matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2003, Vol. 1, No. 2 Publicado: 2003-10-30

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE ORDEN FRACCIONARIO A PARTIR DEL BINOMIO DE NEWTON

Bustamante Johnny

Resumen.. *En el presente trabajo se tratará de generalizar el orden de la derivada, específicamente derivadas de orden entre cero y uno. Esta generalización se la realizará con ayuda del binomio de Newton para potencias fraccionarias, para ello se necesitarán de algunas condiciones que deberán cumplir las funciones para que esta definición sea posible, creándose así la clase de funciones para las cuales esta definición es posible. Al final se realizará el cálculo de la derivada de orden fraccionario para la función e^x que por su naturaleza sabemos que será invariante a la derivación de cualquier orden.*

Palabras Claves.- Derivada, Binomio de Newton, Coeficientes de Newton, Límite, Continuidad de una Función, Función Acotada, Serie Convergente, Función Infinitesimal.

1. INTRODUCCIÓN

La derivación es una operación recurrente, así: si necesitamos calcular la quinta derivada, debemos previamente calcular la cuarta derivada y para obtener la cuarta derivada debemos tener ya calculada la tercera y así hasta llegar a la primera derivada. Surge la pregunta. ¿Se puede calcular la 5ta derivada sin necesidad de pasar por la primera derivada? es decir, ¿se puede definir la derivada de n-ésimo orden en forma directa? y más aun, ¿se puede generalizar la derivada de p-esimo orden donde p pueda ser un número fraccionario?.
Sucede que para cierta clase de funciones esto es posible.

2. LA DERIVADA Y SU GENERALIZACIÓN A P-ESIMO ORDEN FRACIONARIO Y LA CLASE DE FUNCIONES DONDE ESTA GENERALIZACIÓN ES POSIBLE

Clase de funciones donde se puede generalizar el concepto de p – ésima derivada.

La derivada de una función en el punto x

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$ luego

cambiamos h por –h, tenemos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)$$ por lo

tanto tenemos una forma final

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) \qquad (1)$$

Bustamante Romero Johnny, Matemático; Profesor del Instituto de Ciencias Matemáticas(ICM) de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: Johnybustamante@yahoo.com).

Luego calculamos la segunda derivada aplicando (1), tenemos.

$$f''(x)=\lim_{k\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(x-k)}{k}\right)$$

$$f''(x)=\lim_{k\to 0}\left(\frac{\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)-\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x-k)-f(x-k-h)}{h}\right)}{k}\right)$$

$$f''(x)=\lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x-h)-f(x-k)+f(x-k-h)}{hk}\right]\right).$$

Sea

$$\varphi(x,h,k)=\frac{f(x)-f(x-h)-f(x-k)+f(x-k-h)}{hk},$$

si esta función es continua en (x,0,0) por lo tanto se puede acercar a cero por cualquier dirección, en este caso la dirección h=k, por lo tanto tendremos:

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}\right] \qquad (2)$$

Nótese que si definimos la segunda derivada directamente con la forma (2) puede suceder que ésta exista para una función y no necesariamente existe la primera derivada (Demidovich[1], se presentan ejemplos donde se puede verificar lo antes dicho).
Efectuando este proceso podemos notar que la forma directa de calcular la derivada de orden n tiene la forma semejante al binomio de Newton de grado n

$$G_h^{(n)}(f)=f(x-nh)$$

Llamaremos $I_f = G_0(f)$ en otras palabras $I_f^{\alpha} = f(x)$ para cualquier alfa

$$D^n(f) = \underset{h \to 0}{Lim}\left(\frac{(I_f - G_f)^n}{h^n} \right)$$

por lo tanto la derivada de orden "n" queda expresada como el límite de un binomio de Newton.

Por esto estudiaremos brevemente los coeficientes de Newton

$$(1-x)^n = C_1^n + C_2^n x + C_3^n x^2 + ... = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^n x^m \quad (3)$$

donde los coeficientes tienen la siguiente forma:

$$C_0^n = 1$$
$$C_1^n = -C_0^n . n$$
$$C_2^n = -C_1^n \frac{n-1}{2}$$
$$C_3^n = -C_2^n \frac{n-2}{3}$$
....
$$C_m^n = -C_{m-1}^n \frac{n-(m-1)}{m}$$

El binomio de Newton siempre se puede expresar como una suma infinita. Sabemos que si el exponente del binomio es enter-+o entonces dicha suma es finita (n+1 sumandos) En efecto:

$$C_n^n = -C_{n-1}^n \frac{n-(n-1)}{n} = -C_{n-1}^n . \frac{1}{n}$$
$$C_{n+1}^n = -C_n^n \frac{n-(n)}{n+1} = 0 \qquad \text{por lo que:}$$
$$C_{n+2}^n = C_{n+3}^n = ... = 0$$

Entonces la serie (3) es una suma finita cuando n es entero

Empero, la fórmula del binomio de Newton (3) es propuesta y válida para cualquier exponente positivo incluso los fraccionarios. La observación que se realiza cuando el exponente es fraccionario es que los coeficientes no se anulan es decir en este caso se tiene una serie infinita.

Además, de (3) podemos ver que para x = 1 y n = p cualquier fraccionario, tenemos:

$$(1-1)^p = C_0^p + C_1^p x + C_2^p x^2 + ... = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p 1^m \quad (3.1)$$

concluimos $\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p = 0$

Por tanto podemos expresar la derivada de orden p (entero o fraccionario).

$$D^p(f) = \underset{h \to 0}{Lim}\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh)}{h^p} \right) \quad (4)$$

para h >0.

Para h <0 el análisis es muy similar cambiando h por –h, además por la clase en donde vamos a definir es la de las funciones continuas, por ende es indiferente la dirección de acercamiento, siempre el límite será el mismo por cualquier lado de acercamiento.

3. CONVERGENCIA DE (4)

Para analizar la convergencia de la expresión (4) debemos verificar tanto para la serie como el Límite.

Analizaremos para los valores de $0<p<1$, evidentemente para $p=0$ tendremos la misma función, y para $p=1$ tendremos la primera derivada de la función.

Por definición de continuidad de f en el punto x tenemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{tal que } \forall z, |z-x| < \delta,$$
$$\text{verificamos, } |f(x) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\text{si} \quad x\text{-}\delta < x\text{-}mh < x\text{+}\delta \quad (5)$$

Entonces, analizaremos la convergencia de la expresión (4) para valores en un intervalo alrededor del punto x, de esa apreciación podemos decir que:

$$-\delta < mh < \delta$$

por la continuidad tendremos que $|f(x-mh) - f(x)| < \varepsilon$ por lo tanto:

$$f(x) - \varepsilon < f(x-mh) < f(x) + \varepsilon$$

Además debemos definir las condiciones de las funciones para lo cual (4) será convergente o lo que es lo mismo, la clase de funciones en donde se encuentra definida la derivada de orden fraccionario.

Vamos a escoger las funciones tales que *f(x)* y *f'(x)* pertenezcan al conjunto $\Im(I)$

Donde:

$\Im(I) = \{f \,/\, f \text{ continua y acotada en } I\}$

Lema 1.- Si $f, f' \in \Im(I)$ entonces existe M tal que $|f(x) - f'(x)| < M \quad \forall\ x \in I$

Lema 2.- Si $f, f' \in \Im(I)$ entonces se cumple:

$$f(x-mh) = f(x)(1-h)^m + f(x)o(h) + mh(M+\tau) + o\left([mh]^2\right) \qquad (6)$$

Donde M es la constante del Lema 1 , τ es otra constante finita, además $o(z)$ es la función infinitesimal.

4. DEMOSTRACIÓN.

Demostremos la convergencia de (4) y que esta es posible para la clase de funciones de $\Im(I)$

Recordemos que la función infinitesimal cumple lo siguiente:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{o(z)}{z}\right) = 0 \qquad (7)$$

Por el teorema de valor medio de Lagrange tenemos:

$$\frac{f(x-mh)-f(x)}{-mh} = f'(x) + o(mh)$$

obviamente $mh < \delta$

$$f(x-mh) = f(x) - mhf'(x) + o\left([mh]^2\right)$$

$$f(x-mh) = f(x) - mhf(x) + mh\left[f(x) - f'(x)\right] + o\left([mh]^2\right)$$

del Lema 1 tenemos que existe un τ tal que, M es una constante para todo *x*, empero τ es una constante para cada *x*

$$f(x-mh) = f(x)(1-mh) + mh(M+\tau) + o([mh])^2$$

También conocemos que:

$$(1-mh) = (1-h)^m + o(h)$$

entonces,

$$f(x-mh) = f(x)\left[(1-h)^m + o(h)\right] + mh(M+\tau) + o\left([mh]^2\right)$$

por lo tanto

$$f(x-mh) = f(x)(1-h)^m + f(x)o(h) + mh(M+\tau) + o\left([mh]^2\right)$$

Consideremos ahora: $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p [f(x)(1-h)^m + f(x)o(h) + mh(M+\tau) + o\left([mh]^2\right)]$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh) =$$

$$f(x)\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p (1-h)^m + f(x)o(h)\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p + mh(M+\tau)\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p o\left([mh]^2\right)$$

usando la forma (3) y (3.1) tenemos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh) = f(x)\left[1-(1-h)\right]^p + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p o\left([mh]^2\right)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh) = f(x)h^p + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p o\left([mh]^2\right) \qquad (8)$$

Analizamos $\left(\dfrac{\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh)}{h^p}\right)$

$$\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh)}{h^p}\right) = f(x) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p o\left(m^3 h^{3-p}\right) \qquad (9)$$

Tomamos el Límite de (9) cuando h tiende a cero, tenemos:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p f(x-mh)}{h^p}\right),$$ este límite existe, por cuanto la serie de (9) es convergente

Como el lector se ha fijado el cálculo del límite (9) es complicado, mas aún realizarlo sin ayuda de las funciones infinitesimales, las mismas que nos permiten darnos cuenta que tan cerca una función se encuentra de otra. Sin embargo con el uso de un ordenador este calculo se lo realiza en forma muy sencilla, por cuanto, el cálculo de los coeficientes de Newton C_m^p se lo puede realizar en forma recurrente de igual forma el sumatorio y la función en los puntos cercanos a *x*. Se debe tener en cuenta que los cálculos se deben realizar para *(mh)* lo suficientemente pequeños, si *m* es muy grande entonces *h* se debe escoger mas pequeño que el inverso de *m*, lo cual siempre es factible.

Analíticamente realizar el calculo puede ser muy complicado, pero para la función e^x este calculo es muy sencillo, y el resultado es de esperar que sea la misma función, por cuanto la derivada de cualquier orden (entero) es siempre la misma, por ende esto se extiende de igual forma para cualquier orden fraccionario.

5. CALCULO DE LA DERIVADA p-ÉSIMA FRACCIONARIA DE $f(x)=e^x$

$$D^p f(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p e^{x-mh}}{h^p}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^x \sum_{m=0}^{\infty} C_m^p (e^{-h})^m}{h^p}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^x\left(1-e^{-h}\right)^p}{h^p}\right)$$

$$D^p(e^x) = \lim_{h\to 0}\left(e^x\left[\frac{1-e^{-h}}{h}\right]^p\right) = e^x$$

por lo tanto $D^p(e^x) = e^x \quad \forall p \in Q$

6. CONCLUSIONES

1.- Podemos generalizar la derivada de orden fraccionario sin perder el sentido de las derivadas de orden entero.

2.- Se analizó la derivada de orden fraccionario para p talque $0<p<1$, de forma análoga para las derivadas de orden p talque $1<p<2$, por la lineabilidad aditiva del operador derivada.

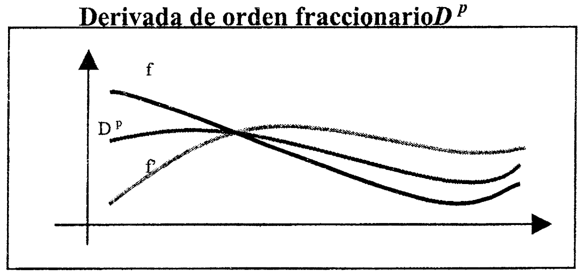
3.- Para poder demostrar la existencia y continuidad de las derivadas de orden fraccionario se necesita que existan las derivadas de orden entero inmediato superior e inmediato superior en nuestro caso la continuidad de f y f'.

4.- Por la condición de existencia de la derivada de orden fraccionario podemos darnos cuenta que la gráfica de la función derivada de orden fraccionario se encuentra entre las gráficas de las funciones derivadas de orden entero inmediatos superiores e inferiores. Ver la Figura 1. La operación derivada de orden fraccionario es una operación de promedio ponderado entre dos funciones. (esta conclusión no se demuestra en este artículo)

Figura 1

Definición de la derivada de orden fraccionario a partir del binomio de newton

Derivada de orden fraccionarioD^p



5.- También podemos darnos cuenta que $D^p(f) \underset{p\to 1}{\longrightarrow} D^1(f)$, estas conclusiones resultan de analizar el binomio de Newton $(1-x)^p \underset{p\to 1}{\longrightarrow} (1-x)^1$.

6.- Las aplicaciones y de más propiedades quedan a la creatividad y a la buena interpretación que el lector sepa darle a este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **DEMIDOVICH, B. P.** (1998). *"5000 Problemas de Análisis Matemático"*. Paraninfo ITP, séptima edición. Madrid – España.

2. **RUDIN W.** (1977). *"Principios de Análisis Matemático"*. McGraw – Hill, México

3. **NEWMAN JAMES, R.** (1997). *"Sigma, El Mundo de las Matemáticas"*, Grijalbo Mondadori, S.A. España