matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2003, Vol. 2, No. 1 Publicado: 2003-04-30

EL CONTINUO

Alvarado Juan[1]

Resumen. *Este trabajo plantea como tesis que la matemática tiene una faceta privada (el continuo) que es muy pocas veces reconocida públicamente por los matemáticos pero que sin embargo esta faceta comparte mucho de común con otras facetas privadas de otras actividades artísticas. Se dan ejemplos del poder del continuo y de cómo surge lo discreto a partir del continuo.*

Palabras Claves: Creatividad, Continuo, Diagonal de Cantor, Decibilidad, Sistemas Axiomáticos, Modelo, Atractores

1. INTRODUCCIÓN

El continuo es todo lo que nos rodea en nuestras vidas: es el acostarse y soñar, es el caminar y soñar, es la percepción de una flor, es el amanecer tenue y claro en mañana fría, es el olor de la tierra mojada después de una lluvia intensa, es el mirar a una mujer voluptuosa que camina tranquilamente por una calle, es la sonrisa coqueta de un niño que nos cautiva, es la imaginación que se genera cuando uno lee a un Borges o a un García Márquez, es el despertarse escuchando a unos pájaros trinar en una mañana silenciosa, eso es el continuo, pero también es cuando se siente desesperación, ansiedad, cuando alguien lleno de miedo agrede a alguien, cuando se tiene frustraciones cotidianas, cuando sufrimos una terrible decepción, cuando sentimos incertidumbre por un resultado futuro, todo eso es continuo, es nuestra vida cotidiana.

El continuo es lo que inspira al poeta, el continuo es lo hace pintar al artista, es lo que motiva a un emprendedor a formar una nueva empresa, es lo que motiva a una madre alimentar a sus hijos, es el ilusionarse por un nuevo amor. En fin podríamos seguir enumerando las cosas o situaciones en la cual nos conectamos con el continuo. Estas son las cosas que nos hacen soñar, vivir, fantasear a cerca de la realidad o tener miedo de ella, ira o angustia. Aún en estos últimos casos existe el continuo por que si nos fijamos bien en nuestras vidas, que es también otro continuo, estas sensaciones placenteras o dolorosas ocurren de forma continua, no existe separación. En un mismo día nosotros podemos sentir todas esas cosas de una forma continua sin que nosotros percibamos separación entre los eventos. Si estas cosas fueran separadas e individuales solo nos quedaríamos con una sola percepción con un solo sentimiento y no tendríamos la capacidad de seguir sintiendo cosas diferentes a lo largo de nuestra vida y no tendríamos memoria de nuestras percepciones y sentimientos anteriores.

El continuo es una propiedad que tienen las cosas de este mundo de no estar completamente separada una cosa de la otra. Por ejemplo el concepto de frió y calor en un día no puede separarse, no se puede saber con exactitud en que momento del día hace frió y en momento del día hace calor, no hay separación solo hay una escala "continua" de valores de temperatura, y el intelecto lo que hace es juzgar y "decidir" si es frió o calor. Otro ejemplo de lo que es continuo es credibilidad que podemos tener de una persona que tanto le creemos, le creemos mucho, le creemos poco, en que momento dejamos de creer mucho para creer poco ?.

Este contacto directo que tenemos con el continuo es lo que hace que nosotros poseamos una subjetividad para ver las cosas, una individualidad.

El continuo siempre aparece en la faceta privada de las actividades humanas, ya que esta faceta esta conformada por las vivencias de los sujetos (personas) que conforma una actividad y estas vivencias se las puede llamar de múltiples formas: inspiración, intuición, percepción, sensación, etc todas estas palabras pueden muy bien servir de analogía para describir lo que es el continuo y los ejemplos de sensaciones continuas que se dan en esta introducción fueron sensaciones que algún momento de la vida las podemos tener todos y que a veces estas sensaciones difícilmente la podamos compartir con un número grande de personas, salvo casos de personas que compartan gran intimidad.

2. EL CONTINUO COMO REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA

El continuo comienza aparecer en las matemáticas cuando se estudia el concepto de límite pero comienza a formalizarse este concepto con los trabajos Cantor [1] sobre los números transfinitos. Para construcción de los números transfinito Cantor utiliza el concepto de equipotencia de conjunto y define un número (sea finito o infinito) como la clase de equivalencia de la relación "Es equipotente a"

[1] *Juan Alvarado Ortega, Ingeniero en Computación FIEC-ESPOL, Magíster en Administración Publica ESPOL, Profesor del ICM – ESPOL; (e-mail: jao_ec@yahoo.com)*

Un conjunto A es equipotente a un conjunto B, si existe una función f( ) :A → B que es biyectiva. Sea A es un conjunto finito de n elementos entonces A es equipotente a un conjunto B si y solo si B tiene exactamente n elementos. La relación "A es equipotente B" es una relación de equivalencia

Se define un número k como la clase de equivalencia de todos los conjuntos que son equipotentes a un determinado conjunto A

k = { X / Conjunto X es equipotente a A }

Un número definido de esta forma también se llama número cardinal. En el caso de k finito se puede tomar A como {1,2,...,k} o cualquier conjunto que contenga k elementos. Por ejemplo el número tres se puede definir así:

3 = {X / Conjunto X es equipotente a {1,2,3} }

3 = { X / Conjunto X es equipotente a {Pedro, Maria, José} }

En el caso de k infinito el conjunto A puede ser el conjunto N, números naturales, o el conjunto P(N) (conjunto potencia de N) o el conjunto $P^2(N)$ (conjunto potencia de P(N)) o $P^3(N)$..., así sucesivamente. Se define como ζ_0 (alef cero) como el número cardinal de N es decir

ζ_0 = Car(N) y como Car(P(A)) = $2^{\mathrm{Car}(A)}$.

Cantor también definió una relación de orden entre los números cardinales: Un número cardinal k2 es mayor a un número cardinal k1 (k2 > k1) si y solo si:

1) Los conjuntos de k1 y k2 No son equipotentes

2) Sobre un conjunto de k1 solo puede definirse una función inyectiva (pero no sobreyectiva).

Esta relación de orden así definida se puede aplicar a cualquier tipo de número cardinal.

Cantor además demostró que Car(P(A)) > P(A) para cualquier conjunto A. Por lo tanto se puede construir una ordenación de menor a mayor de números cardinales

$$1 \; 2 \; 3 \; ...... \; \zeta_0 \; .... \; 2^{\zeta_0} \; ...... 2^{2^{\zeta_0}} \; ......$$

Ejemplo de conjuntos equipotentes a N son Z (números enteros), P (números primos), Q (números racionales)

ζ_0 = Car(N) = Car(Z) = Car(Q)

El conjunto R de los números reales es equipotente con el intervalo cerrado [0,1], que es un subconjunto propio de R. Una posible función biyectiva f( ): R → [0,1] que demuestra la equipotencia de estos dos conjuntos es:

$$f(x) = 1 / (1 + \exp(-x))$$

La clase de todos los conjuntos equipotentes con el conjunto [0,1] es lo que se conoce como el número cardinal c o también se conoce como la potencia del continuo.

El conjunto R^n [1], el conjunto C[0,1] [2] de todas las funciones continuas cuyo dominio es el cerrado intervalo [0,1], son conjuntos equipotentes a [0,1]. También son conjuntos equipotentes a [0,1] cualquier conjunto de puntos que conforman alguna figura geométrica continua que podamos dibujar en el plano.

Los números reales que pertenecen al intervalo [0,1] tienen la particularidad de estar colocados en forma continua uno después del otro de tal forma que no existe separación entre un número real y los números vecinos más cercanos de este número, por ejemplo el número ½ esta tan pegado a sus vecinos más cercanos (antecesor y predecesor) que no es posible separar este número de sus vecinos, en cambio en el conjunto de los números o en los subconjuntos de este conjunto si podemos encontrar los vecinos más cercanos de un determinado número por ejemplo A = {2,3,4,5,6.. } los vecinos más cercanos al 4 son los números 3 y 5. El mismo comportamiento existe con cualquier conjunto equipotente con el conjunto [0,1]

Este comportamiento particular del conjunto [0,1] ó del conjunto R sirve de modelo o de ejemplo al concepto de continuo que se dio al principio de este articulo, es decir no existe separación entre los elementos de estos conjuntos.

Cantor [2] fue el primero que demostró que los conjuntos [0,1] y N no son equipotentes, y lo hizo de la siguiente manera:

Supóngase lo contrario que existe una forma de asociar a los números reales entre 0 y 1 con los números naturales {xi}:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \,....\, a_{1n} \,.... \\ x_2 &= 0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \,....\, a_{2n} \,.... \\ x_3 &= 0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \,....\, a_{3n} \,.... \\ &.. \\ x_n &= 0.a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \,....\, a_{nn} \,.... \\ &.. \end{aligned}$$

Donde cada a_{ij} ε {0,1,2, ...9} y componen la expansión decimal de cada número real que esta el intervalo [0,1]. Por ejemplo 1/3 = 0.333333... y ½ = 0.500000... o 0.4999999... , los números {x_i }

conforman una sucesión de números naturales. A continuación se construye un número real r de la siguiente manera:

$$r = 0.b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots$$

Donde los b_i se seleccionan de la siguiente forma: Escójase un b1 tal que b1 $\neq$a11, un b2 tal que b2 $\neq$a22 y en forma general un b_i tal que $b_i \neq a_{ii}$.

Observe que el número *r* así construido no va a ser igual a ningún número x1, x2, x3 ... ya que en todos estos números siempre va a haber una diferencia de por lo menos un digito decimal con el número *r*. La existencia de este número r hace que la función inicial que había entre N y [0,1] sea no sobreyectiva (ya que r queda afuera del rango) y por lo tanto esta función no llega a ser biyectiva.

Con esto se llega a una contradicción lo cual demuestra que no es posible contar a los números de [0,1], ya que cada vez que queramos contarlo estos números reales, siempre va existir números reales que faltaran de contar, es decir nunca se podrá contar a los números reales en forma "completa".

La forma como se construyo el número real r en el cual se escogían números diferentes de la diagonal a_{ii}, se conoce como el procedimiento de la diagonal de Cantor. Esta técnica será de utilidad mas tarde.

La función identidad i(x) = x, es una función inyectiva del conjunto N al conjunto R, entonces la potencia del continuo es mayor a la cardinalidad del conjunto N:

$$Car(N) < Car([0,1]) \quad \text{es decir} \quad \zeta_0 < c$$

El conjunto potencia (el conjunto de todos los subconjuntos) de los números naturales es equipotente en números de elementos (cardinalidad) a los números reales es decir:

$$2^{\zeta_0} = Car(\, P(\, N\,)\,) = Car(\, [0,1]\,) = c$$

Para esta demostración Cantor represento a cada subconjunto de P(N) como su función característica. Una función característica de un conjunto es aquella función f_A que tiene el siguiente comportamiento

$$f_A(\, x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \varepsilon \text{ A} \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

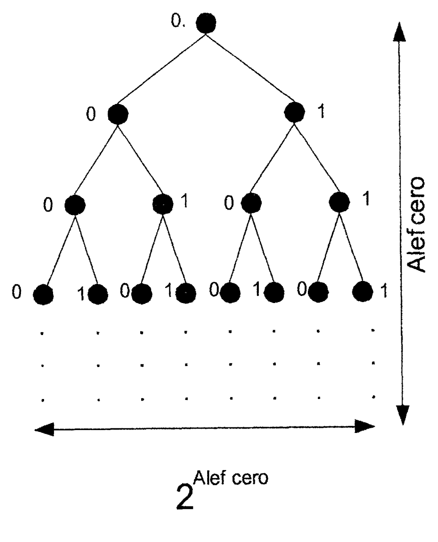
La función f_A representa una secuencia infinita de 1s o 0s donde hay un 1 en posición n siempre y cuando n ε A. Ejemplo $f_{\{1,2,3,4\}} = 11110000\ldots$.

Si a cada función f_A se agrega el prefijo 0. (cero y punto decimal) obtenemos una representación binaria de un número real que esta en el intervalo [0,1] por ejemplo la $f_{\{1,2\}}$ mas el prefijo '0.' nos da el numero 0.1100000... = 0.75 ó la función $f_{\{1,2,3,4\}}$ da el numero 0.1111000... = 0.9375. Con los estamos asociando 1-1 una función f_A con un numero real Esto se demuestra la equipotencia del conjunto P(N) con un número real en el intervalo [0,1] y por lo tanto se demuestra que

$$Car(\, P(\, N\,)\,) = Car(\, [0,1]\,).$$

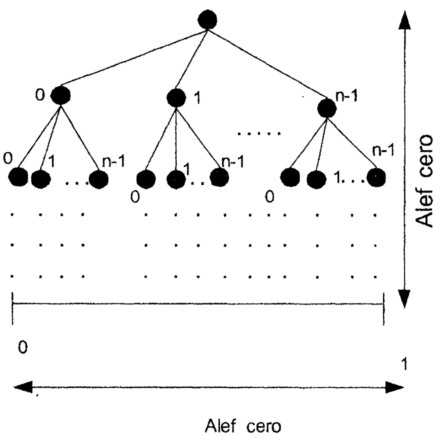
Una forma de ver gráficamente el conjunto de todas las secuencias de 1s ó 0s y que comienza con 0, es usando un árbol binario de profundidad ζ_0 (alef cero). La raíz de este árbol es el prefijo 0. y el hijo a la izquierda de cualquier nodo es 0 y el hijo a la derecha es 1, entonces el recorrido desde la raíz hasta cada hoja forma una secuencia infinita de unos y ceros comenzando con el cero y el punto decimal (0,) y cada hoja del árbol será equivalente a un número real en el intervalo [0,1]. Entonces las hojas de este árbol tendrán la potencia del continuo.

Figura 1
El continuo
Potencia del continuo



Los números reales en el intervalo [0,1] también pueden representarse como una secuencia numérica infinita ya no de dos dígitos (0 y 1) sino que puede usarse n dígitos (0,1, ...n-1), el conjunto de todas estas secuencias infinita de n dígitos forman las hojas de un árbol n-ario con profundidad (ζ_0) Las hojas de este árbol n-ario tendrán la potencia del continuo.

Figura 2
El continuo
Potencia del continuo



Las hojas de los árboles n-arios de profundidad ζ_0 también pueden ser usadas para representar infinitas secuencias de caracteres (textos infinitos) que provienen de algún alfabeto finito $\{a_1, a_2, ... a_n\}$ y este conjunto de textos tiene la potencia del continuo.

3. LAS FACETAS PUBLICAS Y PRIVADAS DE LA MATEMÁTICA

El continuo aparece como la faceta privada de la actividad matemática, el cual lo constituye el inmenso océano de intuiciones, pensamientos que los matemáticos llegamos a tener cuando planteamos o formalizamos algún problema ó cuando estamos en la búsqueda de la solución de algún problema nuevo. En ese momento nosotros sencillamente quedamos atrapados en las corrientes y remolinos de este inmenso océano de pensamientos e intuiciones.

Pero la actividad matemática como toda actividad humana también tiene una faceta publica, la cual es la faceta más visible y reconocida que tiene esta actividad La faceta publica de la matemática es aquella que hace que se considere a la matemática como una ciencia fría y exacta, una ciencia que nos obliga a seguir rigurosamente una serie de pasos para conseguir un resultado, por ejemplo cuando se nos pedía en la escuela multiplicar dos números tales como: 14433 por 522, usábamos el procedimiento de la multiplicación de números enteros en la cual íbamos multiplicando digito por digito e íbamos acumulando estas multiplicaciones en una lista de números que posteriormente teníamos que sumar. Realmente multiplicar dos números, intelectualmente no tiene nada interesante, solo es la aplicación ciega de un procedimiento que se debe cumplir estrictamente para conseguir el resultado deseado, que es de especial esto?. Ninguno.

Solo es la ejecución de un procedimiento mecánico. Así podemos mencionar otros procedimientos mecánicos que fuimos aprendiendo en matemáticas: inversión de matrices, diferenciación o la integración simbólica de funciones, generación muestras aleatorias, o la aplicación de reglas de inferencia lógica para deducir algo en base a algunas premisas. Todos estos procedimientos están diseñados en satisfacer en forma exacta algún propósito

4. SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Otra actividad que es considerada como la faceta publica de la matemática es aquella que definió Hilbert en su programa de fundamentacion formalista de la matemática. Según Hilbert la actividad matemática debe ser concebidas como la actividad de un sistema axiomático (SA) que es formal e independiente de sus aplicaciones y de sus referencias intuitivas. Este sistema formal solo debe encontrar su justificación en que sea libre de contradicciones. Un SA [3] puede ser considerado como un sistema productor de símbolos los cuales son construidos o deducidos de otros símbolos. Un SA esta constituido por los siguientes componentes:

1.- Un alfabeto básico, el cual consta de lo siguiente:
Símbolos para cualquier elemento (Variables) : x1, x,2 , x3, x4, ...

Símbolos para elementos distinguidos (Constantes) : c1, c2, c3 ....

Símbolos funcionales : $f^1{}_1, f^1{}_2, ..., f^1n, ... f^2{}_1, f^2{}_2,.... f^in,....$ donde los superíndice indican la cantidad de variables del símbolo funcional y el subíndice es índice para la símbolo.

Símbolos relacionales : $R^1{}_1, R^1{}_2, ..., R^1n, ... R^2{}_1, R^2{}_2,.... R^in,....$ donde los superíndice indican la cantidad de variables del símbolo relacional y el subíndice es índice para la símbolo.

Símbolos de puntuación: (,)

Símbolo conectores: ➔ , V, Λ,], Ξ

Símbolos de Cuantificación: ParaTodo , Existe

2.- Un conjunto de reglas sintácticas para construir formulas a partir de los símbolos del alfabeto básico. Esta formulas se llaman formulas bien formadas (fbf). Por ejemplo:

ParaTodo x, y ($f^2_1(x,y) \equiv f^2_1(y, y)$)

Estas reglas son similares a las que se usan para definir las instrucciones correctas que existen en un lenguaje de programación.

3.- Un conjunto de reglas mecánicas que nos permita decidir cuando una formula (fbf) es una axioma del SA (una proposición que no necesita demostración). Estas reglas mecánicas se llaman esquema de axiomas. Ejemplos de este tipo de reglas:

Sea A, B, C fbfs entonces la fbf $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ es un axioma
Sea A, B, C fbfs entonces la fbf es $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ es un axioma

4.- Un conjunto de reglas de inferencia, las cuales asocia una sucesión finita de formulas bien formadas (F1, F2, ..., Fn) las cuales se llaman argumentos con otra formula fbf F que se llama conclusión de la deducción. Ejemplo de este tipo de regla es :

Regla Modus Ponens

Si A es una fbf y $A \rightarrow B$ es otra fbf entonces esta regla deduce que la fbf B partir de las fbf anteriores.

Toda teoría matemática que se basa en un SA satisface esta definición, pero lo que hace realmente diferente una teoría matemática de otra, no es su alfabeto o sus reglas de inferencia ya que diferentes teorías pueden usar el mismo alfabeto o las misma reglas de inferencia, lo que hace diferente a las teorías matemáticas son los axiomas (los supuesto de donde parten). Los axiomas son los que dan el carácter y la personalidad a un SA.

A partir de los axiomas y usando las reglas de inferencia se pueden deducir otras fbf. Estas fbf deducidas se llaman teoremas. El conjunto de todos los teoremas que son de deducidas de un SA se llama teoría del SA.

Un SA es similar a un juego de ajedrez en la cual para jugar ajedrez hay que comenzar con una posición inicial de las piezas dentro del tablero de ajedrez (axiomas) y para conseguir una posición de piezas deseada (teoremas) se tiene que seguir los movimientos que se pueden hacer a la piezas sobre el tablero (reglas de inferencia).

Un ejemplo de lo que constituye un SA es el sistema de axiomático de la teoría de grupos: la cual se encarga de definir las propiedades de lo que constituye un grupo

Un conjunto G con una operación cerrada $f^2_1(,)$ es un Grupo Si y solo si

1. Propiedad asociativa

Para todo x1,x2,x3 ε G tal que $f^2_1(f^2_1(x1,x2), x3) = f^2_1 (x1, f^2_1(x2,x3))$

2. Elemento identidad

Existe un 1, Para todo x1 ε G tal que $f^2_1 (x1 ,1) = x1$

3. Existencia de Inverso

Para todo x1 ε G, Existe x2 ε G talque $f^2_1(x1 , x2) = 1$

En esta definición los símbolos x1,x2 y x3 pueden significar cualquier elemento de algún conjunto G, el símbolo f^2_1 representa cualquier operación binaria definida sobre el conjunto G, y el símbolo 1 es un elemento distinguido sobre el conjunto G y tiene una valor constante.

Un ejemplo de un teorema de la teoría de grupos la cual es deducida de estos axiomas es :

Para todo x1, x2 ε G Existe x3, x4 ε G tal que $f^2_1(x1,x3) = x2 \wedge f^2_1(x4,x1) = x2$

La faceta publica de la matemática es concebida como un conjunto de procedimientos mecánicos (algoritmos) que sirven para conseguir un resultado especifico o también esta faceta puede ser concebida, en forma mas general según Hilbert como una actividad donde se crea y se estudian las consecuencias de los SAs (teorías matemáticas), y sin hacer ninguna referencia al significado intuitivo que representan estas consecuencias.

Pero la definición de Hilbert del quehacer matemático era puramente sintáctica solo hacia referencia a la manipulación rigurosa y formal de símbolos pero no da una forma estándar de poder interpretar los símbolos de un SA.

5. MODELO DE UN SISTEMA AXIOMÁTICO

Fue Tarski en 1933 (10) quien encontró una definición precisa de cómo interpretar los símbolos de un SA. Tarski asoció a un SA una estructura matemática M sobre la cual se podía interpretar (asociar) los símbolos del SA.

Una estructura matemática consiste de un determinado conjunto de objetos A, llamando dominio, junto con funciones sobre A $f^A i()$: $A^n \rightarrow$

A, junto con relaciones sobre A $R^{A}i$ siendo $R^{A}i$ un subconjunto de A^{n} y con un conjunto de elementos distinguidos del conjunto A, $c^{A}i$ las cuales se llaman constantes .

Ejemplos de estructuras matemáticas es el conjunto de los número naturales, N, . junto con la operación de suma , + , y junto con el número 0 como constante, es decir tenemos la estructura (N, +, 0). Otra estructura es (Q, + , 0) de los números racionales con la operación suma y el 0 como constante y otra estructura sobre Q es (Q, *, 1) donde * es la multiplicación de racionales y el 1 como constante.

Con una estructura se pueden interpretar (asociar) cada teorema que tiene el SA con un objeto matemático creado con los elementos de la estructura matemática. Cuando uno construye tal objeto a partir de M a partir de un teorema de SA, puede que este objeto no se cumpla o no este definido sobre M, entonces se dice que la estructura matemática M no es un modelo para el SA. Y si en cambio en M se verifica todos los teoremas de SA entonces se dice que M es un modelo para SA.

Para que una estructura matemática sea un modelo de un SA solo tiene que satisfacer los axiomas del SA no es necesario verificar que se satisfacen todos los infinitos teoremas que puede tener un SA.

Ejemplo: sea SA la teoría de grupos, entonces la estructura (N,+,0) no es un modelo para SA porque los números naturales no tienen inverso bajo la operación suma. En cambio las estructuras (Q,+,0) y (Q,*,1) son modelos para este SA ya que satisface todos los axiomas.

Un modelo de un SA nos da un procedimiento o una manera de poder interpretar los símbolos del SA, sin hacer referencia directa con el significado intuitivo de los símbolos. Un modelo nos da una forma para comunicar a otros matemáticos algo mas acerca de los símbolos de un SA aparte de sus axiomas y su alfabeto básico. Esta forma de interpretar al SA usando estructuras matemáticas define una semántica externa del SA.

Aparte de esta semántica externa existe una semántica interna sobre los símbolos de un SA Esta semántica interna (12) esta basada en intuiciones ó imágenes visuales ó cinematográficas (modelos mentales) que definen un significado para los símbolos de un SA. Estos modelos mentales no es un medio adecuado para definir claramente un concepto matemático, pero esta semántica interna al estar asociada con nuestras emociones o con nuestras percepciones más profundas sirve de motivación al matemático a trabajar en matemáticas a hacer como "propio" un problema matemático. Estos modelos mentales como son subjetivos pueden variar de un matemático u otro.

En la teoría de grupos hay matemáticos que consideran a un grupo como un conjunto de permutaciones que operan en forma cerrada sobre un determinado conjunto en cambios otros matemáticos pueden concebir a un grupo como un conjunto de fuerzas que generan un flujo que se mueve en el tiempo. Ambas intuiciones pueden ser igualmente validas. Para cada teoría matemática por más abstracta que esta sea, es posible crear un conjunto de intuiciones propias que nos conecte personalmente con la teoría y nos motive a conocerla mas profundamente.

El teorema de incompletitud de Godel (3) demostró que en forma general no existe un procedimiento mecánico que verifique si una fbf es un teorema de un SA Un ejemplo (4) de un SA donde no se puede encontrar tal algoritmo es la misma teoría de grupos que se vio anteriormente. Sin embargo existen ciertos SAs en los cuales si existe este algoritmo, ejemplo de este tipo de SA es la teoría de Grupos Abelianos en la cual a los axiomas de la teoría de grupos se le agrega un axioma adicional que es la propiedad de conmutatividad.

Para todo x,y ε G tal que $f^{2}{}_{1}(x,y) = f^{2}{}_{1}(y,x)$

4. Propiedad conmutativa

Cuando en un SA existe un algoritmo que verifique si una formula es un teorema se dice que el SA es decidible y cuando no existe tal algoritmo se dice que es no decidible.

Pero si existen SAs que son no decidibles tales como la teoría de grupos, o la aritmética ordinaria, o la teoría de conjunto, etc en la cual no es posible mecanizar la demostración de los teoremas, entonces cómo pueden los matemáticos trabajar sobre estos sistemas de símbolos y obtener resultado nuevos e inesperados o resultados como la demostración del ultimo de teorema de Fermat Que tiene de especial la mente del matemático sobre el poder de calculo de las computadoras, que permite al matemático enfrentarse con un problema nuevo, tal como la demostración de un nuevo teorema y obtener una demostración de este teorema pese a que no existe ningún procedimiento mecánico para realizarlo ?.

6. EL CONTINUO Y LA CREACIÓN HUMANA

Para contestar esta pregunta primero revisemos cual es el universo donde la creatividad humana actúa.

Sea T = { El conjunto de los posibles textos que el hombre puede construir con un alfabeto finito }

Cada texto del conjunto T, puede representarse como una hoja de un árbol n-ario de profundidad ζ_0, y donde n es la cantidad de caracteres del alfabeto que se utiliza para escribir un texto, la mayoría de las hojas de este árbol representan textos (secuencias de caracteres) infinitos, y este tipo de texto estarían descartados del conjunto T, así que tenemos que Car(T) <= 2^{ζ_0} , pero en cambio si tratamos demostrar Car(T) = ζ_0 y realizamos una lista (secuencia) infinita de tales texto, en ese momento podemos usar el procedimiento de la diagonal del Cantor (así como construimos el número r), para construir un texto t que no esta considerado en esta lista, y esto demuestra que el conjunto T no puede tener la cardinalidad de ζ_0 es decir Car(T) $\neq \zeta_0$ y si aplicamos la hipótesis del continuo llegamos a concluir que Car(T) = 2^{ζ_0} .

En el conjunto T es donde están todos los textos que el hombre ha escrito y construido y los posibles textos que el hombre puede construir, en este conjunto esta este articulo que aunque no lo he terminado en estos momento ya "existe" en este conjunto T o también en T están las obras clásicas de la literatura universal como Don Quijote, Romeo y Julieta, o están todos los tratados científicos que el mundo ha creado y los que se crearan. Para crear un texto que sea un clásico de literatura o para escribir un tratado científico, solo es cuestión de ir al conjunto T y sacar el texto que uno quiere del anonimato.

Sea P = { El conjunto de las posibles pinturas que el hombre puede crear }

Una pintura esta compuesta de una secuencia finita de trazos y pinceladas. Cada pincela puede ser expresado como una función continua $f(\ ):R^2 \rightarrow R$ donde R^2 es el plano a pintar y R es la gama de colores que puede usar el artista, el conjunto de tales funciones f( ) que modela una pincelada tiene la potencia del continuo, ya que cada función continua f(x,y) es equivalente a una serie de potencias $\Sigma\ a_i x^i$ y el conjunto de todas las series de potencias tiene la potencia del continuo. Cada trazo puede ser expresado como un subconjunto medible del plano y los todos los subconjuntos medibles del plano tienen la potencia del continuo.

Como una pintura es una secuencia finita de pinceladas y trazos se la puede modelar usando una n-tupla de objetos (o_1, o_2, o_3, ...o_n) donde cada o_i que puede ser un trazo o una pincelada y ambos tipos de objetos vienen de conjuntos que tienen la potencia del continuo, y por una demostración elemental en la teoría de conjuntos [1] tenemos que el conjunto de todas estas secuencias también tiene la potencia del continuo. Igual razonamiento podemos aplicar sobre el conjunto de las esculturas, o sobre cualquier actividad artística plástica. En estas actividades el universo creativo tiene la potencia del continuo.

Sea F ={ El conjunto de las formulas matemáticas que pueden construir }

Este conjunto F es un subconjunto del conjunto T, pero con alfabeto mas pequeño que el alfabeto del conjunto T, ya que los caracteres matemático es un subconjunto de todos los caracteres que utiliza el hombre. Pero igual razonamiento podemos aplicar sobre este conjunto F y llegar a la conclusión que Car(F) = 2^{ζ_0} .

Sea I = { El conjunto de todos los posibles estados de conciencia quc pucden existir en la mente humana }

Para estimar la cardinalidad de este conjunto, se debe modelar de alguna forma lo que se conoce como "estado de conciencia" y para ello usaremos la hipótesis que tienen los neurocientíficos (9) sobre el tema, el cual dice que los estados de conciencia es el producto de actividad nerviosa del cerebro, y esta actividad nerviosa también según hipótesis de la neurofisiología es una función continua de valores n(x,y,z) que representa la actividad eléctrica del cerebro o por lo menos de su corteza, donde x,y,z son las coordenadas espaciales de cada puntos del cerebro. Entonces cada estado de conciencia esta asociado una función n(x,y,z) continua, y el conjunto de este tipo de funciones tiene una cardinalidad de 2^{ζ_0}.

Los conjuntos T, P o F son tipos de universos donde la mente de un creador busca o construye algo que desea crear. Enfrentarse a estos universos es enfrentarse a este continuo e infinito mundo de posibilidades. Posibilidades que están mas allá de toda compresión racional (algorítmica), y solo la mente del hombre (que es el conjunto continuo I) es la que puede enfrentarse de igual a igual con estos universos continuos de posibilidades. En cambio la computadora basada en la maquina de Turing, la cual solo procesa y entiende elementos discretos jamás podrá enfrentarse igual a igual con el continuo, ya que cada vez que un algoritmo quiera enumerar todos los casos del continuo, sobre el cual va a operar, siempre va existir algo (usando el procedimiento de la diagonal de Cantor) que va a faltar, y será algo que no lo podrá saber jamás el mundo de lo discreto.

Para confirmar la incapacidad de las computadoras de enfrentarse con el continuo, vemos el siguiente ejemplo

7. ALGORITMOS VERIFICADORES DE TEOREMAS

Si bien es cierto no existe un algoritmo que verifique si una formula es un teorema de un sistema axiomático, existen algoritmos que resuelven este problema de forma parcial de tal forma si se ingresa una fbf que es un teorema el algoritmo responde afirmativamente en un tiempo finito, pero si la formula no es un teorema el algoritmo nunca termina, cae en un lazo infinito. Lo interesante de este algoritmo es ver como trabaja cuando recibe una fbf que no es un teorema. Estos algoritmos trabajan de la siguiente manera (14):

Este algoritmo demuestra un teorema A tratando de demostrar que su negación ⅂ A genera una contradicción. Para demostrar tal contradicción este algoritmo comienza a realizar una búsqueda sistemática de todas combinaciones de valores para las variables cuantificadas de A que hagan inconsistente a la formula. Si en cambio encuentra un conjunto de valores que haga consistente a la formula ⅂ A (o equivalentemente que hagan inconsistente a A) este conjunto de valores constituirán un contraejemplo para la formula A..

La búsqueda sistemática de las combinaciones de valores que invaliden a ⅂ A se lo hace construyendo un árbol binario finito en donde cada hoja de este árbol da una combinación tal de valores que genera una inconsistencia de ⅂ A. Si se consigue construir este árbol, entonces la formula ⅂ A siempre va ser inconsistente en todas las combinaciones de valores, ya que cada hoja representa una inconsistencia para una determinada combinación. Si se ingresa una fbf que es un teorema entonces este algoritmo construye este árbol finito y termina en un tiempo finito. Pero en cambio la fbf no es un teorema este algoritmo tratara de construir este mismo árbol binario pero nunca va a terminar y lo que tratara de hacer es un construir árbol binario de longitud infinita (ζ_0) cuyas hojas tienen la potencia del continuo y en una de sus hojas representara la combinación de valores tal que hace invalida a la formula A, es decir en una hoja del continuo esta un contraejemplo de la fbf A. Pero como el algoritmo no puede enfrentarse al continuo este nunca va terminar de ejecutarse.

Pero los matemáticos en cambio pueden enfrentarse al continuo extraer de él, el contraejemplo que necesitan para demostrar que la fbf A no es un teorema.

8. LO CONTINUO Y LO DISCRETO

Si el continuo es la base para toda creación humana, entonces porque existen las cosas discretas tales como 'casa', 'perro', 'comida' , 'número natural', etc ?.

Observemos que todas las cosas discretas son producto del criterio, del juzgamiento o de la medición que realiza la mente del hombre sobre el continuo del mundo. Si nos dedicáramos a percibir el mundo tal como es sin generar categorías ni clases nos daremos cuenta el limite sobre el cual se separan las cosas es borroso.

Por ejemplo nuestro cuerpo intercambia materia y energía con el ambiente que nos rodea (tales como oxigeno, alimentos, luz solar, etc) en que momentos esta materia o energía que entra o sale de nuestro cuerpo, pasan a ser o dejan de ser parte de nuestro cuerpo ?. Si observamos un árbol podemos aplicar el mismo argumento y ver que las distinciones entre lo que es un árbol y lo que no es un árbol es nuevamente borroso. Los seres vivos comparten esta característica de tener limites borrosos entre ellos y su ambiente.

Lo discreto aparece solo en la mente del hombre, cuando se tiene que comunicar algo a cerca de las cosas de este mundo, fuera de la mente del hombre lo discreto no existe

Si en la mente del hombre es continuo, como se producen esta las unidades discreta de pensamiento a las cuales llamamos conceptos?. En otras palabras como se produce lo discreto a partir de lo continuo ?

Existen dos tipos de explicaciones para el fenómeno, continuo→discreto:

La primera explicación la tenemos de la física cuántica. La física cuántica postula (5) que toda la información que podemos saber a cerca de un sistema físico esta descrita por una función $\Psi_t(x)$ que tiene la característica de ser cuadrado integrable (El conjunto de estas funciones tienen la potencia del continuo). Esta función es llamada función de onda o estado cuántico. Cada posible medición que podamos realizar sobre un sistema esta asociado un operador lineal Hermitico $\bar{A}(\ )$ el cual actúa sobre la función de onda $\Psi_t(x)$. Cando se realiza una medición $\bar{A}(\ )$ de un sistema $\Psi_t(x)$, se realiza la operación $\bar{A}(\Psi_t(x))$, que altera irremediablemente la función de onda $\Psi_t(x)$ a una funcion $\alpha i(x)$ ($\Psi_t(x) \rightarrow \alpha i(x)$) donde $\bar{A}(\alpha i(x))= A_i\ \alpha i(x)$, $\alpha i(x)$ es un vector propio del operador $\bar{A}(\ )$ y el valor que obtiene como producto de la medición es A_i donde A_i es el valor propio de vector $\alpha i(x)$.

Y si posteriormente se sigue midiendo esta función de onda $\alpha i(x)$ con el mismo operador $\bar{A}(\ )$ el sistema se mantendrán en el mismo estado $\alpha i(x)$ y la medición va a responder con el mismo valor A_i. En ese momento decimos que la función $\Psi_t(x)$ ha colapsado o se ha cuantificado en algún vector propio $\alpha i(x)$, y mientras se siga observando este estado $\alpha i(x)$ de la misma forma esta función no va a cambiar y en ese momento se obtendra un valor definido que representa algo objetivo y discreto para el que realiza la medición. En cambio antes de la medición la función de onda podría estar en cualquier estado de posibilidades continuas El proceso de medición transformo el continuo a algo discreto.

Los efectos de la mecánica cuántica se presentan mas en el microcosmo de las partículas atómicas, pero pueden presentarse en la vida cotidiana el fenómeno de colapsamiento de un estado cuántico, si acepta la hipótesis planteada por (7) Zohar de que la mente es un solo gran estado cuántico conformado por las diferentes partículas de luz (bosones) que componen nuestro cuerpo. Si la mente de una persona es estado cuántico entonces el colapsamiento de este estado cuántico se producirá por una medición de este estado. Una medición o un colapsamiento para la mente es un juicio que se forma en la mente. Si una persona se juzga así mismo que no puede hacer algo, la mente de esta persona estará en una estado que no permita que se realice ese algo.

La segunda explicación del fenómeno continuo→discreto, proviene de la teoría de los sistemas dinámicos. Esta teoría trata principalmente con el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales. Esta soluciones definen una trayectoria (instantes de tiempo) que describe la evolución que tiene un sistema. Las trayectorias de las ecuaciones no lineales, con ciertas características especiales formaran atractores, que son conjuntos de trayectorias que forman patrones espacio-temporales. Estos patrones son apreciados mejor en el espacio en el espacio de fase (espacio cartesiano donde los ejes representan dimensiones espaciales o derivadas de las dimensiones espaciales) pero hay ciertos sistemas dinámicos donde los tractores son evidentes a simple vista por ejemplo: el movimiento caótico (altamente no lineal) de las moléculas de agua del océano que chocan con la playa forman el atractor (patrón de comportamiento) conocido como "ola".

Los atractores en los sistemas no lineales tienen una característica especial: de no poseer un orden regular, pero que sin embargo pueden ser reconocido a simple vista por un observador.

En el ejemplo anterior ninguna ola es exactamente igual a otra ola, pero que sin embargo si podemos reconocer que es una ola de la que no lo es. Estos atractores a pesar de estar formado de un conjunto continuo de trayectorias, forman un todo integrado que la mente del observador que puede interpretar al atractor como un concepto, como algo discreto.

Los atractores nacen como producto de la interacción compleja de fuerzas que están actuando sobre un medio. Las olas nacen como producto de la interacción compleja de diferentes fuerzas: la fuerza que genera el océano, la fuerza de reacción de la playa sobre el mar, la fuerza del viento y el medio donde interactúan toda estas fuerzas es el agua.

El medio donde actúan estas fuerzas es un conjunto continuo y las fuerzas son descritas por una ecuación diferencial no lineal. Un atractor pueden ser considerado como una unidad discreta, y surgen como producto de interacciones de distintas fuerzas sobre un medio continuo. Esto se describe usando la ecuación

Todo continuo (Medio) + Ecuación Diferencial (Fuerzas) → Unidad Discreta (Atractor)

Haciendo analogía con los sistemas axiomáticos (SA): los axiomas de un SA son análogos a las ecuaciones diferenciales no lineales ya que expresan una condición que debe cumplirse y un modelo de un SA es análogo a un atractor ya que es ejemplo especifico o es el producto de los axiomas del SA (ecuaciones). Y si el modelo del SA corresponde a la semántica externa entonces el medio sobre la cual se expresa este modelo es el conjunto T (todos los textos que el hombre puede construir), pero si el modelo corresponde a una semántica interna el medio donde se manifiesta este modelo es la conciencia del hombre.

Explicar el fenómeno continuo→discreto es realmente explicar como surgen los conceptos en la mente. Es por eso que la física cuántica [7] o la teoría de los sistemas dinámicos [6] son teorías que están comenzado a ser usadas para explicar el fenómeno de cómo surgen los conceptos en la mente. De hecho se ha desarrollado [6] una analogía completa entre la teoría del caos (Sistemas dinámicos) y la teorías del desarrollo de la siquis de individuo de Carl Jung, la cual fue desarrollada 40 años antes que apareciera los conceptos de los sistemas dinámicos y la teoría del caos.

Los conceptos de la teoría del caos se están aplicando a la física cuántica en una nueva especialización de la física cuántica conocida como Caos Cuántico. En esta teoría se esta comenzando a descubrir [12] que entre el estado no colapsado y el estado colapsado de una función de onda existe un estado intermedio en el cual tiene un régimen de comportamiento caótico.

Esto ultimo nos hacer plantear como hipótesis que entre lo continuo y lo discreto existe el caos. Y como ejemplo de esto se me ocurre que cuando uno tiene una idea hacer algo (continuo, potencial) y que queremos realizar esta idea (discreto) en el intermedio pueden ocurrir muchos eventos inesperados, haciendo que esta concreción sea un camino caótico. Por eso que existe el refrán "Entre lo dicho y lo hecho hay mucho trecho".

9. NECESIDAD DE LO DISCRETO

Lo discreto nace como necesidad de expresar las cosas que ocurren en el continuo. Cuando un matemático tiene alguna intuición que le llama la atención él tratara de formalizar su intuición en términos de algún formalismo ya sea definiendo un SA o ya sea escribiendo alguna formula que es candidata a ser un teorema, pero que intuye que es verdadera. Los formalismos tales como los

axiomas o las ecuaciones sirven para instituir las intuiciones que provienen del continuo.
Igual situación ocurre en una sociedad cuando existe un comportamiento natural que tienen las personas en una sociedad si este comportamiento engendra un valor (por ejemplo la familia) que las sociedades deseen preservar. Entonces para preservar este valor, el cual pertenece al continuo, las sociedades crean códigos legales (una especie de axiomas sociales) con el propósito de institucionalizar este valor (matrimonio civil).

10. CONCLUSIONES

1. El continuo como conjunto de los números reales tiene mucho en común con el continuo de lo no manifestado de nuestra vida cotidiana, en este continuo habita nuestra creencias, anhelos, ambiciones, ideales, personajes mitológicos y todo el imaginario que conforma el inconsciente colectivo. Este continuo es lo conecta las diferentes subjetividades de las personas y es el que sirve inspiración y de soporte para que diferentes personas que cumplen una actividad creativa tales como los matemáticos, como los poetas, como los pintores, como los emprendedores de negocios, etc. Esta concreción se realiza a traves de un proceso caótico de transformación de lo continuo a lo discreto.

2. Quizás el desarrollo de teorías físicas como la teoría del caos cuántico puedan dar más luz acerca de este proceso de creación desde el continuo a lo discreto, y a lo mejor poder explicar como es el comportamiento de la semántica interna de los sistemas axiomáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **ARCHETYPES & STRANGE ATTRACTORS.** (1999). *"The Chaotic World of Symbols"* (Studies in Jungian Psychology by Jungian Analysts, No 75). John R. Van Eenwyk .

2. **ZOHAR DANAH.** (1990). *"The Quantum Self"*, Quiill/Willian Morrow, New York.

3. **TARSKI ALFRED,** (1983). *"The Concept Of Truth In Formalized Languages , in Logics Semantic and Metamathematics"* Ed Corcoran, Hackett publishing Company, Indianapolis .

4. **KERTESZ A.** (1983). *"Localization In Neuropsychology"*, New York N Y. Acadecimic Press.

5. **HAMILTON. A. G.** (1981). *"Lógica Para Matemáticos"*. A. G. Editorial Paraninfo, Madrid, España.

6. **SEYMOUR LIPSCHUTZ** (1981). *"Topología General"*. Serie Schaum McGraw-Hill..

7. **MANIN YU.** (1979). *"Lo Demostrable y Lo Indemostrable"*, Editorial MIR *Moscú.*

8. **GILLESPIE.** (1976). *"Introducción a la Física Cuántica"*. D. T. Editorial Reverte, Barcelona.

9. **SUPPES PATRICK.** (1968). *"Teoría Axiomática De Conjuntos"*. Editoral Norma, Bogotá, Colombia.

10. **ROBINSON. J A.** (1965). *"A Machine-Oriented Logic Based On The Resol.ution Principle"*. JACM.

11. **TARSKI, MOSTOWSKI AND ROBINSON.** (1953). *"Undecidable Theories". Amsterdam. North-Holland*

12. **FOCUS.** (1998). *" The World Of Quantum Chaos"*. Graham P. Collins. http://focus.aps.org/story/v2/st8. (Agosto 2003)