MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2020, Vol. 18, No. 1 Enero - Junio

Nuevo Enfoque para la Solución de la Ecuación General de Tercer Grado en una Variable

New Approach for the Solution of the Third Degree General Equation in one Variable

Hernán Ayala

Recepción: 23/02/2020 **Aceptación:** 04/06/2020 **Publicación:** 30/06/2020

Abstract This article presents a new general formula to solve the equation of the third degree in one variable (cubic), the methodology is reviewed, the results obtained that include an analytical expression for the solution (root), analysis of the three simple real roots and on multiple solutions. The linear independence between the well-known formula from the 16th century at the time of the Renaissance given by the Italians, Del Ferro, Tartaglia and Cardano is also discussed; and that of the present article. Finally two examples are shown about a "direct" formula, applied to two equations with three different real roots.
Keywords cubic, direct formula, equation, general formula, linear independence.

Resumen En este artículo se presenta una nueva fórmula general para resolver la ecuación de tercer grado en una variable (cúbica), se revisa la metodología, los resultados obtenidos que incluyen una expresión analítica para la solución (raíz), análisis de las tres raíces reales simples y sobre las soluciones múltiples. También se discute acerca de la independencia lineal entre la ya conocida fórmula desde el siglo XVI en la época del renacimiento dada por los Italianos, Del Ferro, Tartaglia y Cardano; y la del presente artículo. Finalmente se muestran dos ejemplos sobre una fórmula "directa", aplicada a dos ecuaciones con tres raíces reales diferentes.
Palabras Claves cúbica, ecuación, fórmula directa, fórmula general, independencia lineal.

1. Introducción

Desde hace 4 siglos se conoce un método que proporciona una fórmula para la solución de la ecuación general de tercer grado en una variable; el conocido método

Hernán Enrique Ayala Rocafuerte, Economista.
Investigador Independiente, Guayaquil - Ecuador, e-mail: hernan_ayala@hotmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1951-1324

de Tartaglia-Cardano (TC), evidentemente en aquella época se estaba comenzando a desarrollar una nueva matemática y la solución de las ecuaciones cúbicas no fue sino el preámbulo de lo que estaba por venir.

Existe una nueva fórmula para resolver la ecuación cúbica con un enfoque diferente al de los Italianos (Ayala, 2018a, 2019b, 2018b). Donde se utiliza el concepto de familia y de binomialización, que al aplicarlo en dicha ecuación produce fórmulas diferentes con resultados a veces más simplificados y en otros más elegantes, esto con ayuda de la teoría básica del cálculo y el correspondiente análisis matemático. Ahora bien una de las consecuencias de este estudio es que la fórmula analítica de la ecuación cúbica que se presenta con una sola expresión (Hurtado, Quintana, Sanahuja, Taniguchi, y Villanova, 1987; Ivorra, 2009) ya no se muestra así, sino como una regla de correspondencia (Ayala, 2019b). A saber:

$$x = g(a'_2, a'_1, a'_0) = \begin{cases} g_1(a'_2, a'_1, a'_0) & \text{si } a'_1 \neq \dfrac{a'^2_2}{3} \\ \\ g_2(a'_2, a'_1, a'_0) & \text{si } a'_1 = \dfrac{a'^2_2}{3} \end{cases}$$

2. Metodología

Una familia de ecuación polinómica en una variable es aquella en donde los coeficientes de la misma están relacionados por alguna regla o relación matemática y no pueden tomar un valor libre (cualquiera) sino el que está impuesto por la regla.

La binomialización "básicamente consiste en Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ encontrar su polinomio familia de igual grado que se pueda expresar en un binomio de la forma $Q(x) = (ax+b)^n + c$"(Ayala, 2019b, p.2). Entonces se definen sus valores: $a = \pm\sqrt[n]{a_n}$, $b = \dfrac{a_{n-1}}{n \cdot \pm\sqrt[n]{a_n}^{\,n-1}}$ y $c = a_0 \mp \dfrac{a^n_{n-1}}{n^n \cdot \pm a_n{}^{n-1}}$. Para conocer los términos con variable t_i de $Q(x)$ se sigue la regla del binomio de Newton (Arya y Lardner, 1989; Carreño y Cruz, 2003). Este término i-ésimo de $Q(x)$ viene dado por: $t_i = \begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} \cdot (ax)^{n-i+1} \cdot b^{i-1}$; con a y b dados en las líneas anteriores e $i = \{1, 2, ..., n-1, n\}$.

Como se puede ver, este concepto se aplica a cualquier polinomio en una variable de grado n; como en el caso de la ecuación cuadrática $P_2(x)$ es binomializable completamente (González y Mancill, 1962). No así $P_3(x)$ que lo es parcialmente, donde su correspondiente $Q(x)$ es una familia.

3. Resultados de Una Nueva Fórmula para la Ecuación Cúbica (UNFEC)

3.1. *Raíz Real Única de la UNFEC*

Dada la ecuación en una variable de tercer grado general de coeficientes reales a_i; $i = \{0,1,2,3\}$.

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{1}$$

se la lleva a la forma canónica:

$$x^3 + a'_2x^2 + a'_1x + a'_0 = 0 \tag{2}$$

con $a'_i = \dfrac{a_i}{a_3}$; $a_3 \neq 0$ e $i = \{0,1,2\}$. La nueva fórmula para la solución de la ecuación cúbica empieza de la siguiente manera, haciendo $x = z + k$ en la ecuación 2, obteniéndose (Ayala, 2018a, 2019b).:

$$z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0 \tag{3}$$

con $b_2 = 3k + a'_2$, $b_1 = 3k^2 + 2a'_2k + a'_1$ y $b_0 = k^3 + a'_2k^2 + a'_1k + a'_0$. En esta misma línea en el mencionado artículo se aplican las ideas y cálculos correspondientes de lo cual se deriva:

$$k = \frac{-(9a'_0 - a'_1a'_2) \pm \sqrt{(9a'_0 - a'_1a'_2)2 - 4(3a'_1 - a'^2_2)(3a'_0a'_2 - a'^2_1)}}{2(3a'_1 - a'^2_2)} \; ; \; 3a'_1 - a'^2_2 \neq 0$$

Después de las simplificaciones, reducciones y reemplazos algebraicos correspondientes se puede escribir; usando los $b_i{}'s$ para compactar la forma de z:

$$z = \frac{b_1}{\sqrt[3]{(a'^2_2 - 3a'_1)b_2} - b_2} \; ; \; \sqrt[3]{(a'^2_2 - 3a'_1)b_2} - b_2 \neq 0$$

Analizando la restricción para z se encuentra la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, para superar esta dificultad se utiliza "la regla de L'hospital"(Solaeche, 1993, p.1). La cual produce un cambio para z, llámese z' a este cambio por lo tanto para dicha indeterminación se tiene que (Ayala, 2018b, 2019b).:

$$z' = \frac{2\sqrt[3]{b_2^5}}{\sqrt[3]{a'^2_2 - 3a'_1} - 3\sqrt[3]{b_2^2}} \; ; \; \sqrt[3]{(a'^2_2 - 3a'_1)b_2} - b_2 = 0$$

Escribiendo de acuerdo a la nomenclatura adoptada se tiene que:

$$g_1(a_2',a_1',a_0') = \begin{cases} z+k & \text{si } \sqrt[3]{(a_2'^2-3a_1')b_2}-b_2 \neq 0 \\ \\ z'+k & \text{si } \sqrt[3]{(a_2'^2-3a_1')b_2}-b_2 = 0 \end{cases} \; ; \; 3a_1'-a_2'^2 \neq 0$$

La expresión de g_2 se obtiene binomializando la ecuación (2)(Ayala, 2018a, 2019b). Se tiene entonces:

$$\left(x+\frac{a_2'}{3}\right)^3 + a_0' - \frac{a_2'^3}{27} = 0$$

La condición para esta binomialización es $a_1' = \dfrac{a_2'^2}{3}$ y denotando la solución en x por $g_2(a_2',a_1',a_0')$ se escribe:

$$g_2(a_2',a_1',a_0') = \frac{-a_2' + \sqrt[3]{a_2'^3 - 27a_0'}}{3}; \;\; 3a_1' - a_2'^2 = 0$$

Es importante señalar que el valor de Δ definido en (Ivorra, 2009) y el del discriminante de k en 3.1 son cero al mismo tiempo ya que son proporcionales por un número positivo. Así siendo $\Delta > 0$ el valor de k queda determinado (k^*) y así todas las variables que dependen de este, por lo cual dado k^*, entonces g^* se obtiene de g_1^* o g_2^* y por lo tanto $x^* = g^*$

3.2. Raíces Reales Simples de la UNFEC

Para encontrar las raíces reales simples se utiliza g_1 y se aplica la teoría de complejos y funciones trigonométricas correspondiente.

Como se conoce en la teoría existente cuando el polinomio cúbico general tiene tres raíces reales simples, existe la presencia de números imaginarios o complejos en la fórmula (representación analítica compleja)(Wells y Pereda, 1917; Ivorra, 2009). Entonces aplicando la teoría correspondiente se encuentra su representación analítica trigonométrica para así saber su aproximación numérica, ya que conocer su representación analítica real actualmente no es posible sino para casos específicos o particulares.

Sea $c_1 + c_2 i = k$ la representación compleja de k y $d_1 + d_2 i = b_2$ la representación compleja de b_2, donde:

$$c_1 = -\frac{9a_0' - a_1'a_2'}{2(3a_1' - a_2'^2)} \; , \; c_2 = \pm\frac{\sqrt{4(3a_1'-a_2'^2)(3a_0'a_2'-a_1'^2)-(9a_0'-a_1'a_2')^2}}{2(3a_1'-a_2'^2)}$$

$$d_1 = -\frac{3(9a_0'-a_1'a_2')}{2(3a_1'-a_2'^2)} + a_2' \; , \; d_2 = \pm\frac{3\cdot\sqrt{4(3a_1'-a_2'^2)(3a_0'a_2'-a_1'^2)-(9a_0'-a_1'a_2')^2}}{2(3a_1'-a_2'^2)}$$

Se definen también: $c = \sqrt[3]{a_2'^2 - 3a_1'}$, $\theta = \arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$; $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$\alpha = \arctan\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$;$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $r = \pm\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $r_2 = \pm\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ que de acuerdo a la teoría trigonométrica se cumple: $c_1 = r\cos(\theta)$ y $c_2 = r\sin(\theta)$, análogamente se tiene $d_1 = r_2\cos(\alpha)$ y $d_2 = r_2\sin(\alpha)$. Reemplazando las formas trigonométricas en la fórmula para g_1 que contiene a z de acuerdo a la teoría correspondiente:

$$g_1(a_2', a_1', a_0') = \frac{3r^2\left[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right] + 2a_2'r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right] + a_1'}{c\sqrt[3]{r_2}\left[\cos\left(\frac{\alpha+2\pi k_2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2\pi k_2}{3}\right)\right] - 3r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right] - a_2'} + r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right] \quad (4)$$

Con $k_2 = \{0, 1, 2, \}$. Reduciendo un poco más la expresión para g_1 se definen las siguientes constantes: $a' = c\sqrt[3]{r_2}$,

$$\lambda_1 = a'\left[a_1' - 3r^2\right]\cos\left(\frac{\alpha+2\pi k_2}{3}\right) + 2a_2'a'c_2\sin\left(\frac{\alpha+2\pi k_2}{3}\right) + c_1\left[a'^2 + (3c_1 + a_2')^2 + 9c_2^2\right]$$

y

$$\lambda_2 = -2a'(3c_1 + a_2')\cos\left(\frac{\alpha+2\pi k_2}{3}\right) - 6a'c_2\sin\left(\frac{\alpha+2\pi k_2}{3}\right) + a'^2 + (3c_1 + a_2')^2 + 9c_2^2 \,,$$

finalmente se puede escribir:

$$g_1(a_2', a_1', a_0') = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (5)$$

3.3. *Raíces Reales Múltiples de la UNFEC*

La ecuación (2) “tiene una raíz doble (sin excluir que sea triple) si y sólo si $\Delta = 0$”(Ivorra, 2009, p.6).

Analizando esto, se pueden ver los valores que necesita tomar a_0' para tener raíces múltiples en la ecuación cúbica, estos se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática para a_0' a saber:

$$27a_0'^2 + 2(2a_2'^3 - 9a_2'a_1)a_0' + a_1'^2(4a_1' - a_2'^2) = 0$$

Sean a_{01}' y a_{02}' las raíces de la ecuación anterior, haciendo un análisis en el apartado 3 y utilizando el resultado para la raíz múltiple (Ivorra, 2009). Las soluciones de la ecuación cúbica correspondiente vienen dadas por los cuadros 1 y 2 como se presenta a continuación:

Cuadro 1 Raíces de (2) para $a'_0 = a'_{01}$

Raíz Simple	Raíz Múltiple
$x = -\dfrac{2\sqrt{a'^2_2 - 3a'_1} + a'_2}{3}$	$x = \dfrac{\sqrt{a'^2_2 - 3a'_1} - a'_2}{3}$

Fuente: Creación Propia

Cuadro 2 Raíces de (2) para $a'_0 = a'_{02}$

Raíz Simple	Raíz Múltiple
$x = \dfrac{2\sqrt{a'^2_2 - 3a'_1} - a'_2}{3}$	$x = -\dfrac{\sqrt{a'^2_2 - 3a'_1} + a'_2}{3}$

Fuente: Creación Propia

Dados estos resultados y los análisis que se siguen, se pueden escribir los siguientes tres teoremas:

Teorema 1. *Dada la ecuación* (2) *con solución múltiple (*$\Delta = 0$*) y los coeficientes* a'_2 *y* a'_1 *racionales. Si* $a'^2_2 - 3a'_1$ *es cuadrado perfecto, entonces* a'_0 *y las soluciones de la ecuación* (2) *son racionales.*

Teorema 2. *Sea la ecuación* (2) *con tres soluciones reales (*$\Delta \leq 0$*), entonces sus soluciones están en el intervalo cerrado:* $I = \left[-\frac{2\sqrt{a'^2_2 - 3a'_1} + a'_2}{3}, \ \frac{2\sqrt{a'^2_2 - 3a'_1} - a'_2}{3}\right]$*. Si la ecuación* (2) *tiene solución única (*$\Delta > 0$*) y* $a'^2_2 - 3a'_1 > 0$*, entonces esta última está en el intervalo complemento* I^c*.*

Teorema 3. *Dada la ecuación* (2)*, si* $a'^2_2 - 3a'_1 < 0$*, entonces* $\Delta > 0$*. Si* $a'^2_2 - 3a'_1 \geq 0$*, entonces* $-\infty < \Delta < \infty$

La demostración del teorema 1 es sencilla, se desprende del análisis de este apartado, ya que como se puede observar en las cuatro posibilidades existentes la cantidad subradical $a'^2_2 - 3a'_1$ aparece. Análogamente los teoremas 2 y 3 se justifican del análisis para los tres casos de Δ (Ivorra, 2009). Y de la subsección 3.1.

4. Discusiones

4.1. La Independencia

En esta sección se revisa el tema de la independencia entre las dos fórmulas, (TC) y (UNFEC).

La independencia sugiere que aunque ambas fórmulas para una ecuación cúbica dada, dan el mismo resultado numérico (aplicándolas adecuadamente) sin embargo no hay combinación lineal posible para obtener una de la otra. Usando la letra f para denotar la función solución TC; Se plantea la independencia lineal como sigue:

$$\alpha_1 f(a_2', a_1', a_0') + \alpha_2 g(a_2', a_1', a_0') = 0 \tag{6}$$

Dos vectores f y g son independientes si y solo si para satisfacer (6) se da que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (DiPrima y Boyce, 1976; Grossman y Flores, 2012).
Se puede observar que reemplazando la condición de g_2 en f las fórmulas quedan iguales. Por lo tanto, los valores de los $\alpha_i{}'s$ no son todos cero al mismo tiempo es decir $\alpha_1 = -\alpha_2$.

Pero para el caso de g_1 y f, a simple vista no se puede observar esta dependencia ni independencia. A continuación se expone un ejemplo particular donde se llega a ver una dependencia entre ambas. Sea la ecuación particular:

$$x^3 + a_2' x^2 + a_1' x + \frac{a_1'^2}{3a_2'} = 0 \tag{7}$$

Reemplazando los coeficientes de la ecuación (7) en las fórmulas TC y UNFEC se obtienen las siguientes soluciones respectivamente (Ayala, 2018a, 2019b).:

$$x = \sqrt[3]{\frac{6a_2'^2 a_1' - a_2'^4 - 9a_1'^2}{27a_2'}} + \sqrt[3]{\frac{3a_2' a_1' - a_2'^3}{27}} - \frac{a_2'}{3}$$

$$x = \frac{a_1'}{\sqrt[3]{a_2'(a_2'^2 - 3a_1')} - a_2'}$$

Se multiplica esta última expresión de x que corresponde a UNFEC por la siguiente expresión:
$\sqrt[3]{a_2'^2(a_2'^2 - 3a_1')^2} + a_2' \sqrt[3]{a_2'(a_2'^2 - 3a_1')} + a_2'^2$, tanto al numerador como el denominador para no alterar la expresión, con lo cual después de los cálculos necesarios queda exactamente la expresión de x en TC y se puede aplicar de manera inversa usando los artificios correspondientes. Entonces se puede verificar una dependencia lineal de g_1 con f en este caso particular (Ayala, 2018a, 2019b).

4.2. Fórmula Directa

Es importante saber que el mecanismo de la binomialización aporta a generar fórmulas que permiten encontrar la **representación analítica real** para familias de cúbicas de tres raíces reales simples, algo que actualmente está limitado a casos muy reducidos, de hecho hay un teorema que estipula lo siguiente:

Teorema 4. *"Sea κ un subcuerpo del cuerpo de los números reales, y consideremos una cúbica con coeficientes en κ que cumpla $\Delta < 0$ y que no contiene raíces en κ. Entonces no es posible expresar (ninguna de) sus raíces en función de sus coeficientes mediante sumas, productos, cocientes y raíces que sean números reales (es decir, con radicando positivo cuando el índice sea par)"(Ivorra, 2009, p.17).*

Un ejemplo del anterior teorema sería el siguiente: La ecuación 2 con todos sus coeficientes enteros y tres raíces irracionales diferentes.

La binomialización ha logrado actualmente casos que no entran en contradicción con el Teorema 4 sólo por un coeficiente, a continuación se expone un ejemplo con el término independiente condicionado (Ayala, 2019a). Sea la ecuación particular:

$$-2t^3 - 5t^2 - \frac{25}{9}t - \frac{125}{243} + \frac{c_0^*}{3} = 0 \tag{8}$$

El valor de c_0^* obedece a la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{c_0 + \frac{125}{81}} + \sqrt[3]{\frac{c_0}{3} + \frac{-125}{243}} + \frac{-5\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{9}} = 0 \tag{9}$$

La ecuación (9) tiene una sola raíz de ahí que c_0 tiene representación analítica real. Luego:

$$t = \sqrt[3]{\frac{-62{,}5}{243} - \frac{c_0^*}{6}}$$

que también tiene representación analítica real, usando aproximaciones:

$c_0 = 1{,}3325652124$ y $t_1 = -0{,}782590471$, las otras soluciones de la ecuación (8) son: $t_2 = -0{,}026530914$ y $t_3 = -1{,}690878614$.

El segundo ejemplo ilustra otra familia de ecuación cúbica de tres raíces reales diferentes donde se tiene solución por radicales para sus tres soluciones, sin embargo al estar condicionado a una forma dada su término independiente donde este no es un número racional, no contradice el teorema 4.

$$-\frac{1}{2}t^3 - t^2 + 3t + c_0 = 0;$$

$$c_0 = \left[\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{11}{3}} - \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{11\sqrt[3]{2}}{18\sqrt[3]{3}}}\right) + \sqrt{\frac{11\sqrt[3]{2}}{18\sqrt[3]{3}}}\right]^3 - 8\left(\sqrt{\frac{11}{12}} - \frac{1}{3}\right)^3.$$

Luego el valor de t es:

$$t = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+1\right)\sqrt{\frac{11}{3}-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt{\frac{11\sqrt[3]{2}}{18\sqrt[3]{3}}}-\frac{2}{3}}$$

5. Conclusiones

Es importante observar que dado este nuevo enfoque de resolución de la ecuación cúbica, se abre una pequeña puerta para el análisis de esta metodología y su aplicación a otros polinomios, de hecho la binomialización como se ve en los dos ejemplos de la subsección de discusión 4.2, aporta con fórmulas por radicales de familias que según la teoría actual se pueden expresar con números complejos o forma trigonométrica (Ivorra, 2009; Wells y Pereda, 1917).

El enfoque de la binomialización, incluso aporta en el diseño de un algoritmo con una muy buena convergencia pudiéndose posiblemente calcular su "eficiencia" (Ayala, 2018b). Es muy comprensible pensar entonces en su extensión a otros polinomios al menos de grados cercanos.

También en la sección de discusión se tiene la subsección 4.1 donde se analiza la independencia lineal entre ambas fórmulas (TC y UNFEC) mostrándose ejemplos que analizan y buscan una demostración formal para el resultado definitivo sobre la misma. Aunque de 3.2 se puede apreciar una independencia lineal entre ellas ¿por qué?.

Para finalizar se hace hincapié en la potencial generalización de estos resultados ya que seguramente aportarían con nueva teoría y revelarían más conocimiento sobre la naturaleza de las raíces de las ecuaciones polinómicas de cualquier grado.

5.1. Ideas Clave

En la subsección 3.2 se aprecia la forma trigonométrica de esta nueva fórmula concretamente $g_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, donde se puede observar la presencia de las funciones seno y coseno a diferencia de la forma tradicional en la cual sólo aparece el coseno (Wells y Pereda, 1917; Ivorra, 2009). Aquí se puede pensar en aplicaciones a las identidades trigonométricas.

En otra subsección la 3.3 se analizan las soluciones de la ecuación 2 cuando hay multiplicidad y se obtienen todas las raíces para este caso. Se aprecia una más bella simplificación y sencillez en las soluciones encontradas en 3.3 (cuadros 1 y 2) que las dadas en (Ivorra, 2009). Este análisis junto con la teoría expuesta en 3.1 nos lleva a la formulación de los teoremas 1, 2 y 3 .

6. Agradecimientos

El Autor desea agradecer a Dios por todo. A su madre Sra. Dora Rocafuerte y a su padre Sr. Hernán Ayala por el apoyo recibido; también a sus padrinos Dr. Anton Schiller y Sra. Annemarie, está muy agradecido con ellos.

7. Bibliografía

Referencias

Arya, J. C., y Lardner, R. W. (1989). *Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences*. Tercera Edición, Londres: Prentice Hall.

Ayala, H. (2018a). *Análisis y divulgación de una fórmula para la sol. de una ecuac.cubic en 1 var.* Rincón Matemático. Descargado de `https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=103278.0.`

Ayala, H. (2018b). Resultados matemáticos. *Scribd*, 1-2. Descargado de `https://es.scribd.com/document/388207838/RESULTADOS-MATEMATICOS`

Ayala, H. (2019a). *Ejemplo de una fórmula "directa" para la cúbica.* Rincón Matemático. Descargado de `https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=110430.`

Ayala, H. (2019b). Una nueva fórmula analítica para la cúbica. *Scribd*, 1-6. Descargado de `https://es.scribd.com/document/413965819/Una-Nueva-Formula-Analitica-para-La-Cubica-pdf`

Carreño, X. C., y Cruz, X. S. (2003). *Algebra*. Primera Edición, México: Publicaciones Cultural.

DiPrima, R. C., y Boyce, W. E. (1976). *Introduction to differential equations*. Primera Edición, New York: John Wiley & Sons.

González, M. O., y Mancill, J. D. (1962). *Algebra elemental moderna*. Volumen 2, Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Grossman, S. I., y Flores, J. J. (2012). *Algebra lineal*. Springer Science & Business Media.

Hurtado, F., Quintana, A., Sanahuja, B., Taniguchi, P., y Villanova, J. (1987). *Atlas* *de matemáticas (álgebra y geometría + ejercicios)*. Barcelona: Ediciones Jover.

Ivorra, C. (2009). Las fórmulas de cardano-ferrari. *Página personal de Carlos Ivorra*, 2, 6-8, 10, 11, 17. Descargado de `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf`

Solaeche, M. C. (1993). *La controversia l'hospital-bernoulli.* Divulgaciones Matemáticas, 1(1), 99-104. Descargado de `https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/DM/v1/art7.pdf`

Wells, W., y Pereda, E. (1917). *Trigonometría plana y esférica*. Boston: D.C. Heath & Co. Editors.