

Cálculos de splitting de separatrices para la aplicación microtrón

Splitting of separatrices calculations for the microtron map

Oswaldo J. Larreal B.

Recepción: 03/04/2020 Aceptación: 09/12/2020 Publicación: 31/01/2021

Abstract Initially, a review of some works on separator splitting is made, such as standard map, McMillan map and the Hopf-Zero, in which the measures used for the calculation of the splitting are highlighted: angle, distance or area between transversal intersections of heteroclinical points. The necessary concepts are added for the development of the theory related to the study of the microtron map, after having all the definitions a study of the application of the microtron is carried out, determining which are the fixed points and their type according to the relationship with the parameter. Conditions are established to indicate when the origin is a saddle type hyperbolic fixed point, with which local parameterizations are made that are analytically prolonged until the first intersection occurs on the X , in this intersection the determines the angle formula observing that it has an exponential factor is not analytical at the origin. Thus we arrive at the conclusion that the manifold intersect transversely, forming a non-analytical exponential angle when the parameter is small.

Keywords manifold, microtron, splitting of separatrices.

Resumen Inicialmente se hace una reseña de algunos trabajos sobre splitting de separatrices, tales como standard map, McMillan map y la Hopf-Zero, en ellos se resalta las medidas usadas para el cálculo del splitting: ángulo, distancia o área entre intersecciones transversales de puntos heteroclinicos. Se agregan los conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría relacionada con el estudio del mapa del microtrón, luego de tener todas las definiciones se realiza un estudio de la aplicación del microtrón determinando cuales son los puntos fijos y su tipo de acuerdo a la relación con el parámetro. Se establecen condiciones para indicar cuando el origen es un punto fijo hiperbólico tipo silla, con lo cual se hacen parametrizaciones locales que son prolongadas analíticamente hasta que ocurre la primera intersección

Oswaldo José Larreal Barreto, PhD

Docente, Universidad Técnica de Manabí, Departamento de Matemáticas y Estadísticas, Instituto de Ciencias Básicas, Portoviejo, Ecuador, e-mail: oswaldo.larreal@utm.edu.ec, 
<https://orcid.org/0000-0001-7604-7030>

sobre el X , en esta intersección se determina la fórmula del ángulo observando que tiene un factor exponencial no analítico en el origen. Así llegamos a concluir que las variedades se intersecan transversalmente, formando un ángulo exponencial no analítico cuando el parámetro es pequeño.

Palabras Claves microtrón, splitting de separatrices, variedades.

1 Introducción

El microtrón es un acelerador de partículas cíclico de bajo consumo y con una alta ganancia de energía. En el mismo las partículas son aceleradas por campo eléctrico, el cual está ubicado en acelerador lineal (linac) y son recirculadas por dos imanes forma “D”, ver figura 1. También es llamado “ciclotrón de electrones” debido a su parecido con el ciclotrón clásico.

El microtrón acelera las partículas hasta que logran obtener velocidades cercanas a relativista, es decir cercana a la velocidad de la luz. Esto es una ventaja respecto a otros aceleradores. La relación entre el cambio de fase $\delta\phi_n$ con respecto a la fase síncrona ϕ_n en la n -ésima vuelta del linac (acelerador lineal) y el excedente de energía (δW_n) en la n -ésima órbita está dada por:

$$\delta\phi_{n+1} - \delta\phi_n = 2\pi v \frac{\delta W_n}{\Delta W}$$

El incremento en el excedente de energía adquirido en la n -ésima vuelta del linac es:

$$\delta W_{n+1} - \delta W_n = \Delta W_0 \cos(\phi_s + \delta\phi_{n+1}) - \Delta W$$

Donde $\Delta W = \Delta W_0 \cos(\phi_s)$.

Como referencia acerca del origen, diseño y obtención de la ecuación del microtrón de cambio de fase ver: Lidbjörk (1994); Vladimirov et al. (2014); Praestegaard et al. (2001).

Así tenemos que:

$$\delta\phi_{n+1} = \delta\phi_n + \frac{2\pi v}{\Delta W} \delta W_n \quad (1)$$

$$\delta W_{n+1} = \Delta W_0 \cos(\phi_s + \delta\phi_{n+1}) + \delta W_n - \Delta W$$

con $\Delta W = 2$, $v = 1$ constante y

$$\Delta W_0 = \frac{\Delta W}{\cos(\phi_s)} = \frac{2}{\cos(\phi_s)} \quad (2)$$

La ecuación (1) sugiere el uso de una aplicación definida recursiva, por este motivo podemos asociar este modelo con un sistema dinámico. Con lo cual escribimos la aplicación de la siguiente forma:

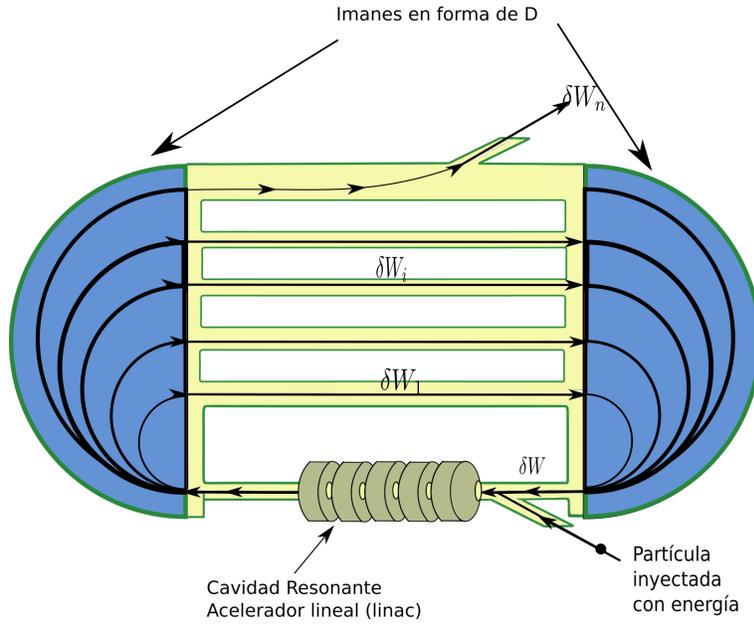


Figura 1: Esquema del microtrón
Fuente: Elaboración propia

$$F(x, y) = F_{\phi_s}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \quad (3)$$

donde

$$f_1(x, y) = x + \pi y \quad (4)$$

$$f_2(x, y) = \Delta W_0 \cos(\phi_s + f_1(x, y)) + y - 2 \quad (5)$$

Con lo cual

$$(\delta\phi_{n+1}, \delta W_{n+1}) = F_{\phi_s}(\delta\phi_n, \delta W_n).$$

Podemos observar que la aplicación presenta las siguientes propiedades:

1. $F_{-\phi_s}(2\phi_s + x, y) = F_{\phi_s}(x, y) + (2\phi_s, 0)$.
2. $F_{\phi_s}(x, y) = F_{\phi_s+2\pi}(x, y)$.
3. $F_{\phi_s}(x + 2\pi, y) = F_{\phi_s}(x, y) + (2\pi, 0)$.
4. F_{ϕ_s} tiene dos puntos fijos que son: $(0, 0)$ y $(-2\phi_s, 0)$.
5. F_{ϕ_s} es reversible respecto de la involución o reversor $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $R(x, y) = (x + \pi y, -y)$, es decir $F_{\phi_s}^{-1} = R \circ F_{\phi_s} \circ R$, y $R \circ R = Id$.

La matriz jacobiana del mapa F_{ϕ_s} es:

$$DF_{\phi_s}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ -\frac{2\sin(\phi_s+x+\pi y)}{\cos(\phi_s)} & 1 - \frac{2\pi\sin(\phi_s+x+\pi y)}{\cos(\phi_s)} \end{bmatrix}$$

Para $p_1 = (0, 0)$ tenemos que:

$$M_1 = M_{\phi_s} = DF_{\phi_s}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ -2\tan(\phi_s) & 1 - 2\pi\tan(\phi_s) \end{bmatrix}$$

usando (2).

Esta matriz tiene asociada el polinomio característico:

$$p_{M_1}(t) = t^2 + 2(-1 + \pi\tan(\phi_s))t + 1$$

Análogamente tenemos por la propiedad 1 en $p_2 = (-2\phi_s, 0)$:

$$M_2 = DF_{\phi_s}(p_2) = M_{-\phi_s} = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 2\tan(\phi_s) & 1 + 2\pi\tan(\phi_s) \end{bmatrix}$$

y cuyo polinomio característico es:

$$p_{M_2}(t) = t^2 - 2(1 + \pi\tan(\phi_s))t + 1.$$

Los valores propios para M_1 y M_2 tienen la misma forma:

$$\lambda_{1,2}^{(i)} := a_i \pm \sqrt{a_i^2 - 1}, i = 1, 2 \quad (6)$$

donde $a_1 = 1 - \pi\tan(\phi_s)$, para el caso de $p_1 = (0, 0)$ y $a_2 = 1 + \pi\tan(\phi_s)$ para $p_2 = (-2\phi_s, 0)$.

Como el término independiente del polinomio característico es 1 entonces tenemos que los autovalores de M_1 (M_2) cumplen la siguiente condición: si λ_1 es un autovalor, entonces $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ es el otro autovalor.

Obsérvese que si ϕ_s está en $(-\arctan(\frac{2}{\pi}), 0)$, tenemos que los valores propios para M_1 son reales distintos y p_1 es un punto fijo hiperbólico tipo silla. En cambio para M_2 son complejos conjugados (caso elíptico). Además los autovalores de M_2 tienen la forma $\lambda_{1,2} = e^{\pm\theta i}$, para este caso tenemos:

$$a_2 = \cos(\theta), \text{ con } \theta \in (0, \pi). \quad (7)$$

Es decir

$$1 + \pi\tan(\phi_s) = \cos(\theta), \text{ con } \theta \in (0, \pi). \quad (8)$$

El caso en el cual ϕ_s pertenece a $(0, \arctan(\frac{2}{\pi}))$, es equivalente al caso anterior, solo hay que intercambiar los puntos por la propiedad 1 dada en la página 3. En el

caso $\phi_s = 0$, F_{ϕ_s} sufre una bifurcación en la cual los puntos fijos colapsan en uno solo dando lugar al nacimiento de un punto fijo parabólico.

También sabemos que la parte lineal (M_2) de la aplicación alrededor del punto fijo elíptico es conjugado con:

$$D = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

con

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ 2\sin(\theta) & -2(1 - \cos(\theta)) \end{bmatrix}$$

satisfaciendo $M_2 = P^{-1}DP$, con la cual tenemos que

$$M_2^n = \begin{bmatrix} \frac{\sin(n\theta) - \sin(n-1)\theta}{\sin(\theta)} & \frac{2\pi \sin(n\theta)}{2\sin(\theta)} \\ -\frac{2(1 - \cos(\theta))\sin(\theta)}{\pi \sin(\theta)} & \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \end{bmatrix}$$

Ya teniendo los ingredientes para realizar el estudio dentro los sistemas dinámicos. Ahora veamos la distribución del trabajo, en una primera etapa se realiza una breve descripción de los antecedentes del splitting, además las definiciones necesarias para luego introducir las parametrizaciones que serán usadas en el cálculo numérico de las variedades del *microtrón*, para así poder determinar el ángulo entre la primera intersección transversal. Para finalizar en las conclusiones se muestran los resultados obtenidos.

2 Acerca de splitting

Uno de los primeros trabajos que se realizaron en el estudio del cálculo de splitting de separatrices, fue “Splitting of separatrices for the Chirikov standard map”, el cual data de los años 80, (Lazutkin, 2003), ese trabajo consistió en el cálculo del ángulo de intersecciones transversales entre variedades de puntos heteroclínicos en el standard map, ver las figuras 2(a), 2(b). En otros artículos como Treshchev (1997); Chernov (2000); V. Gelfreich y Sauzin (2001); Delshams y Ramírez-Ros (1999), hacen cálculo de ángulos de intersecciones transversales y área de lóbulo para aplicaciones que tienen puntos heteroclínicos. En el caso de flujo en \mathbb{R}^3 tenemos como referencia la ecuación diferencial Hopf-Zero, en el artículo de Baldomá y Seara (2006) se calcula la distancia entre las variedades uno dimensional de los puntos críticos, en la sección de Poincaré $z = 0$, ver las figuras 3(a), 3(b).

La figura 4(a) muestra un ejemplo de una curva que representa la conexión homoclínica de un punto fijo hiperbólico de una aplicación en \mathbb{R}^2 , mientras que la figura 4(b) muestra las intersecciones homoclínicas transversales.

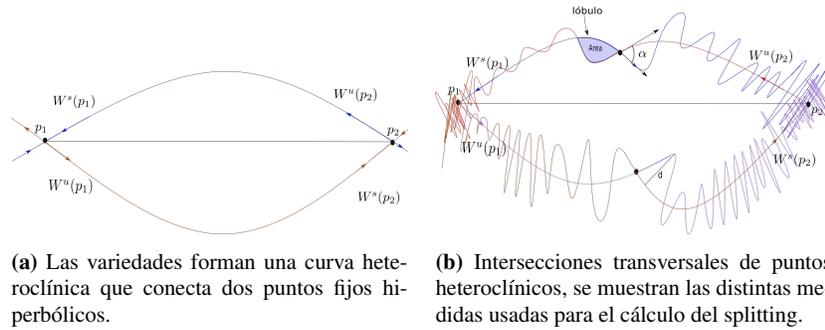


Figura 2: Variedades de puntos fijos hiperbólicos
Fuente: Elaboración propia

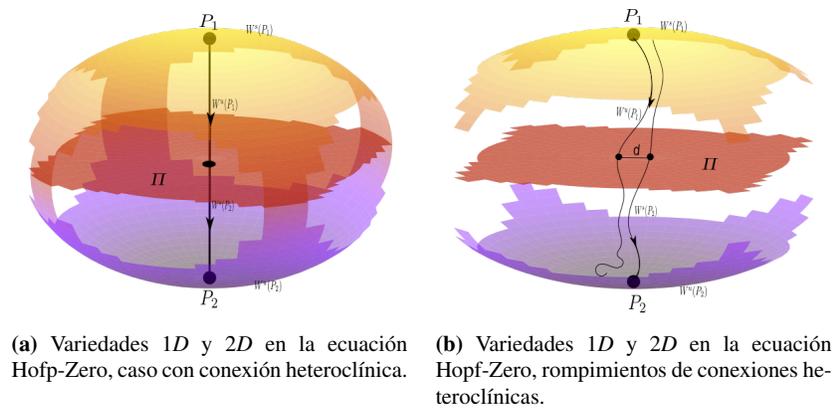
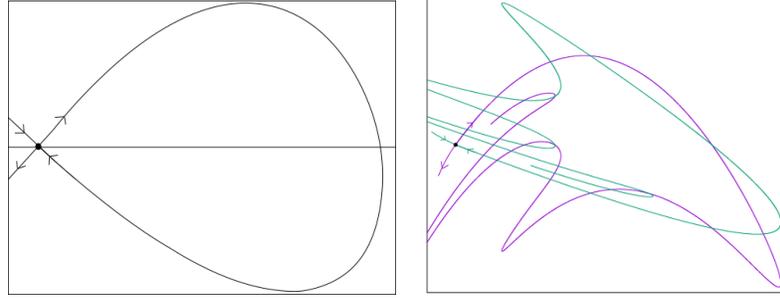


Figura 3: Variedades de la Hopf-Zero
Fuente: Elaboración propia

Para el tratamiento de este tipo de problema en casi todos los casos, se usan técnicas de series formales divergentes junto a la teoría de la resumación de Borel (V. Gelfreich y Simó, 2008; V. Gelfreich y Sauzin, 2001; V. G. Gelfreich, 1999), este proceso implica la determinación de una ecuación outer para luego obtener la ecuación inner. Esto es debido a que la medida del splitting está dada por series no analíticas respecto al parámetro.

En muchos casos cuando el parámetro es pequeño, es difícil distinguir si existen intersecciones transversales, por tal motivo el objetivo principal de este trabajo es determinar si existe una curva homoclínica cuando el parámetro es pequeño para la ecuación del microtrón, además establecer la relación existente entre el parámetro y el ángulo en la primera intersección transversal. Claramente este trabajo está enfocado en los cálculos numéricos y no analíticos a pesar que se usan técnicas analíticas, lo cual refleja de forma elemental como puede ser aplicado a cualquier otro problema de cálculo de splitting.

En la tesis doctoral de Larreal (2011), se muestra todo el desarrollo del cálculo del splitting de separatrices para el microtrón abordando el problema de una forma semianalítica, mientras que en este trabajo se presenta solo la parte numérica y computacional relacionada con el cálculo del splitting.



(a) Las variedades forman una curva homoclínica, puntos homoclínicos no transversales.

(b) Intersecciones transversales de puntos homoclínicos.

Figura 4: Variedades de un punto fijo hiperbólico

Fuente: Elaboración propia

3 Definiciones

Esta sección esta dedicada a dar algunas definiciones necesarias para el desarrollo del trabajo.

Definición 1 Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, se dice que p es un punto fijo si $F(p) = p$. Si además el módulo de los autovalores de DF_p son distintos de uno, se llama hiperbólico.

Definición 2 Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, se dice que p es un punto periódico de periodo n si $F^n(p) = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{n \text{ veces}}(p) = p$.

Definición 3 Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, difeomorfismo y p un punto fijo de F , se dice que p es hiperbólico si $DF_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ es hiperbólico. Un punto periódico de periodo k se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de F^k .

Definición 4 Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un homeomorfismo y $x \in \mathcal{M}$. Se define el conjunto estable de x como

$$\mathcal{W}^s(x) = \{y \in \mathcal{M} : d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty\}$$

y el inestable como

$$\mathcal{W}^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty\}$$

donde d es una métrica de \mathcal{M} .

Definición 5 Sean $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico. Un punto $x \in \mathcal{W}^s(p) \cap \mathcal{W}^u(p)$ diferente de p se llama punto homoclínico. Se dice además que es transversal si la intersección $\mathcal{W}^s(p) \cap \mathcal{W}^u(p)$ es transversal en x . La órbita de un punto homoclínico (transversal) es llamada órbita homoclínica (transversal).

Nuestro interés principal es la aplicación que modela el cambio de fase y energía del acelerador de partículas microtrón, el cual está dado por:

$$\begin{cases} \delta\phi_{n+1} - \delta\phi_n &= 2\pi\nu \frac{\delta W_n}{\Delta W}, \\ \delta W_{n+1} - \delta W_n &= \Delta W_0 \cos(\phi_s + \delta\phi_{n+1}) - \Delta W \end{cases}$$

donde la fase de error es $\delta\phi_n$ con respecto a la fase síncrona ϕ_n en la n -ésima vuelta, la fase de error del excedente de energía es δW_n , ΔW y ν son las constantes 2 y 1 respectivamente, $\Delta W_0 = \Delta W / \cos(\phi_s)$ y ϕ_s es el parámetro.

4 Cálculos numéricos de las intersecciones transversales de las variedades en el microtrón

En esta sección vamos a suponer que $\phi_s \in (-\arctan(2/\pi), 0)$, por lo tanto el origen es un punto fijo hiperbólico de $F = (f_1, f_2)$ definido como en: (3), (4) y (5).

Ahora buscaremos parametrizaciones de las variedades locales, para luego hacer una extensión de las mismas hasta la primera intersección transversal:

$$\psi_{loc}^{s,u}(t) = (x^{s,u}(t), y^{s,u}(t)),$$

donde $x^{s,u}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{s,u} t^i$ y $y^{s,u}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^{s,u} t^i$, s denota estable y u inestable. Estas parametrizaciones “naturales” deben cumplir la propiedad:

$$F(\psi^{s,u}(t)) = \psi(\lambda^{s,u}t)$$

donde $\lambda^u = 1/\lambda^s = \lambda > 1$, λ^s y λ^u son los autovalores de $DF(0,0)$.

De forma análoga se realizan parametrizaciones para flujo en: Delshams y Ramírez-Ros (1998); Ramírez-Ros (2005). En esencia se usan los métodos expuestos en Simo (1990).

Proposición 1 Las variedades locales del origen $W_{loc}^{u,s}(0,0)$ de la aplicación F pueden escribirse como:

$$\Psi_{loc}^{s,u}(t) = (x^{s,u}(t), y^{s,u}(t)) \quad (9)$$

$$= \left(\sum_{i=0} a_i^{s,u} t^i, \sum_{i=0} b_i^{s,u} t^i \right) \quad (10)$$

donde los coeficientes $a_i^{s,u}$ y $b_i^{s,u}$ están dados por las siguientes ecuaciones recursivas.

$$a_0^u = 0, a_1^u = 1, c_0 = \cos(\phi_s), \text{ para } i \geq 2$$

$$\begin{cases} c_i = & -\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j s_{i-j} a_j^u \\ S_i = & \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j c_{i-j} a_j^u \\ a_i^u = & \frac{-\pi c_i + \sinh^2(h/2) S_i}{\sinh^2(ih/2) - 2 \sinh^2(h/2)} \\ s_i = & c_i + a_i^u, \end{cases}$$

para $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} b_i^u &= \frac{\lambda^i - 1}{\pi} a_i^u \\ a_i^s &= a_i^u \\ b_i^s &= \frac{1 - \lambda^i}{\pi \lambda^i} a_i^s \end{aligned}$$

h está dada por:

$$\tan(\phi_s) = -\frac{2}{\pi} \sinh^2\left(\frac{h}{2}\right) \quad (11)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que la variedad inestable local se parametriza como: $\Psi_{loc}^u(t) = (x^u(t), y^u(t)) = \left(\sum_{i=0} a_i^u t^i, \sum_{i=0} b_i^u t^i \right)$. Para simplificar la notación pondremos $a_i^u = a_i, b_i^u = b_i$.

Podemos suponer que $a_0 = b_0 = 0$ ya que el origen es el punto fijo.

Ahora usamos la ecuación:

$$F(\Psi(t)) = \Psi(\lambda t) \quad (12)$$

Donde $\Psi(t) = (x(t), y(t))$ y F está dada por (4) y (5).

Recordemos que el polinomio característico asociado a $DF(p_1)$ ($p_1 = (0, 0)$) es:

$$p_{M_1}(x) = x^2 - 2ax + 1 \text{ donde } a = 1 - \pi \tan(\phi_s)$$

sus raíces son:

$$\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

De la ecuación del polinomio característico podemos deducir que:

$$\tan(\phi_s) = -\frac{(\lambda - 1)^2}{2\lambda\pi} = -\frac{1}{2\pi}(\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}})^2$$

donde $\lambda = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$.

Así

$$\tan(\phi_s) = -\frac{2}{\pi} \sinh^2\left(\frac{h}{2}\right) \quad (13)$$

donde $h = \ln(\lambda)$.

Así obtenemos de la ecuación (12):

$$\begin{cases} f_1(x(t), y(t)) = x(t) + \pi y(t) & = x(\lambda t) \\ f_2(x(t), y(t)) = \Delta W_0 \cos(\phi_s + x(\lambda t)) + y(t) - 2 & = y(\lambda t) \end{cases}$$

Usando las ecuaciones (13) y (2) tenemos:

$$x(t) + \pi y(t) = x(\lambda t) \quad (14)$$

$$2 \left(\cos(x(\lambda t)) + \frac{2}{\pi} \sinh^2(h/2) \sin(x(\lambda t)) - 1 \right) + y(t) = y(\lambda t) \quad (15)$$

La ecuación (14) es equivalente a:

$$y(t) = \frac{x(\lambda t) - x(t)}{\pi} \quad (16)$$

De la anterior ecuación obtenemos:

$$b_i = \frac{\lambda^i - 1}{\pi} a_i \quad (17)$$

De (15) y (16) tenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\cos(x(t)) + \frac{2}{\pi} \sinh^2(h/2) \sin(x(t)) - 1 \right) \\ = x(\lambda t) - 2x(t) + x(t/\lambda) \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora suponiendo que

$$\cos(x(t)) = \sum_{k=0} c_k t^k \quad (19)$$

y

$$\sin(x(t)) = \sum_{k=0} s_k t^k$$

obtenemos:

$$\begin{cases} c_{i+1} = -\frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i (j+1) s_{i-j} a_{j+1} \\ s_{i+1} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i (j+1) c_{i-j} a_{j+1} \end{cases} \quad (20)$$

Sustituyendo (19) en la ecuación (18) obtenemos para $k > 0$:

$$2 \pi \lambda^k \left(c_k + \frac{2}{\pi} \sinh^2(h/2) s_k \right) = (\lambda^k - 1)^2 a_k$$

$$\Downarrow$$

$$a_k = \frac{\pi c_k + 2 \sinh^2(h/2) s_k}{\sinh^2(kh/2)} \quad (21)$$

y para $k = 0$, $c_0 = 1$, $s_0 = 0$ y $a_0 = 0$.

De lo cual:

$$\begin{cases} c_i = -\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j s_{i-j} a_j \\ s_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j c_{i-j} a_j \\ a_i = \frac{\pi c_i + 2 \sinh^2(h/2) s_i}{\sinh^2(ih/2)} \end{cases}$$

De lo anterior se deduce:

$$c_i = -s_0 a_i - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j s_{i-j} a_j$$

$$s_i = c_0 a_i + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j c_{i-j} a_j$$

Con lo cual

$$a_i = \frac{-\frac{\pi}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j s_{i-j} a_j + 2 \sinh^2(h/2) \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j c_{i-j} a_j}{\sinh^2(ih/2) + \pi s_0 - 2 \sinh^2(h/2) c_0}$$

Así las sucesiones se pueden escribir como:

$$\begin{cases} c_i = -\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j s_{i-j} a_j \\ S_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i-1} j c_{i-j} a_j \\ a_i = \frac{-\pi c_i + \sinh^2(h/2) S_i}{\sinh^2(ih/2) - 2 \sinh^2(h/2)} \\ s_i = c_i + a_i \end{cases} \quad (22)$$

Ahora para poder calcular la variedad estable procedemos de manera análoga, solo que vamos a intercambiar la F en la ecuación (12) por su inversa $G = F^{-1}$.

Si denotamos:

$$G(x, y) = G_{\phi_s}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)),$$

donde:

$$\begin{aligned} g_2(x, y) &= y - \Delta W_0 \cos(\phi_s + x) + 2 \\ g_1(x, y) &= x - \pi g_2(x, y) \end{aligned}$$

Tenemos la ecuación:

$$G(\bar{\psi}(t)) = \bar{\psi}(\lambda t), \quad (23)$$

Por lo tanto:

$$g_1(x(t), y(t)) = x(\lambda t)$$

$$g_2(x(t), y(t)) = y(\lambda t)$$

↓

$$g_2(x(t), y(t)) = y(t) - \Delta W_0 \cos(\phi_s + x(t)) + 2 = y(\lambda t)$$

$$x(t) - \pi g_2(x(t), y(t)) = x(\lambda t)$$

Así tenemos que estas ecuaciones las podemos escribir como:

$$x(\lambda t) = x(t) - \pi y(\lambda t) \quad (24)$$

$$y(\lambda t) = y(t) - \Delta W_0 \cos(\phi_s + x(t)) + 2 \quad (25)$$

De la ecuación (24) obtenemos:

$$b_i = \frac{1 - \lambda^i}{\pi \lambda^i} a_i \quad (26)$$

Mientras que la ecuación (25) es equivalente a

$$x(\lambda^2 t) - 2x(\lambda t) + x(\lambda^2 t) = \pi \Delta W_0 \cos(\phi_s + x(\lambda t)) - 2\pi,$$

usando (2) y (14) vemos que esta ecuación es la misma ecuación que (18).

Lema 1 $R(\psi^u(t)) = \psi^s(\lambda t)$.

Demostración. Usando las fórmulas de los coeficientes de $\psi^{u,s}(t)$ dada en la proposición 1, tenemos que

$$x^s(t) = x^u(t).$$

Pero además

$$b_i^s = -b_i^u / \lambda^i,$$

por lo tanto

$$y^s(\lambda t) = \sum_{i=0} b_i^s(\lambda t)^i = - \sum_{i=0} b_i^u t^i = -y^u(t).$$

Así

$$R(\psi^u(t)) = (x^u(t) + \pi y^u(t), -y^u(t)) = (x^u(\lambda t), y^s(\lambda t)) = \psi^s(\lambda t)$$

Con la anterior proposición tenemos calculados los coeficientes de las variedades locales estable e inestable, es decir que ya estamos en condiciones de trabajar numéricamente para obtener las prolongaciones hasta hallar su primera intersección. Para ello usaremos que la aplicación F es reversible y veremos que las parametrizaciones obtenidas son simétricas respecto de R . Esto nos permite comprobar que intersecan en la recta $y = 0$ y que dicha intersección es un punto homoclínico.

Observación 1 *Por el lema anterior tenemos que si existe $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $y^u(t_0) = 0$, entonces obtenemos que $x^u(t_0) = x^s(\lambda t_0)$, $-y^u(t_0) = y^s(\lambda t_0) = 0$, usando la ecuación $R(\psi^u(t_0)) = \psi^s(\lambda t_0)$.*

Es decir que el punto $\psi^u(t_0) = (x^u(t_0), 0) = (x^s(\lambda t_0), 0)$ es un punto homoclínico, al cual llamaremos la primera intersección de las variedades estable e inestable.

Además con este resultado tenemos garantizado que si una de las variedades corta al eje X , la otra variedad también lo corta en el mismo punto, dando lugar a un punto homoclínico. Teniendo esto presente podemos hablar de la existencia del ángulo de la primera intersección entre las variedades.

Si estudiamos las variedades invariantes para ϕ_s ó h pequeño, tenemos que la aplicación F sufre una bifurcación cuando $\phi_s = 0$, ($h = 0$), así de esta manera es natural esperar que el ángulo entre las variedades invariantes no esté dado por una potencia de ϕ_s (h) sino que será exponencialmente pequeño en ϕ_s (h), ver V. Gelfreich y Simó (2008). Los resultados presentados en Fontich y Simó (1990) corroboran este hecho.

Si las variedades son exponencialmente próximas, esto trae como consecuencia que el área de la región caótica alrededor de las variedades es exponencialmente pequeña, ver Ramírez-Ros (2005); Kubyshin, Larreal, Ramírez-Ros, y Seara (2017); Larreal (2011). La región caótica es conocida con el nombre de capa estocástica, ver Lazutkin (1990). En Delshams y Ramírez-Ros (1999) calculan la región encerrada

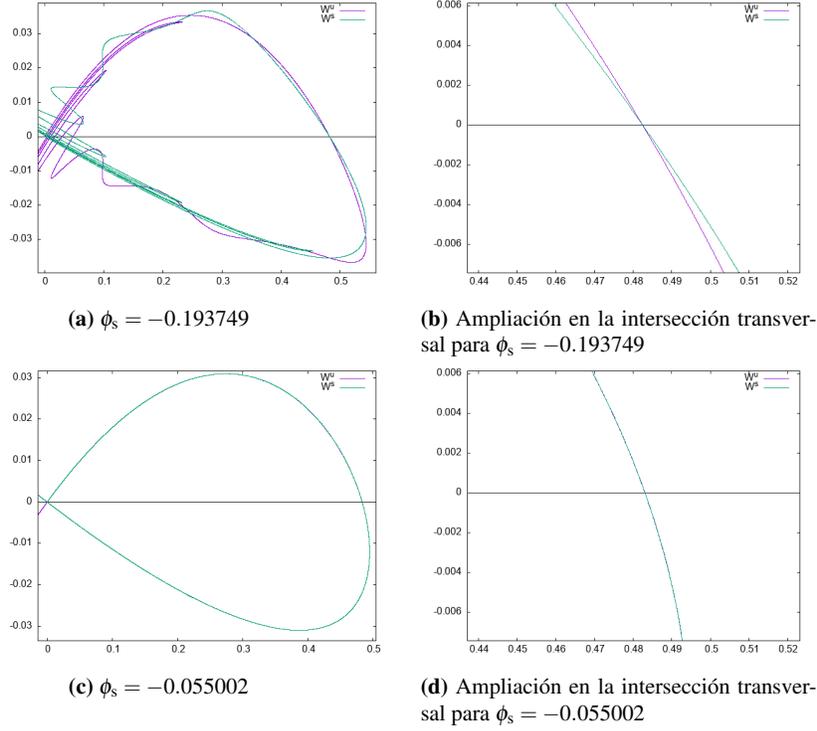


Figura 5: Gráficas de las variedades invariantes del origen para la aplicación de cambio fase y energía del microtrón

Fuente: Elaboración propia

por las variedades estable e inestable la cual es conocida como lóbulo, estos cálculos son realizados para flujo, mientras que nuestro caso es una aplicación.

Observación 2 Si suponemos que la fórmula del ángulo en la primera intersección de las variedades tiene la siguiente forma:

$$\alpha(h) \approx c_2 h^n e^{c_1/h} \quad (27)$$

Entonces:

1. Si h es pequeño, entonces $h \ln(\alpha(h)) \rightarrow c_1$, ver figura A1(a)
2. $\ln(\alpha(h) e^{-c_1/h}) = \ln(c_2) + n \ln(h)$ haciendo $Y = \ln(\alpha(h) e^{-c_1/h})$, $B = \ln(c_2)$, y $X = \ln(h)$ tenemos la ecuación de la recta $Y = B + nX$, ver figura A1(b).
3. Si $h \rightarrow 0$ entonces $\alpha(h) h^{-n} e^{-c_1/h} \rightarrow c_2$, ver figura A1(c).

El siguiente procedimiento se obtuvo usando las sugerencias de los artículos Delshams y Ramírez-Ros (1999), V. G. Gelfreich (1999) y Simo (1990).

1. Usando 1 de la observación 2 podemos encontrar c_1 , ver figura A1(a).
2. Usando el parámetro $h = \ln(\lambda)$, y una precisión $P_0 = 1000$ la cual es la precisión de margen de error.
3. Calculamos $P = P_1 + P_0$, la precisión a usar, para esto debemos usar la ecuación (27), así tenemos que si $10^{P_1} \approx c_2 h^n e^{c_1/h}$, se obtiene $P_1 \approx \lceil c_1 / (\ln(10)h) \rceil$. Esto es debido a que podemos considerar que el orden de $c_2 h^n$ es despreciable en relación de 10^{P_1} y $e^{c_1/h}$.
4. Teniendo el número de cifras podemos determinar el número de términos del desarrollo de Taylor de (10), ver observación 3.
5. Calculamos el punto de corte de la variedad con eje X , usando primero el método de bisección con 8 cifras y luego con Newton, duplicamos el número de cifras en cada iteración hasta obtener el número de cifras necesarias.
6. Por último calculamos el seno del ángulo de la intersección transversal, usando la fórmula $\frac{\det(u,v)}{\|u\|\|v\|}$, donde $u = \psi^u(t_0)$ y $v = \psi^s(t_1)$ representan las derivadas de la parametrización de las variedades inestables y estables en el punto de corte.

En el ítem 6 se ha usado $\det(u, v)$, el cual es conocido como el invariante de Lazutkin ω , el cual está dado por el determinante de las derivadas de las parametrizaciones de las variedades ($\psi^u(s)$ y $\psi^s(s)$) en el punto homoclínico, es decir que:

$$\omega = \det(u, v), \quad (28)$$

donde

$$u = \dot{\psi}^u(s_1), v = \dot{\psi}^s(s_2),$$

y

$$\psi^u(s_1) = \psi^s(s_2).$$

El invariante de Lazutkin a diferencia del ángulo posee la propiedad de invarianza bajo la acción de la aplicación, es decir permanece constante en cada intersección transversal. Ver V. G. Gelfreich (1999) y Lazutkin (2003).

Observación 3 *El número de términos óptimos del desarrollo de Taylor lo podemos determinar encontrando una función de costo, esta se puede determinar con los siguientes pasos:*

- *Asumiendo que las variedades están parametrizadas*

$$\psi(t) = (x(t), y(t)) = \left(\sum_{i=0}^N a_i t^i, \sum_{i=0}^N b_i t^i \right).$$

Únicamente trabajaremos con la variedad inestable, y con la coordenada $x(t)$, $t \in I(t_0) = [0, t_0]$.

- *Si suponemos que $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \rightarrow r$ es decir que tiene radio de convergencia r , así podemos asumir que para N no pequeño, aceptamos la condición:*

$$|a_N| < \frac{1}{r^N}.$$

- Además vamos a suponer que el error de Taylor es $Error = 10^{-P}$, donde P es la precisión, así

$$\|a_{N+1}t^{N+1}\| < Error = 10^{-P}.$$

si $t \in (0, t_0)$, $t_0 < 1$.

- Por lo tanto:

$$\left(\frac{t_0}{r}\right)^{N+1} < 10^{-P}. \quad (29)$$

- Ahora agregando una condición que indique que el intervalo fundamental $I(t_0)$ cambia su tamaño cuando variamos M , donde M es el número de composiciones que debemos realizar para que corte la gráfica de $F^M(\Psi(I(t_0)))$ al eje X .

$$\lambda^M t_0 \approx 1. \quad (30)$$

Así tenemos que (29) y (30) son equivalentes a:

$$(N+1)(\ln(t_0) - \ln(r)) = -P \ln 10. \quad (31)$$

$$M = -\frac{\ln t_0}{h}. \quad (32)$$

De (31) y (32) tenemos $M \approx \frac{P \ln 10}{h(N+1)} - \frac{\ln r}{h}$.

Con los puntos anteriores hemos establecido el número (M) de iteraciones que debemos tener para que la variedad inestable (o estable) corte el eje X .

Adicionalmente debemos calcular el costo del desarrollo de Taylor usado en la parametrización local.

Así tenemos que la ecuación de costo, está dada por el costo del Taylor local + el costo de iteradas hasta el corte del eje X .

Nota:

El costo del desarrollo de Taylor y el costo de las iteradas deben estar medidos en un número de operaciones básicas, por ejemplo podemos tomar como medida; la operación producto $*$, así por ejemplo: $/$, \sin , \cos , \tan , \sinh , etc. deben estar medidos en esta unidad.

Para las implementaciones de este algoritmo se usaron las librerías de multiprecisión (**mpfr**) para $c++$, (Fousse, Hanrot, Lefèvre, Pélissier, y Zimmermann, 2007). Entre las ventajas que se pueden citar tenemos:

- Cada variable se puede inicializar con un número de cifras arbitrario. Es decir no hay una dependencia directa con el número de cifras fijadas por defecto.
- En comparación con otras librerías no necesita ser compilada al cambiar el número de cifras.
- Según las pruebas realizadas en <https://www.mpfr.org/timings.html> se observa que es mucho más rápido que otras librerías que usan multiprecisión.

El programa realizado con este algoritmo ejecutó operaciones con números que tenían más de 10000 cifras decimales. Este programa fue ejecutado en el Cluster

(EIXAM) del Departamento de Matemática 1 de la Universidad Politécnica de Cataluña, en paralelo por varios nodos, en el que cada nodo calculó el valor del ángulo para un valor del parámetro fijo. Así hemos encontrado que la fórmula del ángulo tiene la siguiente forma:

$$\alpha(h) \asymp \frac{\bar{a}_0 e^{-\frac{2\pi^2}{h}}}{h^8} \quad (33)$$

donde $\bar{a}_0 = -4.4590490687409192482531730018607189137616 \cdot 10^7$.

Se pueden obtener más términos del desarrollo asintótico del ángulo de la forma:

$$\text{ángulo}(\Psi_{\phi_s}^u, \Psi_{\phi_s}^s) \asymp \frac{e^{-\frac{2\pi^2}{h}}}{h^8} \sum_{i=0} \bar{a}_i h^{2i} \quad (34)$$

La fórmula anterior se puede obtener usando el método de extrapolación de Neville.

Tabla 1: Coeficientes \bar{a}_i

i	\bar{a}_i
0	$-4.4590490687409192482531730018607189137616 \dots \times 10^7$
1	$2.97269937916061283216878200124047927584108 \dots \times 10^7$
2	$-4.2426536925896026702539127331520076804167 \dots \times 10^6$
3	$1.17797109675427406779077991987315053084531 \dots \times 10^6$
4	$4.79660536043413895240025402869387583127603 \dots \times 10^5$
5	$5.15570081568660937076084999430858230797878 \dots \times 10^5$
6	$5.85668192172785052753740040550077929384884 \dots \times 10^5$
7	$5.85668192172785052753740040550077929384884 \dots \times 10^5$
8	$1.14920852259617349751071644922254950499367 \dots \times 10^6$
9	$1.95437079128827581340891972592727321987198 \dots \times 10^6$
10	$3.7651454516097293470082899284123758398033 \dots \times 10^6$
\vdots	\vdots

Fuente: Elaboración propia

Solo a manera de ilustración, una muestra de la potencia del cálculo desarrollado. Para $h = 1.099$, se obtuvo que el punto de intersección es: $(\underbrace{5.766854002 \dots}_{1000 \text{ dígitos}} \times 10^{-5}, 0)$

$\alpha = -\underbrace{1.914910171 \dots}_{1000 \text{ dígitos}} \times 10^{-757}$. Y los vectores de dirección de las variedades invariantes en el punto de intersección:

$$u = \left(\underbrace{3.129591161\dots}_{758 \text{ dígitos}} \underbrace{\dots}_{242 \text{ dígitos}} \times 10^{-2}, \underbrace{-1.992359612\dots}_{1000 \text{ dígitos}} \times 10^{-2} \right)$$

$$v = \left(-\underbrace{3.129591161\dots}_{758 \text{ dígitos}} \underbrace{\dots}_{242 \text{ dígitos}} \times 10^{-2}, \underbrace{1.992359612\dots}_{1000 \text{ dígitos}} \times 10^{-2} \right)$$

Observe que los vectores u y v en la primera coordenada se diferencian a partir de la cifra 759. Respecto al ángulo α , podríamos cometer el error de suponer que es cero cuando en la realidad no lo es.

Además de todo lo expuesto para el cálculo del ángulo de la primera intersección transversal, la principal razón de este cálculo, es que permite mostrar que las variedades invariantes no forman la frontera de la región estable de los puntos que no escapan al infinito al iterar con la aplicación. Esta región es conocida en física como *Aceptancia*.

La **Aceptancia** forma el conjunto de valores que se deben elegir, para que las partículas introducidas en el microtrón, logren alcanzar la máxima ganancia de energía. Algunas aproximaciones a esta frontera se pueden obtener usando interpolación Hamiltoniana, suponiendo que nuestra aplicación es cercana a un sistema integrable, otra idea es considerar los números de rotación de las órbitas de puntos, para así obtener curvas invariantes. La existencia de las curvas invariantes se puede garantizar debido a que podemos encontrar una aplicación Twist de Moser, para más detalle al respecto ver Larreal (2011).

5 Conclusiones

La ecuación del microtrón estudiada ha sido:

$$\begin{cases} \delta\phi_{n+1} - \delta\phi_n &= 2\pi\nu \frac{\delta W_n}{\Delta W}, \\ \delta W_{n+1} - \delta W_n &= \Delta W_0 \cos(\phi_s + \delta\phi_{n+1}) - \Delta W \end{cases}$$

En esta ecuación primero se determinó que tenía dos puntos fijos los cuales dependen del parámetro ϕ_s . Se probó que los puntos fijos eran hiperbólico y elíptico.

Con el punto hiperbólico centrado en el origen, se establecieron las parametrizaciones de las variedades invariantes estables e inestables, luego se probó la existencia de la intersección de las variedades sobre el eje X .

En la intersección sobre el eje X se realizaron los cálculos numéricos, los cuales consistieron en la determinación del punto de intersección por la prolongación analítica de las variedades locales. Debido al carácter que encierra este tipo de problema, se conjeturó la fórmula del ángulo del splitting y luego usando cálculos numéricos de multiprecisión se obtuvo la relación parámetro vs ángulo; así de esta forma se logró encontrar por medio de ajuste la fórmula exponencial del ángulo.

Una de las observaciones que se puede obtener de los resultados es que la fórmula del ángulo no es analítica en el origen respecto al parámetro.

Este procedimiento puede ser considerado para la determinación de splitting en problemas con características similares.

6 Agradecimientos

Agradezco al grupo de sistemas dinámicos de la Universidad Politécnica de Cataluña por haberme permitido ejecutar los códigos en el cluster EIXAM y en particular a los profesores Rafael Ramírez Ros y Tere Seara por sus asesorías.

7 Bibliografía

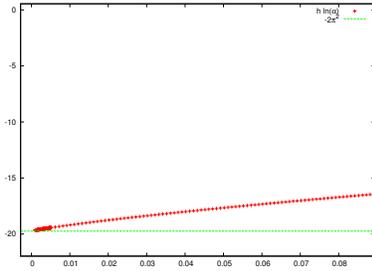
Referencias

- Baldomá, I., y Seara, T. M. (2006). Breakdown of heteroclinic orbits for some analytic unfoldings of the hopf-zero singularity. *J. Nonlinear Sci.*, 16(6), 543–582. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/s00332-005-0736-z> doi: 10.1007/s00332-005-0736-z
- Chernov, V. L. (2000). Separatrix splitting in Henon’s transformation. En *2000 2nd International Conference. Control of Oscillations and Chaos. Proceedings (Cat. No.00TH8521)* (Vol. 1, p. 135-136 vol.1). doi: 10.1109/COC.2000.873534
- Delshams, A., y Ramírez-Ros, R. (1998). Exponentially small splitting of separatrices for perturbed integrable standard-like maps. *J. Nonlinear Sci.*, 8(3), 317–352.
- Delshams, A., y Ramírez-Ros, R. (1999). Singular separatrix splitting and the Melnikov method: an experimental study. *Experiment. Math.*, 8(1), 29–48.
- Fontich, E., y Simó, C. (1990). The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(2), 295–318.
- Fousse, L., Hanrot, G., Lefèvre, V., Pélissier, P., y Zimmermann, P. (2007, junio). Mpf: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(2), 13–es. Descargado de <https://doi.org/10.1145/1236463.1236468> doi: 10.1145/1236463.1236468
- Gelfreich, V., y Sauzin, D. (2001). Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(2), 513–567.

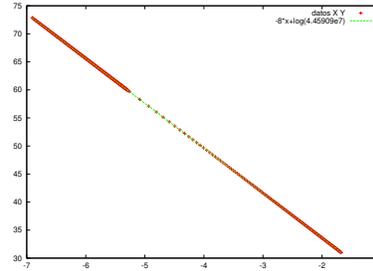
- Gelfreich, V., y Simó, C. (2008). High-precision computations of divergent asymptotic series and homoclinic phenomena. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10(2-3), 511–536.
- Gelfreich, V. G. (1999). A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map. *Comm. Math. Phys.*, 201(1), 155–216.
- Kubyshev, Y., Larreal, O., Ramírez-Ros, R., y Seara, T. (2017). Stability of the phase motion in race-track microtrons. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 349, 12–26. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278916304560> doi: 10.1016/j.physd.2017.03.001
- Larreal, O. J. (2011). *Cálculo de escisión de separatrices y regiones de estabilidad usando multiprecisión: el microtrón y la singularidad hopf-zero* (Tesis Doctoral no publicada). Universitat Politècnica de Catalunya.
- Lazutkin, V. F. (1990). The width of the instability zone around separatrices of a standard mapping. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 313(2), 268–272.
- Lazutkin, V. F. (2003). Splitting of separatrices for the Chirikov standard map. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 300(Teor. Predst. Din. Sist. Spets. Vyp. 8), 25–55, 285. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/s10958-005-0219-7> doi: 10.1007/s10958-005-0219-7
- Lidbjörk, P. (1994). Microtrons. En *Cern. Geneva. CERN Accelerator School* (Vol. 2, p. 971-981).
- Praestegaard, L., Bach, H., Einfeld, D., Hertel, N., Kruse, L., Moller, S., ... Pont, M. (2001, 02). Investigation of the anka injector. En (p. 2284 - 2286 vol.3). doi: 10.1109/PAC.2001.987353
- Ramírez-Ros, R. (2005). Exponentially small separatrix splittings and almost invisible homoclinic bifurcations in some billiard tables. *Phys. D*, 210(3-4), 149–179. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2005.07.012> doi: 10.1016/j.physd.2005.07.012
- Simo, C. (1990). On the analytical and numerical approximation of invariant manifolds. En D. Benest y C. Froeschle (Eds.), *Modern methods in celestial mechanics* (p. 285-+).
- Treshchev, D. V. (1997). Separatrix splitting from the point of view of symplectic geometry. *Mathematical Notes*, 61(6), 744–757. doi: 10.1007/BF02361217

- Vladimirov, I., Pakhomov, N., Shvedunov, V., Kubyshin, Y., Rigla, J., y Zakharov, V. (2014, 12). End magnets with rare earth permanent magnet material for a compact race-track microtron. *The European Physical Journal Plus*, 129. doi: 10.1140/epjp/i2014-14271-3

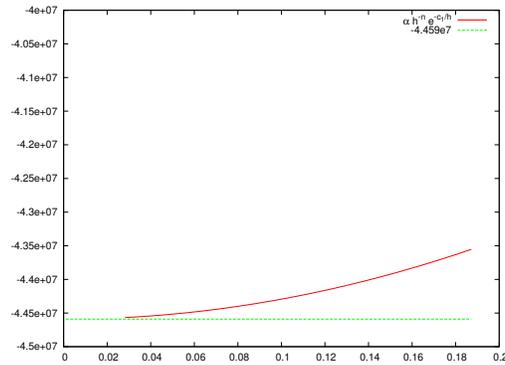
Apéndice. Figuras relacionadas con los cálculos numéricos



(a) Relación entre h y $h \ln(\alpha)$.



(b) Curva obtenida usando ajuste de mínimo cuadrado.



(c) Gráfica para determinar el coeficiente c_2 .

Figura A 1: Gráficas de la observación 2

Fuente: Elaboración propia

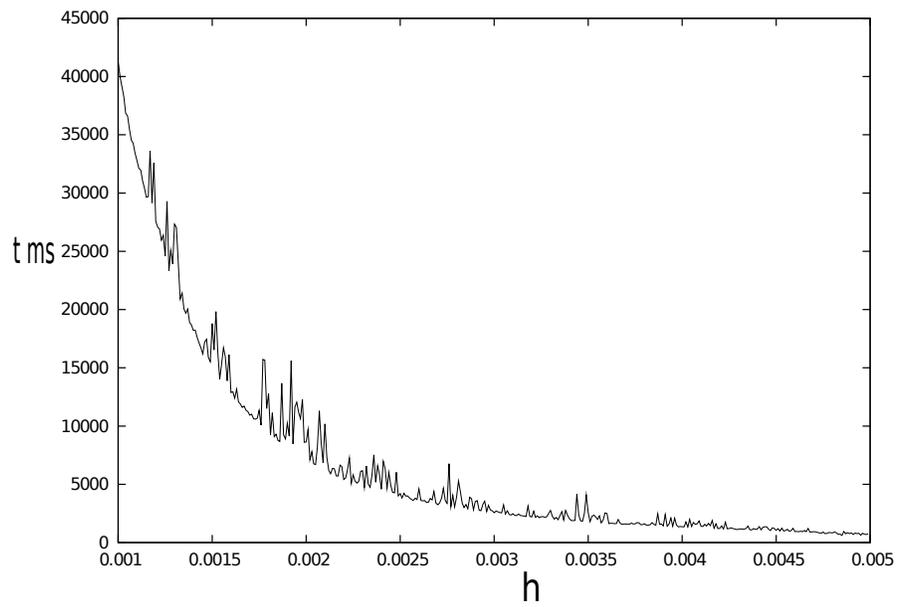


Figura A 2: Gráfica de h vs tiempo ms.

Fuente: Elaboración propia