matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2003, Vol. 2, No. 1 Publicado: 2003-04-30

MODELOS ARCH Y GARCH Y SU APLICACIÓN EN LA ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD

Sandoya Fernando[1]

Resumen. *El estadístico Robert F. Engle fue uno de los ganadores del Premio Nobel de Economía 2003, por sus estudios sobre métodos estadísticos en series temporales económicas. Engle tuvo como mérito el descubrimiento del concepto de la 'Heteroscedasticidad Autoregresiva Condicional (ARCH)', que permite modelar estadisticamente la volatilidad de numerosas series temporales. En este trabajo se hace una revisión de la literatura respecto a estos modelos y a su generalización: los modelos GARCH, se realiza una aplicación a la estimación de la volatilidad de los precios del quintal de café en el mercado ecuatoriano.*

Palabras Claves: Series de Tiempo, Econometría, procesos estocásticos, modelos GARCH.

1. INTRODUCCIÓN

Como se sabe de la teoría general de series de tiempo, un modelo auto regresivo de orden p (denotado con AR(p)) para una variable y_t tiene la siguiente forma:

$$y_t = c+\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\phi_3 y_{t-3}+\dots+\phi_p y_{t-p}+\mu_t \qquad (1)$$

donde se dice que μ_t es un ruido blanco, con características:

$$E(\mu_t)=0 \qquad (2)$$

$$E(\mu_t\mu_{t-s})=\begin{cases}\sigma^2, & t=T\\ 0, & \text{sino}\end{cases} \qquad (3)$$

Y este proceso es estacionario si las raíces de la ecuación

$$1-\phi_1 Z-\phi_2 Z^2-\dots-\phi_p Z^P=0$$

están fuera del círculo unitario.

Ahora bien, el pronóstico lineal óptimo del nivel de y_t para el proceso es:

$$\hat{E}(y_t/y_{t-1},y_{t-2},\dots)=c+\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\dots+\phi_p y_{t-p} \qquad (4)$$

donde $\hat{E}(y_t/y_{t-1},y_{t-2},\dots)$ denota la proyección lineal de y_t sobre $(y_{t-1},y_{t-2},\dots)$. Mientras que la media condicional de y_t cambia a través del tiempo, la media incondicional de y_t es constante:

$$E(y_t)=\frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\phi_3-\dots\phi_p}$$

2. MODELOS ARCH (m)

Aunque (3) implica que la variación incondicional de μ_t es la varianza constante del ruido blanco σ^2, en la práctica la varianza de μ_t puede cambiar a través del tiempo.

Podemos enfocar esto describiendo el cuadrado de los errores μ_t como un proceso AR(m)

$$\mu_t^2=\zeta+\alpha_1\mu_{t-1}^2+\alpha_2\mu_{t-2}^2+\dots+\alpha_m\mu_{t-m}^2+w_t \qquad (5)$$

Donde w_t es un nuevo proceso ruido blanco con media cero, varianza λ^2 y $E(w_t w_{t-s})=0$ para $t\neq s$

Como μ_t es el error en la predicción de y_t, la expresión [5] implica que la proyección lineal de los cuadrados de los errores de y_t, sobre los anteriores m errores de previsión cuadrados se dan por:

$$\hat{E}(\mu_t^2/\mu_{t-1}^2,\mu_{t-2}^2,\dots)=\zeta+\alpha_1\mu_{t-1}^2+\alpha_2\mu_{t-2}^2+\dots+\alpha_m\mu_{t-m}^2 \qquad (6)$$

Al proceso de ruido blanco que satisfaga (5), se lo describe como un proceso heterocedástico autoregresivo condicional[1] de orden m, y se denota por: $\mu_t \sim$ARCH(m).

Debido a que el componente μ_t es aleatorio y sus cuadrados no pueden ser negativos, estos pueden ser una representación significativa solo si la proyección lineal de los cuadrados de los errores de y_t, sobre los m errores de previsión cuadrados [6], es positiva y la regresión de los μ_t^2 sobre sus retardos [5], es no negativa para toda realización del proceso $\{\mu_t\}$. Esto puede asegurarse si w_t se acota a la izquierda por $-\zeta$ con $\zeta>0$, y si $\alpha_j\geq 0$, para j = 1,2,...,m. Para que μ_t^2 sea estacionario en covarianza, se requiere otra condición además de que las raíces de

$$1-\alpha_1 Z-\alpha_2 Z^2-\alpha_3 Z^3-\dots-\alpha_m Z^m=0$$

caigan fuera del círculo unitario. Si los coeficientes α_j son todos no negativos, esto es equivalente al requerimiento que:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_m<1 \qquad (7)$$

Cuando estas condiciones son satisfechas, la varianza incondicional de μ_t está dada por:

$$\sigma^2=E(\mu_t^2)=\zeta/(1-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_m) \qquad (8)$$

---

[1] *Fernando Sandoya Sánchez,* Matemático.*Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: fsandoya@espol.edu.ec)*

1 Esta clase de procesos fue introducida por R. Engle en 1982 lo que le valió la obtención del Premio Nobel de Economía de 2003.

Muchas veces es conveniente usar una representación alternativa para los procesos ARCH(m) que impone hipótesis un poco más fuertes sobre la dependencia de serie de μ_t , de la siguiente manera:
Supongamos que:

$$\mu_t = \sqrt{h_t}\, v_t \qquad (9)$$

donde $\{v_t\}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. con media cero y varianza 1, y si h evoluciona según

$$h_t = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \qquad (10)$$

Entonces [9] implica que:

$$E(\mu_t^2 / \mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \dots) = \zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \qquad (11)$$

Así, si μ_t se genera por [9] y [10], entonces μ_t sigue un proceso ARCH(m) en el cual la proyección lineal de los errores al cuadrado [6] es además la esperanza condicional.

Además, cuando [9] y [10] son sustituidas en la regresión de los cuadrados de μ_t sobre sus retardos y [5], el resultado es:

$$h_t v_t^2 = h_t + w_t$$

Bajo la especificación dada en [9], la innovación w_t en la representación del modelo AR(m) para μ_t^2 en [5] puede ser expresada como:

$$w_t = h_t (v_t^2 - 1) \qquad (12)$$

Observemos de [12] que mientras que la varianza incondicional de w_t es asumida como constante:

$$E(w_t^2) = \lambda^2 \qquad (13)$$

la varianza condicional cambia a través del tiempo.

La varianza incondicional de w_t refleja el cuarto momento de μ_t, y este cuarto momento no existe para todos los modelos estacionarios ARCH. Si elevamos al cuadrado [12] y calculamos la esperanza incondicional en ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$E(w_t^2) = E(h_t^2) * E(v_t^2 - 1)^2 \qquad (14)$$

Tomando el modelo ARCH(1), por ejemplo, podemos encontrar con una pequeña manipulación de fórmulas para la media y varianza de un proceso AR(1) que:

$$E(h_t^2) = E(\zeta + \alpha_1 \mu_{t-1}^2)^2 = E\{(\alpha_1^2 v_{t-1}^4) + (2\zeta \alpha_1 \mu_{t-1}^2) + \zeta^2\}$$

$$= \alpha_1^2 \left[Var(\mu_{t-1}^2) + \left[E(\mu_{t-1}^2) \right]^2 \right] + 2\zeta \alpha_1 E(\mu_{t-1}^2) + \zeta^2 \qquad (15)$$

$$= \alpha_1^2 \left[\frac{\lambda^2}{1-\alpha_1^2} + \frac{\zeta^2}{(1-\alpha_1)^2} \right] + \frac{2\zeta^2 \alpha_1}{1-\alpha_1} + \zeta^2$$

$$= \frac{\alpha_1^2 \lambda^2}{1-\alpha_1^2} + \frac{\zeta^2}{(1-\alpha_1)^2}$$

Sustituyendo [15] y [13] en [14], se concluye que λ^2 (la varianza incondicional de w_t) satisface

$$\lambda^2 = \left[\frac{\alpha_1^2 \lambda^2}{1-\alpha_1^2} + \frac{\zeta^2}{(1-\alpha_1)^2} \right] E(v_t^2 - 1)^2 \qquad (16)$$

Vale observar de esta última ecuación que aún cuando se tenga $|\alpha_1| < 1$, la ecuación [16] podría no tener solución real para λ; por ejemplo, si tenemos $v_t \sim N(0,1)$, entonces $E(v_t^2 - 1)^2 = 2$ y de [16] se requiere que

$$\frac{(1-3\alpha_1^2)\lambda^2}{1-\alpha_1^2} = \frac{2\zeta^2}{(1-\alpha_1)^2}$$

Esta ecuación no tiene solución real para λ cuando $\alpha_1^2 \geq 1/3$. Así, si $\mu_t \sim$ ARCH(1), con la innovación v_t en [9] siguiendo una distribución gaussiana, entonces el segundo momento de w_t (o el cuarto momento de μ_t) no existe a menos que $\alpha_1^2 < 1/3$.

3. MODELOS GARCH

Es ampliamente reconocido el hecho de que las series de tipos de interés presentan una fuerte heterocedasticidad condicional en la varianza, los modelos GARCH [2] son capaces de capturar la heterocedasticidad, al recoger el efecto agrupamiento y la alta persistencia, propios de las series financieras. Estos modelos especifican la varianza condicional en función de su propio pasado y del impacto de las innovaciones pasadas. Cuanto mayor son las innovaciones al cuadrado del periodo anterior, mayor es la volatilidad condicional del periodo actual, recogiendo así el efecto agrupamiento [3].

---

[2] El modelo GARCH (p,q) fue presentado por Bollerslev (1986) como una generalización del modelo de Engel (1982) y aplicado a series de tipos de interés por Engle, Lilien y Robbins (1987); Engle, Ng y Rothschild (1990); y Engle y Ng (1993)

[3] *Las predicciones de volatilidad a largo plazo no tienen que verse afectadas por este efecto agrupamiento, sin embargo, las predicciones a corto deben reflejar la situación actual del mercado, por lo tanto únicamente el pasado más reciente debe ser utilizado.*

Puesto que para todos los modelos mantenemos la misma especificación para la media condicional, la diferencia vendrá dada por la especificación para la ecuación de la volatilidad condicional.

La construcción de los modelos GARCH puede verse como sigue: las ecuaciones [9] y [10] describen un proceso ARCH(m), pero mas generalmente, podemos pensar en un proceso para el cual la varianza condicional depende de un infinito numero de retardos de μ_{t-j}^2,

$$h_t = \zeta + \Pi(L)\,\mu_t^2 \qquad (13)$$

Donde

$$\Pi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j L^j$$

Una idea natural es parametrizar $\Pi(L)$ como el ratio de dos polinomios de orden finito.

$$\Pi(L) = \frac{\alpha(L)}{1-\delta(L)} = \frac{\alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_m L^m}{1-\delta_1 L^1 + \delta_2 L^2 + \dots + \delta_r L^r}$$

[14]

Se asume que las raíces de la ecuación 1- δ(z) = 0 están fuera del circulo unitario. Si (14) es multiplicada por 1 - δ(L), el resultado es:

$$[1-\delta(L)]h_t = [1-\delta(L)]\zeta + \alpha(L)\,\mu_t^2$$

o

$$h_t = k + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \dots$$
$$\dots + \delta_r h_{t-r} + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \mu_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \mu_{t-m}^2 \qquad (15)$$

para $k = [1 - \delta_1 - \delta_2 - \dots - \delta_r]\zeta$. La expresión (15) es lo que se denomina un modelo auto regresivo heterocedástico condicional generalizado y se denota con: $\mu_t \sim GARCH(r,m)$

EXTENSIONES:

El modelo GARCH tiene la consideración de simétrico, es decir, el efecto sobre la varianza de las innovaciones es independiente del signo de éstas. Sin embargo, la evidencia parece mostrar que las innovaciones positivas en los cambios de los tipos de interés (negativas en precios de bonos y rendimientos) tienen mayor impacto en la volatilidad que las innovaciones negativas de la misma magnitud. Esta respuesta asimétrica de la volatilidad se conoce también como efecto apalancamiento, y para recogerlo han surgido los modelos asimétricos, que en realidad son generalizaciones del modelo GARCH simétrico.

Algunos modelos GARCH asimétricos, utilizados, y la especificación del componente predecible de la volatilidad, la varianza condicional, para cada uno de ellos es la siguiente:

AGARCH (Asymmetric GARCH model), propuesto por Engle (1990)

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \theta)^2$$

NAGARCH (Nonlinear Asymmetric GARCH model), propuesto por Engle y Ng (1993)

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \theta\sqrt{h_{t-1}})^2$$

EGARCH. (Exponential GARCH model), propuesto por Nelson (1991)

$$\ln h_t = \omega + \beta \ln h_{t-1} + \alpha\left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \theta\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}}$$

GJR-GARCH. (Threshold GARCH model), propuesto por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993)

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^{+}\varepsilon_{t-1}^2$$

con $D_{t-1}^{+}=1$ si $\varepsilon_{t-1} > 0$; $D_{t-1}^{+} = 0$ en caso contrario.

APLICACIÓN:

Se obtuvo una estimación de la volatilidad mediante datos históricos para el precio del quintal de café variedad arábiga.

VOLATILIDAD: La volatilidad denotada por σ simboliza la medida de nuestra incertidumbre sobre los movimientos futuros de los precios. A menudo se expresa de manera porcentual, por ejemplo una volatilidad del 22% no indica que $\sigma = 0.22$.

Para la estimación de la volatilidad se recomienda usar un registro donde se establezcan los movimientos del precio de las acciones durante cierto lapso de tiempo. Es usual observar los precios de las acciones en un intervalo fijo, ya sea diario, semanal o mensual. En este caso se usó un registro semanal de los precios del quintal de café en el mercado ecuatoriano en el año 2001

Se definen tos siguientes parámetros:

n: número de observaciones.

S_t: precio al final del periodo i, (i = 0,1,2,...,n).

T: duración del intervalo de tiempo en años.

Para el cálculo de una estimación S de la volatilidad σ utilizamos las siguientes notaciones:

$$\mu_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Ahora, la desviación estándar de μ se expresa como:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \bar{\mu})^2}$$

Que se puede expresar también como:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_i)\right)^2}$$

Los resultados para la estimación de la volatilidad del precio del quintal de café en el año 2001[4] fueron los siguientes:

$$\sum_{i=1}^{51} u_i = -0.3711 \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^{51} u_i^2 = 0.1112$$

La estimación de la desviación estándar de la rentabilidad semanal es:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n-1} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}{n(n-1)}} = 0.0465$$

Como los precios estaban medidos por semanas, asumiendo que 52 semanas tiene un año, entonces la volatilidad estimada por año es de:

$$0.0465\sqrt{52} = 0.3359 = 33.59\%$$

Es decir el 33.59% anual.
El error estándar de esta estimación es:

$$\frac{S}{\sqrt{2n}} = \frac{0.0465}{\sqrt{2*51}} = 0.0046$$

Es decir el 0.46% anual.

Así, se obtuvo una estimación de la volatilidad mediante datos históricos para el precio del quintal de café variedad arábiga que fue del 33.59% para el año 2001, mientras que para el año 2002 se obtuvo una estimación de 49.14 %
Ahora, se utilizan los modelos GARCH para explicar las maneras en que los datos históricos pueden ser usados para producir estimaciones de diferentes niveles de volatilidad y correlación Como aplicación en el presente trabajo se modela el comportamiento de las volatilidades del cambio porcentual de los precios del quintal de café en el mercado ecuatoriano. Los datos procesados corresponden a los precios promedio semanales del quintal de café en el mercado interno. Para poder estimar los parámetros del modelo GARCH se utilizó EVIEWS. En particular esta estimación de la volatilidad es importante a la hora de determinar precios sobre opciones y futuros debido a que la volatilidad es una media de la incertidumbre de los precios, así si un activo subyacente tiene una gran volatilidad, el comprador de una opción puede tener que pagar más por ella que por una opción sobre unas acciones con baja volatilidad.

TABLA I
Modelos Arch y Garch y su aplicación en la estimación de la volatilidad
PARAMETROS ESTIMADOS

PARAMETROS	ESTIMACION
ω	0,201417
α	0,323227
β	0,227977

Por lo que el modelo queda de la siguiente manera:

$$\sigma_n^2 = 0.201417 + 0.323227\mu_{n-1}^2 + 0.227977\sigma_{n-1}^2$$

Ahora para realizar las predicciones referentes al próximo periodo, reemplazamos los valores correspondientes al periodo anterior, por ejemplo, para el precio del quintal de café en el año 2002 tenemos n=52, por lo que tenemos que reemplazar la ecuación anterior correspondientes al término n–1 =51.

$$\sigma_n^2 = 0.201417 + 0.323227(0.140685)^2 + 0.227977(0.007511)$$

$$\sigma_n^2 = 0.2095$$

4. CONCLUSIONES

1. Los modelos ARCH y GARCH, últimamente han adquirido un gran auge e importancia como los instrumentos adecuados para especificar y estimar modelos de volatilidad estocástica. Los modelos vinculados con el precio de activos en mercados financieros relacionan la prima de riesgo por la variación de los precios con el retorno esperado y con la varianza del retorno. En otras palabras si se usa la varianza como medida del riesgo, cualquier cuestión referente debe ser probada usando la varianza condicional. El otorgamiento del premio Nobel a Engle por el desarrollo de estos modelos seguramente originará mayor interés en su aplicabilidad.

2. Existe gran flexibilidad de los modelos GARCH para adaptar un modelo específico de acuerdo a cada problema particular que se está tratando, esto es muy importante en series de tipo económico pues no hay necesidad de asumir hipótesis “irreales”.

[4]Precios proporcionados por el Ministerio de Agricultura y ganadería (MAG)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. **BANCO CENTRAL DEL ECUADOR.** (2002) *"El Café, Nuestro Frente Al Nuevo Milenio".*

2. **MITCHELL, HEATHER.** (Agosto 2002). *"Generalized Asymmetric Power Arch Modelling Of Exchange Rate Volatility".* Applied Financial Economics, Vol. 12 Issue 8.

3. **LAURENT, SÉBASTIEN; PETERS, JEAN-PHILIPPE.** (Julio 2002) . *"G@Rch 2.2: An Ox Package For Estimating And Forecasting Various Arch Models".* Journal Of Economic Surveys, , Vol. 16 Issue 3, P447.

4. **JOHN HULL.** (2000). *"Options, Futures & Other Derivates".* Prentice Hall 4th Edition.

5. **GOURIERUX C.** (1997). *"Arch Models And Financial Applications".* Springer.