# INTRODUCCIÓN A LAS SERIES DE TIEMPO FRACTALES

**Ramírez John**[1]

**Resumen.** *Se presenta una descripción sucinta de los fractales determinísticos y aleatorios, así como del concepto de dimensión fractal. Se explica el punto de vista de la teoría fractal de las series de tiempo y mediante un ejemplo se explica porque la utilización de la desviación estándar resulta un instrumento poco eficaz para valorar el riesgo financiero.*

**Palabras Claves:** fractal, dimensión, caos, series de tiempo, retornos financieros.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los fractales han tenido un gran impacto en el análisis estadístico, que no es suficientemente apreciado. La naturaleza no es una serie de patrones repetitivos, está caracterizada por aleatoriedad local y orden global. Cada ser vivo es diferente en detalle pero similar en concepto de otro de su misma especie. Los fractales en la naturaleza están gobernados por una estructura estadística global, mientras que mantienen una aleatoriedad local. Para el análisis económico y financiero estas ideas pueden tener un efecto profundo. Los fractales han cambiado la forma en que mirábamos al mercado, a la economía y también a la naturaleza.

## 1. TEORÍA FRACTAL

El descubrimiento de los fractales ha sido uno de los mayores legados del siglo pasado. Con los fractales, los matemáticos han creado un sistema que describe las formas del mundo natural en función de unas pocas reglas. La complejidad emerge de esta simplicidad. Los fractales dan estructura a la complejidad y belleza al caos. Los sistemas dinámicos no lineales crean fractales. Las formas naturales y las series de tiempo, son mejor descritas por los fractales. Puesto que la naturaleza es no lineal, los fractales al describir la geometría del caos, son los indicados para indagar en sus secretos.

La geometría euclídea reduce la naturaleza a objetos puros y simétricos: el punto, la línea, el plano, el sólido. Los sólidos tienen un número de formas simétricas puras, como esferas, conos, cilindros y prismas. Ninguno de los cuales tiene agujeros ni es rugoso. Cada forma es lisa y pura. En realidad la naturaleza aborrece la simetría tal como aborrece el equilibrio, los objetos naturales no son versiones arrugadas de las formas euclídeas.

La falla de la geometría euclídea en describir los objetos naturales se puede ejemplificar con la siguiente propiedad. En geometría euclídea, mientras más cercanos estemos de un objeto, este es más simple. Al acercarnos a un bloque tridimensional, este se convierte en un plano y éste se convierte en una línea, hasta que finalmente se transforma en un punto. En cambio, un objeto natural, muestra mayor detalle mientras más cercano estemos a el. Los fractales tienen esta propiedad.

¿Qué es un fractal? Matemáticamente es un punto fijo de una aplicación contractiva en el espacio de los compactos de $\mathbb{R}^n$. De manera informal, un fractal es un objeto autosimilar y autoreferencial. Un fractal natural que podemos ubicar fácilmente es una hoja de helecho. La misma que se ramifica de acuerdo a una escala fractal. Cada subrama es similar a la hoja entera, en sentido cualitativo.

Las formas fractales son auto similares con respecto al espacio. Las series de tiempo fractales tienen auto similaridad estadística con respecto al tiempo. Las series de tiempo son fractales aleatorios, los cuales tienen más semejanza con los objetos naturales que con los fractales de la matemática pura. Para ejemplificar la auto similaridad en una serie temporal, podemos recurrir al siguiente ejemplo. En la figura 1.1 tenemos tres gráficos de 20 retornos tomados del índice S&P 500 en forma diaria, semanal y mensual, los gráficos no tienen escala.

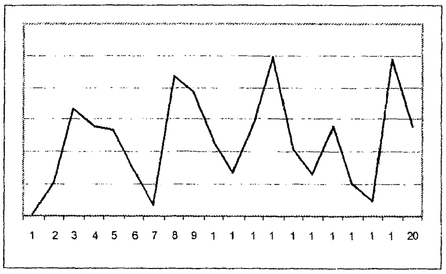
[1] *John Ramírez Figueroa, Mat. Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL);(e-mail:jramirez@goliat.espol.edu.ec)*

**Figura 1.1**

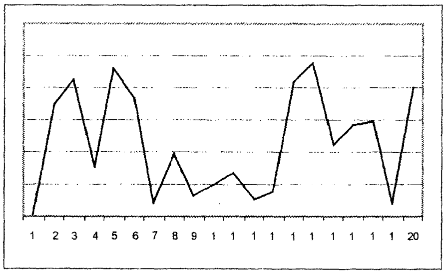
*Introducción a las series de tiempo fractales*

**Gráficos de 20 retornos tomados del índice S&P 500 en forma :**

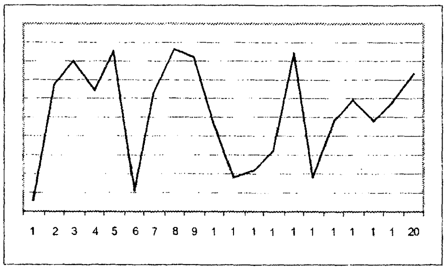
**Diaria**




**Semanal**




**Mensual**



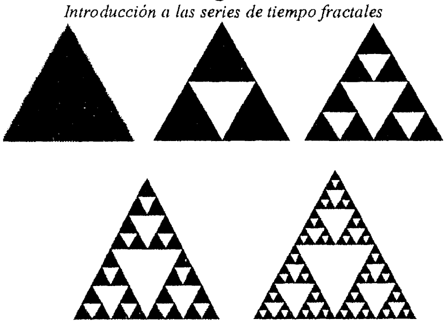

Sin las escalas correspondientes, determinar cual de los gráficos corresponde a los índices diarios, por ejemplo, es una tarea difícil por no decir imposible, ya que todos los gráficos presentan la misma variabilidad. Esto es lo que se denomina auto similaridad: a diferente escala los objetos tienen el mismo parecido.

## 1.1. Fractales Determinísticos

Las formas fractales pueden ser generadas de muchas maneras. La más simple consiste en tomar una regla generadora e iterarla una y otra vez. La figura 1.2 muestra el denominado triángulo de Sierpinsky, que se lo puede construir pintando de blanco el triángulo equilátero interno de cada triángulo, una y otra vez indefinidamente.

**Figura 1.2**

*Introducción a las series de tiempo fractales*



Tenemos una figura de complejidad infinita generada por una simple regla en un espacio finito.

La dimensión del triángulo de Sierpinsky es diferente de 1, puesto que no es una línea, ni 2 puesto que no es un triángulo sólido. Su dimensión es 1.58. Esta no una dimensión en el sentido euclídeo sino en el sentido fractal. Lo correcto sería decir su dimensión fractal es 1.58.

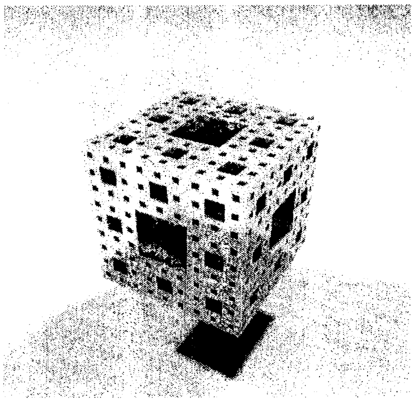
Consideremos la serie de tiempo de los precios de stocks, la cual aparece como una línea quebrada. Esta línea no tiene dimensión 1, pues no es una línea recta, ni tampoco dimensión 2, puesto que no llena un plano. Dimensionalmente hablando, es más que una línea pero menos que un plano. En cuanto a los mercados de capital, por ejemplo, la dimensión del índice S&P 500 es 1.24.

También tenemos fractales en $\mathbb{R}^3$, como el cubo o esponja de Sierpinsky:

**Figura 1.3**

*Introducción a las series de tiempo fractales*

**Esponja de Sierpinsky**



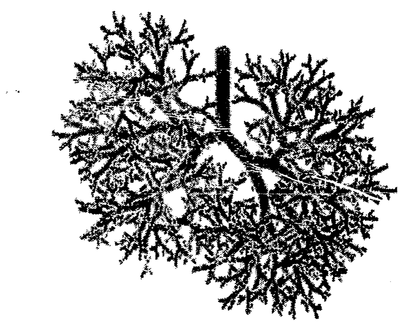
Tanto el triángulo y cubo de Sierpinsky son fractales simétricos. Además, por ser generados por reglas determinísticas también se los conoce como fractales determinísticos. Los fractales aleatorios son más parecidos a los objetos naturales.

## 1.2. Fractales Aleatorios.

Las líneas costeras o los perfiles montañosos son buenos ejemplos de fractales aleatorios. Desde un avión podemos apreciar que la línea costera luce como una línea suave e irregular, a más baja altura la costanera aparece como una línea dentada, y a una distancia todavía más cercana incluso se puede distinguir la sinuosidades de las rocas que conforman la costa. Los precios de stocks son comparables a la costanera, a pequeños incrementos de tiempo, más detalle se puede apreciar.

Los fractales aleatorios son combinaciones de reglas generadoras escogidas al azar a diferentes escalas. Otro ejemplo es la estructura del pulmón. El cual tiene un tronco principal llamado tráquea, la cual tiene dos ramificaciones primarias, las cuales tienen, a su vez, más ramificaciones (branquias) y así sucesivamente, como se aprecia en la figura 1.4:

**Figura 1.4**
*Introducción a las series de tiempo fractales*
**Ejemplo de fractal aleatorio**



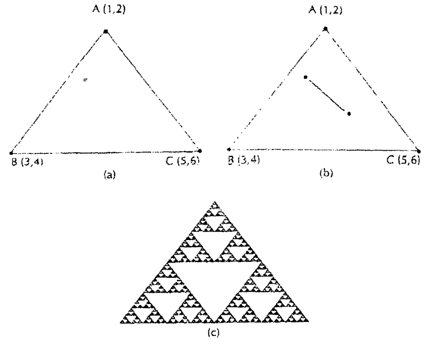
El diámetro de las branquias decrece de acuerdo a una ley exponencial, en promedio. El pulmón no es una fractal simétrico como el triángulo de Sierpinsky.

## 1.3 El Juego del Caos

Michael Barnsley desarrolló los sistemas iterados funcionales para generar formas fractales. El método de Barsnley consiste en iterar una regla determinística mediante un procedimiento aleatorio. A este método se lo conoce como algoritmo de iteración aleatoria o juego del caos.

Un ejemplo de este método se muestra en la figura 1.5[1]. Se comienza con tres puntos equidistantes uno del otro, marcados como A=(1,2), B=(3,4) y C=(5,6).

**Figura 1.5**
*Introducción a las series de tiempo fractales*
**El juego del Caos**




Escogemos, al azar, un punto dentro del triángulo ABC. Se lanza un dado y marcamos un punto en la mitad del camino entre el punto inicial y el seleccionado por el dado. Por ejemplo, si salió 5 (o 6) al lanzar el dado el vértice elegido es C=(5,6). Continuamos con este procedimiento, digamos unas diez o veinte mil veces y obtenemos el triángulo de Sierpinsky.

La elección de otro punto inicial no cambia el resultado final, que siempre será el triángulo de Sierpinsky.

Analicemos como funciona el juego del caos:

La información llega de forma aleatoria (el lanzamiento del dado). El sistema no tiene idea de adonde va a ir en el siguiente lanzamiento. La predicción de la próxima posición del punto es imposible. Una vez que el sistema recibe la información (el número elegido al lanzar el dado), ésta es procesada de acuerdo a una regla determinística. El resultado cae dentro de un rango limitado (el triángulo ABC), pero el número de posibilidades es infinito (todos los puntos del triángulo ABC). La estructura (infinitas posibilidades dentro de un rango finito) se denomina atractor, conjunto límite o fractal.

Notemos que el atractor (en este caso el triángulo de Sierpinsky) no es aleatorio, siempre será el mismo, independientemente del punto de inicio, pero hay infinitas formas (o soluciones) de llegar a este atractor, simplemente variando el punto inicial

Cada punto depende de los puntos dibujados anteriormente, en base a un sistema aleatorio (lanzamiento del dado).

Esta combinación de eventos aleatorios y dependencia, caracteriza a las series de tiempo fractales.

Hemos visto que existen dos tipos de fractales, los aleatorios y los determinísticos, éstos últimos son simétricos. Los fractales aleatorios no necesariamente tienen subpartes que reproduzcan al todo, aunque cualitativamente hablando serán parecidas. Las series de tiempo, como veremos más adelante, son cualitativamente auto similares. A diferentes escalas, tienen características estadísticas similares y su dimensión fractal está comprendida

[1] Figura tomada de "Fractal Market Analysis" por Edgar Peters

entre 1 y 2, siendo este último valor la dimensión de una serie completamente aleatoria, como por ejemplo, una serie de números generados por la distribución uniforme, la normal, la exponencial, etc. ¿Qué significa que una serie tenga una dimensión fractal de 2?

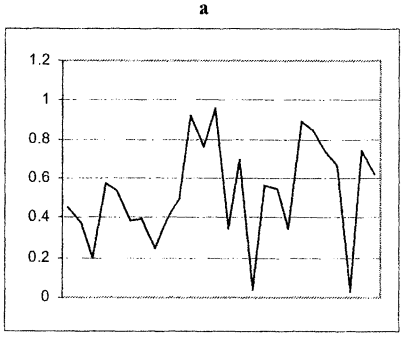
Cuando graficamos una serie de datos, por ejemplo, números aleatorios uniformes en el intervalo [0.1] (que los generan todas las computadoras), obtenemos un línea quebrada, como en la en la figura 1.6 a, en la cual se han graficado valores uniformes generados uno cada tres días. El la figura 1.6 b en cambio, valores generados pasando un día, en la figura 1.6 c tenemos valores diarios y en la figura 1.6 d, valores tomados cada 6 horas.

**Figura 1.6**

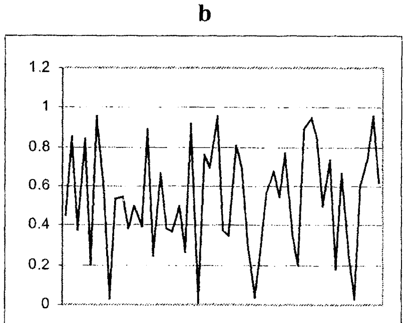
*Introducción a las series de tiempo fractales*

**Números aleatorios uniformes en el intervalo [0.1]**

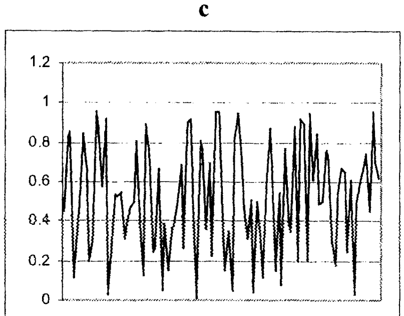
**a**



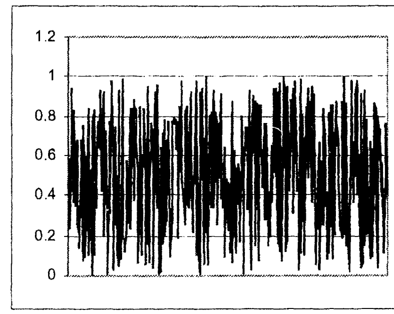

**b**




**c**




**d**




Si seguimos con este proceso, de disminuir el intervalo de tiempo entre cada observación, veremos que la serie llena un espacio bidimensional.

## 2. DIMENSIÓN FRACTAL

La dimensión fractal describe como un objeto (una nube, un árbol o una serie de tiempo por ejemplo) llena el espacio en la cual está contenido, es el resultado de todos los factores que influyen en el sistema y que producen dicho objeto.

Si una piedra es bombardeada aleatoriamente por todos sus lados con chorros de agua de igual intensidad, después de algunos años nos encontraremos que tiene una forma esférica. Cada parte de la piedra ha experimentado igual erosión. El número de chorros de agua (o grados de libertad) tiende a ser infinito. Por otro lado, si sólo hay un pequeño número de chorros erosionando la piedra, digamos unos tres, y cada uno con diferente intensidad, la piedra probablemente no alcanzará la forma esférica.

La roca erosionada por un gran número de chorros de agua, aleatoriamente repartidos, será lisa simétrica y esférica. La roca bombardeada por pocos y desiguales chorros de agua lucirá rugosa y asimétrica.

Una serie de tiempo es completamente aleatoria cuando es producto de una gran número de factores que tienen igual probabilidad de ocurrir. En términos estadísticos, cuando tiene un gran número de grados de libertad. Una serie de tiempo no aleatoria reflejará la naturaleza no aleatoria de los factores que la originaron. Los datos podrían formar agrupaciones, reflejar correlaciones inherentes a estos factores. Es decir la serie de tiempo sería fractal.

Cuando un objeto tiene dimensión entre dos y tres, tendemos a imaginarlos como de tres dimensiones, como a las nubes o a las montañas. Igual consideramos que las líneas costeras tienen dimensión uno, cuando en realidad su dimensión es mayor. Lo mismo ocurre con las series de tiempo. Las series de tiempo completamente aleatorias tiene dimensión dos, caso contrario su dimensión será menor a dos.

Una de las características de los objetos fractales es la de mantener su dimensión cuando se sumergen en espacios de dimensiones mayores. Las distribuciones aleatorias (ruido blanco) no tienen esta característica. El ruido blanco llena su espacio al igual que un gas llena un volumen. Si cierta cantidad de gas es colocada dentro de un contenedor con un gran volumen, el gas se expandirá hasta ocupar todo el volumen disponible. En cambio en un sólido las moléculas permanecen fuertemente unidas entre sí. En forma similar, la correlación mantiene a los puntos juntos en una serie fractal, mientras que en el ruido blanco al no existir correlación con los puntos anteriores, nada liga a los puntos a mantenerse en determinada vecindad. De hecho llenarán todo el espacio continente.

Como se dijo, la dimensión fractal está determinada por la forma en que un objeto llena el espacio que lo contiene. Para determinarla, se debería medir la manera como los elementos del objeto se agrupan en el espacio.

Existen muchas formas de calcular la dimensión fractal, todas ellas miden como el objeto varía su escala al incrementar su volumen (o área).

Las líneas costeras son un buen ejemplo, Especialmente porque tienen una gran similitud con las series de tiempo. Mandelbrot dijo que es imposible medir en forma exacta la longitud de una línea costera, puesto que esta medida depende de la regla (medida) que se utilice.

Supongamos, por ejemplo, que deseamos medir la línea costera del país. Comenzamos a medir en el punto de la frontera norte, utilizando una regla de 1 metro, hasta el punto de la frontera sur. Obtenemos una medida. Realizamos el mismo procedimiento con una regla de 50 cm, por lo que se capturará mayor detalle y por ende la medida es más precisa, que será mayor a la obtenida con la regla de 1 metro. Es decir, la longitud total depende de la longitud de la regla utilizada. A menor longitud de la regla, mayor longitud de la costanera.

Como vemos la longitud no es una buena forma de comparar dos líneas costeras. Mandelbrot propone utilizar la dimensión fractal para compararlas. Las líneas costeras son dentadas, su dimensión es mayor a uno (la dimensión euclídea), mientras más quebradas sean su dimensión fractal será más próxima a dos.

La dimensión fractal se calcula midiendo su grado de irregularidad. Se cuenta el número de círculos, con diámetro determinado, necesarios para recubrir la línea costera. Incrementamos el diámetro de estos círculos y de nuevo los contamos. Si continuamos con este proceso, nos daremos cuenta que existe una relación de tipo exponencial entre el radio y el número de círculos:

$$N(2r)^D = 1 \qquad (2.1)$$

donde:

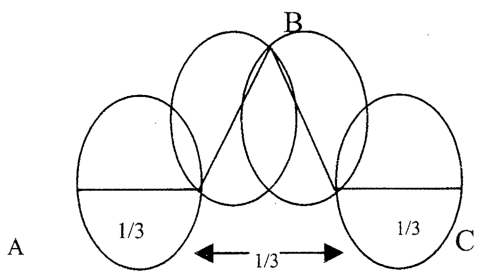
$N$ es el número de círculos
$r$ es el radio
$D$ la dimensión fractal

Esta ecuación se puede transformar en:

$$D = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{2r})} \qquad (2.2)$$

Como ejemplo vamos a usar el copo de nieve de Koch. La longitud del segmento AC es de una unidad. El diámetro de cada círculo es 1/3.

**Figura 2.1**
Introducción a las series de tiempo fractales
**COPO DE NIEVE DE KOCH.**




La dimensión fractal es:

$$D = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = 1.2618 \qquad (2.3)$$

Como ejemplo tenemos la dimensión fractal de las siguientes costas:
Costa de Noruega = 1.52
Costa de Bretaña = 1.30

Esto significa que la costa noruega es más quebrada que la de Bretaña. De igual forma se pueden comparar dos series de tiempo. Comúnmente se compara los riesgos de diferentes bienes mediante sus volatilidades (desviaciones estándar). Un bien es más riesgoso que otro si es más volátil. Se supone que la volatilidad mide la dispersión de los retornos.

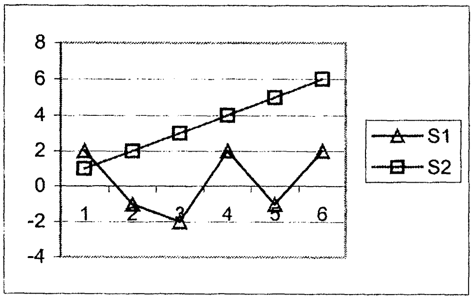
Una alta volatilidad indica una alta dispersión, lo que indicaría que hay una alta probabilidad de que ocurran grandes oscilaciones en los retornos. Esto implica que el bien es riesgoso. Sin embargo se pasa por alto que la desviación estándar como medida de dispersión es válida sólo si el sistema es aleatorio. Si las observaciones están correlacionadas, o exhiben correlación serial, entonces la utilidad de la desviación estándar se debilita considerablemente. Puesto que numerosos estudios han mostrado que la distribución de los retornos no es normal, es cuestionable la utilidad de la desviación estándar como medida de riesgo.

Como ejemplo, tomemos dos posibles retornos: S1 y S2, dados en la tabla 3.1:

**Tabla I**
*Introducción a las series de tiempo fractales*
**Posibles retornos: S1**

| Observación | S1 | S2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | -1 | 2 |
| 3 | -2 | 3 |
| 4 | 2 | 4 |
| 5 | -1 | 5 |
| 6 | 2 | 6 |
| Retorno acumulado | 1.93% | 22.83% |
| Desviación estándar | 1.70 | 1.71 |
| Dimensión fractal | 1.42 | 1.13 |

**Figura 2.2**
*Introducción a las series de tiempo fractales*
**Posibles retornos: S2**




S1 es una serie normal sin tendencia, mientras que S2 no es normal, pero con una clara tendencia.

La serie S1 tiene una desviación estándar casi igual a la de S2, mientras que el retorno acumulado de S1 es menos de la décima parte del retorno acumulado de S2, en contra de lo que se debería esperar (que los retornos sean casi iguales). En este ejemplo la desviación estándar como medida del riesgo falla.

Los defensores de la Hipótesis de Mercados Eficientes cuestionan la validez de este ejemplo, pues aducen que las series no son comparables ya que S2 no es normal. Precisamente este es el punto. En la realidad los retornos no son normales. Usar la desviación estándar para comparar el riesgo de dos series, es similar a usar la longitud en la comparación de dos costas. Las dimensiones fractales nos dan una medida más acorde con los datos.

Las personas no toman decisiones de la forma como lo haría un inversor racional. Alguna gente puede reaccionar inmediatamente a la información recibida, pero la mayoría aguarda hasta que exista una tendencia claramente definida. La cantidad necesaria de información para validar una tendencia varía de una persona a otra. La asimilación desigual de información puede ocasionar sesgos en las caminatas aleatorias. Las caminatas aleatorias sesgadas fueron estudiadas por Hurst en la década de los 40s y por Mandelbrot en los 60s y 70s. Mandelbrot las denominó movimiento browniano fraccional. Ahora se las conoce como series de tiempo fractales.

## 3. CONCLUSIONES

1. Los fractales son un excelente medio para modelar formas y procesos complejos, tales como las series de tiempo de diversa índole, no sólo las de tipo financiero.

2. Las series de tiempo completamente aleatorias llenan por completo el espacio continente, es decir su dimensión fractal es 2. La presencia de correlación hace que la serie de tiempo tienda a confinarse en espacio de dimensión fractal menor a 2.

3. Cuando se dispone de una serie de tiempo financiera, la dimensión fractal resulta ser una medida del riesgo mucho más fiable que la desviación estándar.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **MANDELBROT BENOIT.** (2002). *"Gaussian Sef Affinity and Fractals"*. Springer Verlag.

2. **MONROY CÉSAR.** (2002). *"Curvas Fractales"*. Alfaomega Grupo Editor.

3. **URBACH ROBERT.** (2000). *"Footprints of Chaos in the* Market". Prentice Hall.

4. **MAY CHRISTOPHER.** (1999). *"Nonlinear Pricing"*. John Wiley & Sons.

5. **KANTZ H. Y SCHREIBER T.** (1997). *"Nonlinear Time Series Analysis"*. Cambridge University Press.

6. **TRIPPI ROBERT (EDITOR).** (1995). *"Chaos & Nonlinear Dynamics in the Financial Market"*. Irwin Professional Publishing.

7. **PETERS EDGAR.** (1994). *"Fractal Market Analysis"*. John Wiley & Sons..