory systems. *Springer Series in Synergetics, 36*, 118-125. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-72637-8_13
- Goldberger, A., Bhargava, V., Mandell, A., y West, B. (1985). On a mechanism of cardiac electrical stability. the fractal hypothesis. *Biophys J, 48(3)*, 525-528. doi: 10.1016/s0006-3495(85)83808-x
- Goldberger, A., y Ludwig, M. (1978). Metastatic atrial tumor: Case report with electrocardiographic-pathologic correlation. *Journal of Electrocardiology, 11(3)*, 297-300. doi: 10.1016/s0022-0736(78)80132-0
- Hausdorff, F. (1918). Dimension und äußeres maß. *Mathematische Annalen, 79(1-2)*, 157-179.
- Jing, Y., Lichun, W., Ming-hui, W., Qiang, Z., y Zhihui, N. (2013). The fractal dimension of river length based on the observed data. *Journal of Applied Mathematics, 2013*, 1-9. doi: 10.1155/2013/327297
- Joshi, M., Kumar, A., y Gupta, B. (2018). Fractal image compression and its techniques: A review. *Soft Computing: Theories and Applications, 742*, 235-243. doi: 10.1007/978-981-13-0589-4_22
- Li, X., Gao, Z., Fang, S., Ren, C., Yang, K., y Wang, F. (2019). Fractal characterization of nanopore structure in shale, tight sandstone and mudstone from the ordos basin of china using nitrogen adsorption. *Energies, 12(4)*, 1-18. doi: 10.3390/en12040583
- Li, Y., Yu, B., Chen, J., y Wang, C. (2008). Analysis of permeability for ellis fluid flow in fractal porous media. *Chemical Engineering Communications, 195(10)*, 1240-1256. doi: 10.1080/00986440801942018
- Lipsitz, L., y Goldberger, A. (1992). Loss of 'complexity' and aging. potential applications of fractals and chaos theory to senescence. *Jama, 267(13)*, 1806-1809. Descargado de <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/1482430/>

- Lu, G. (1993). Fractal image compression. *Signal Processing: Image Communication*, 5(4), 327-343. doi: 10.1016/0923-5965(93)90055-x
- López, R., y Rivera, E. (2011). Geometría fractal y transformada de fourier. *Scientia Et Technica*, 16(48), 269-274. Descargado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84922622048>
- Martínez, M. (2012). Caos, complejidad y cardiología. *Archivos de Cardiología de México*. Descargado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/acm/v82n1/v82n1a9.pdf>
- Materassi, M. (2019). Some fractal thoughts about the covid-19 infection outbreak. *Chaos, Solitons Fractals: X*, 4, 1-5. doi: 10.1016/j.csf.2020.100032
- Medina, G. (2019). *La falla de San Andrés: qué es, origen, ubicación, consecuencias y más*. Descargado de <https://magicanaturaleza.com/c-sismos/la-falla-de-san-andres/>
- Menassel, R. (2020). Optimization of fractal image compression. *Fractal Analysis - Selected Examples*, 1-20. Descargado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/acm/v82n1/v82n1a9.pdf> doi: 10.5772/intechopen.93051
- Moreles, U. (2003). Reseña de “fractus, fracta, fractal: Fractales, de laberintos y espejos” de Vicente Talanquer. *Acta Universitaria*, 13, 19-22. Descargado de <https://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=41609805>
- Mork, L., Vogt, T., Sullivan, K., Rutherford, D., y Ulness, D. (2019). Exploration of filled-in Julia sets arising from Centered Polygonal Lacunary Functions. *Fractal Fract*, 3(3), 42. doi: 10.3390/fractalfract3030042
- Pérez, S. (2012). Compresión fractal de imágenes. *Revista electrónica de contenido matemático*, 29(2), 1-7. Descargado de <http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol029/Compresion-Fractal.pdf>
- Ramírez, R., y Cáceres, D. (2017). Comportamiento autoafín de redes de drenaje controladas estructuralmente. caso de estudio río San Cristóbal, Pinar del Río. *Minería y Geología*, 33(3), 279-292. Descargado de <https://www.redalyc.org/pdf/2235/223551846003.pdf>
- Rodríguez, J., Prieto, S., Bernal, P., Rodríguez, A., Correa, C., Puerta, G., ... Aristizabal, N. (2014). Caracterización matemática de la enfermedad de Legg-Calvé-Perthes mediante geometría fractal. *Revista Cubana de Ortopedia y Traumatología*, 28(1), 58-69. Descargado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-215X2014000100006

- Rodríguez, J., Prieto, S., Ortiz, L., Wiesner, C., Díaz, M., y Correa, C. (2006). Descripción matemática con dimensiones fractales de células normales y con anormalidades citológicas de cuello uterino. *Ciencias de la Salud*, 4(2), 58-63. Descargado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56240205>
- Rodríguez, J., Soracipa, M., Ovalle, I., Castro, M., Senejoa, N., Quijano, B., ... Rozo, A. (2018). Geometría fractal aplicada para comparar los espacios ocupados por eritrocitos normales y esferocitos. *Archivos de Medicina*, 18(1), 12 - 23. doi: 10.30554/archmed.18.1.1835.2018
- Silva, P. (1996). Geometría fractal de la zona de falla de Lorca-Alhama (Murcia, SE España). *Geogaceta*, 20(6), 1385-1388. Descargado de <http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12883/Geometria-fractal.pdf?sequence=2>
- Spinadel, V. (2003). Geometría fractal y geometría euclidiana. *Educación y Pedagogía*, 15(35), 85-91. Descargado de <https://core.ac.uk/download/pdf/162042805.pdf>
- Szoke, I., y Holban, S. (2008). A short introduction in the history of fractals. *9th International Conference on Development and Application Systems, Suceava, Romania.*, 179-181. Descargado de <http://dasconference.ro/papers/2008/D11.pdf>
- Urgiles, B., Vaca, B., Tixi, K., Erazo, A., y Cardenas, M. (2020). Los fractales y su relación con la computación. una revisión documental. *Polo del Conocimiento*, 5(4), 209-225. doi: 10.23857/pc.v5i4.13731373
- Vartziotis, D., y Wipper, J. (2017). The fractal nature of an approximate prime counting function. *Fractal Fract*, 1(1), 10. doi: 10.3390/fractalfract1010010
- Xu, P., Liu, H., Pulung, A., Qiu, S., y Li, C. (2017). Effective permeability of fractured porous media with fractal dual-porosity model. *Fractals*, 25(4), 7. doi: 10.1142/s0218348x1740014x
- Zhang, L., Li, J., Jia, D., Zhao, Y., Xie, C., y Tao, Z. (2018). Study on the adsorption phenomenon in shale with the combination of molecular dynamic simulation and fractal analysis. *Fractals*, 26(2), 15. doi: 10.1142/s0218348x18400042
- Zhang, L., Li, J., Tang, H., y Guo, J. (2014). Fractal pore structure model and multilayer fractal adsorption in shale. *Fractals*, 22(3). doi: 10.1142/s0218348x14400106