MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2019, Vol. 17, No. 2 Publicado: 2019-12-27

# Extensiones autoadjuntas Hamiltonianas en un intervalo de la recta real: El operador energía cinética.
# Hamiltonian self-adjoint extensions in an interval of the real line: The kinetic energy operator.

L. A. González-Díaz y S. Díaz-Solórzano.

**Resumen** Haciendo uso de argumentos físicos, hallamos los operadores momentum y energía cinética en el intervalo $(0,\ell)$ de la recta real, así como el operador posición. Caracterizamos el dominio de la regla canónica de conmutación (entre los operadores posición y momentum) y de validez del principio de incertidumbre.
**Palabras claves**: Extensiones autoadjuntas, Operadores Cuánticos, Principio de incertidumbre.

**Abstract** Based on physical arguments, we find the position, momentum, and kinetic energy operators in the interval $(0,\ell)$ of the real line. We characterize the domain of the canonical commutation rule (between position and momentum operators) and the validity of the uncertainty principle.
**Keywords**: Self-adjoint extensions, Quantum operators, uncertainty principle.

## 1. Introducción

Los observables cuánticos son operadores lineales autoadjuntos definidos en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ [Blank, J., Exner P., y Havlíček , 2008], [Galindo, A. y Pascual, 1978]. Un operador lineal, siendo una función, tiene dominio y rango en el espacio $\mathscr{H}$. Si la dimensión del espacio $\mathscr{H}$ es finita, el dominio de cualquier operador lineal es todo $\mathscr{H}$. Sin embargo, cuando $\mathscr{H}$ es infinito - dimensional esta situación ya no es cierta para todos los operadores lineales. En particular, los observables más

Luis Arturo González-Díaz, Ph.D.
Docente, Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador, e-mail: `lugodiaz@espol.edu.ec`

Sttiwuer Rafael Díaz-Solórzano, Ph.D.
Docente, Grupo de Información y Comunicación Cuántica, Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, Edo. Miranda 89000, Venezuela, e-mail: `sttiwuerdiaz@usb.ve`

importantes en Mecánica Cuántica, momentum, posición, energía, etc., tienen como dominio un subconjunto propio de $\mathscr{H}$.

En los texto de Mecánica Cuántica [Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F, 1977], un aspecto básico y crucial, que suele ser poco discutido es que todo operador lineal lleva consigo su dominio. Por lo tanto, todo observable tiene parte de su información física en el dominio asociado al operador que lo representa [Bonneau, G., Faraut, J., y Valent, G, 2001]. Sin definir el dominio, el observable está incompleto. En efecto, en el caso de operadores diferenciales lineales, cada observable lleva una información física local (a través de la forma diferencial como actúa el operador) y una información física global, a través del dominio del operador diferencial lineal. En lo sucesivo, denotaremos a un operador dado como $\widehat{\Theta} = (\Theta, \mathscr{D}(\Theta))$, donde $\Theta$ es la expresión formal de dicho operador (forma como actúa en su dominio), y $\mathscr{D}(\Theta) \subseteq \mathscr{H}$ el dominio del mismo.

En muchas situaciones de la Mecánica Cuántica se ignoran los aspectos relacionados con los dominios de los observables puesto que se considera un problema matemático muy difícil (por ejemplo, [Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F, 1977 P.188]). Sin embargo, esto es en apariencia ya que el dominio es tomado en cuenta aunque no se diga explícitamente. En función de las características de su dominio, un operador lineal puede ser hermítico, simétrico y autoadjunto [Jordan, T, 1969], [Prugovecki, E, 1981]. Un operador $\widehat{\Theta}$ es hermítico cuando verifica

$$\langle \psi | \Theta \phi \rangle = \langle \Theta \psi | \phi \rangle \quad \forall \, \psi, \phi \in \mathscr{D}(\Theta). \tag{1}$$

Un operador es simétrico si es hermítico y $\mathscr{D}(\Theta)$ es denso en $\mathscr{H}$; es decir, si $\widehat{\Theta}^{\dagger} \subseteq \widehat{\Theta}$. Si $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}^{\dagger}$, entonces el operador es autoadjunto. Uno de los problemas que surge al intentar definir un observable, es que el operador lineal representativo del observable es casi siempre simétrico, pudiendo ocurrir que no admita ninguna extensión autoadjunta, que admita una sola, o que admita infinitas [Weidmann, J, 1980].

El objetivo de este trabajo es hallar todas la extensiones autoadjuntas físicamente admisibles del operador momentum $\widehat{P} = (P, \mathscr{D}(P))$ y del Hamiltoniano $\widehat{H} = (H, \mathscr{D}(H))$ de una partícula en el intervalo $(0, \ell)$, de la recta real. De todas las extensiones autoadjuntas físicamente admisibles del operador $\widehat{H}$, se muestra que sólo una corresponde al operador energía cinética en $(0, \ell)$.

## 2. El operador momentum

Un posible operador momento en el intervalo $(0, \ell)$ de la recta real, en la representación de coordenada, es

$$P = -i\hbar \frac{d}{dx} \tag{2}$$

con dominio dado por,

$$\mathscr{D}(P) = \{\phi \in C_0^\infty(0,\ell)\,|\,\phi(0) = \phi(\ell) = 0\}\,, \tag{3}$$

donde $C_0^\infty(0,\ell)$ es el conjunto de funciones suaves de soporte compacto. El operador dado por (2) y (3) es simétrico [Weidmann, J, 1980]. Y a partir de la técnica desarrollada por von Neumann sobre las extensiones autoadjuntas [Naimark, M. A, 1968], resulta que dicho operador tiene infinitas extensiones autoadjuntas, las cuales pueden ser caracterizadas mediante transformaciones unitarias uniparamétricas $U(1)$. Dichas extensiones son $\widehat{P}_\theta = (P, \mathscr{D}_\theta(P))$, con

$$\mathscr{D}_\theta(P) = \left\{\phi \in \mathscr{W}_{2,1}(0,\ell)\,|\,\phi(\ell) = e^{i\theta}\phi(0), 0 \leq \theta < 2\pi\right\}. \tag{4}$$

Siendo $\mathscr{W}_{2,1}(0,\ell)$ el espacio de Sobolev de orden uno en $(0,\ell)$, esto es, un subespacio vectorial del espacio $\mathscr{L}^2(0,\ell)$ formado con el conjunto de funciones de onda, tales que sus derivadas hasta primer orden también sean de cuadrado integrable en el intervalo $(0,\ell)$ [Richtmyer, R, 1978].

Sean $p^\theta$ y $\phi_p^\theta(x)$, un autovalor y una autofunción, respectivamente, del operador $\widehat{P}_\theta$, entonces dicha autofunción debe verificar

$$P\phi_p^\theta(x) = p^\theta\phi_p^\theta(x), \quad \phi_p^\theta(\ell) = e^{i\theta}\phi_p^\theta(0). \tag{5}$$

La solución de (5) viene dada por

$$\phi_n^\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\exp^{i(2n\pi+\theta)\frac{x}{\ell}} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

El autovalor asociado a la autofunción (6) viene dado por

$$p_n^\theta = \frac{(2n\pi+\theta)\hbar}{\ell}, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Vemos así que todas las extensiones autoadjuntas, $\widehat{P}_\theta$, tienen sólo espectro discreto puro.

El operador momento transforma como un vector ante paridad, y no todas las extensiones autoadjuntas (4) cumplen este requerimiento físico. En tal sentido, todo operador momento debe transformar ante paridad como

$$\Pi P \Pi^{-1} = -P, \tag{8}$$

donde el operador paridad está dado por [González, L, 1996]

$$(\Pi\psi)(x) = \eta_\pi\psi(\ell - x), \tag{9a}$$

$$\mathscr{D}(\Pi) = \left\{\psi \in \mathscr{L}^2(0,\ell)\right\}, \tag{9b}$$

siendo $\eta_\pi = \pm 1$. El operador definido en (9) es involutivo, esto es $\hat{\Pi}^2 = \mathbb{1}$, y por consiguiente $\hat{\Pi}^{-1} = \hat{\Pi}$. Lo cual prueba que $\hat{\Pi}$ es unitario y autoadjunto.

De (8), tenemos

$$(\widehat{\Pi}\widehat{P}_\theta\widehat{\Pi}^{-1}\phi)(x) = -\widehat{P}_\theta\phi(x),\ \phi(x)\in\mathscr{D}_\theta(P). \tag{10}$$

Para que la expresión anterior tenga sentido; es decir, se respeten las reglas impuestas en dicha operación, necesitamos que $(\hat{\Pi}\phi)(x)$ pertenezca a $\mathscr{D}_\theta(P)$, esto es,

$$\phi(0) = e^{i\theta}\phi(\ell),\ \phi(x)\in\mathscr{D}_\theta(P),\ 0\le\theta<2\pi. \tag{11}$$

Por otra parte, en vista de que $\phi(x)\in\mathscr{D}_\theta(P)$ se debe satisfacer también que

$$\phi(\ell) = e^{i\theta}\phi(0),\ 0\le\theta<2\pi. \tag{12}$$

Luego, para que $\phi$ satisfaga tanto (11) como (12), el parámetro $\theta$ solo puede ser 0 ó $\pi$; es decir, $\phi$ debe satisfacer entonces una de las siguientes condiciones:

$$\phi(0) = \phi(\ell) \qquad (\theta = 0), \tag{13a}$$

$$\phi(0) = -\phi(\ell) \quad (\theta = \pi). \tag{13b}$$

En conclusión, sólo las extensiones autoadjuntas con $\theta = 0$ (condición de contorno periódica) y $\theta = \pi$ (condición de contorno antiperiódica) cumplen con el requerimiento exigido por (8). En otras palabras, tenemos dos posibles candidatos a operador momentum (generador de traslación) en $(0,\ell)$.

## 3. El operador hamiltoniano

En la sección anterior, hallamos los posibles candidatos a operador momentum en $(0,\ell)$. Evidentemente, los candidatos a hamiltonianos de partícula (candidatos a operador energía cinética) son los operadores autoadjuntos que vienen de un generador de traslación. Esto es

$$\widehat{K}_\theta = \frac{\widehat{P}_\theta^2}{2m} \tag{14}$$

El hecho que el parámetro $\theta$ sólo pueda tener dos valores posibles $(\theta = 0,\pi)$ nos permite afirmar que sólo tenemos dos candidatos a operador energía cinética en $(0,\ell)$, los operadores $\widehat{K}_{\theta=0}$ y $\widehat{K}_{\theta=\pi}$. A continuación examinaremos sus autofunciones y autovalores.

- Para el caso de $\widehat{K}_{\theta=0}$, se tiene que las autofunciones debidamente normalizadas y que satisfacen (13a), son:

$$\psi_n^0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\exp^{-i\frac{2n\pi}{\ell}x},\ \text{con}\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

  Y el espectro de $\widehat{K}_{\theta=0}$ viene dado por

$$E_n^0 = \frac{2n^2\pi^2\hbar^2}{m\ell^2}, \text{ con } \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Resulta claro que el estado de menor energía corresponde aquel donde $n = 0$; siendo un estado no degenerado. Además, dicho estado es dejado invariante por el operador paridad, mientras que el operador momentum aniquila a dicho estado:

$$\widehat{\Pi}\psi_0^0(x) = \psi_0^0(x), \tag{17a}$$
$$\widehat{P}_{\theta=0}\psi_0^0(x) = 0. \tag{17b}$$

- Para el caso de $\widehat{K}_{\theta=\pi}$, se tiene que las autofunciones debidamente normalizadas y que satisfacen (13b), son:

$$\psi_n^\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\exp^{i\frac{(2n+1)\pi}{\ell}x}, \text{ con } \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Mientras que el espectro del operador $\widehat{K}_\pi$ es puntual y viene dado por

$$E_n^\pi = \frac{(2n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}, \text{ con } \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Los estados de menor energía corresponden aquellos con $n = -1$ y $n = 0$, estando degenerado. Estos estados no son dejados invariante por el operador paridad, pero están conectado por dicha transformación; esto es,

$$\widehat{\Pi}\psi_{-1}^\pi(x) = -\psi_0^\pi(x), \tag{20a}$$
$$\widehat{\Pi}\psi_0^\pi(x) = -\psi_{-1}^\pi(x). \tag{20b}$$

No obstante, la transición entre ambos estados no es posible, en virtud de que,

$$\langle\psi_{-1}^\pi|\psi_0^\pi\rangle = \langle\widehat{\Pi}\rangle_{\psi_{-1}^\pi} = 0. \tag{21}$$

Además, el operador momentum no aniquila a los estados base, lo cual es claro de (5).

Es claro que los operadores $\hat{K}_{\theta=0}$ y $\hat{K}_{\theta=\pi}$ son completamente distintos (sus autofunciones y espectro no coinciden), por lo que cada uno de ellos describen propiedades física distintas. Para dilucidar cuál de los dos candidatos puede ser considerado energía cinética necesitamos el concepto de rompimiento espontáneo de simetría. En la siguiente definición supondremos que la energía mínima asociada a un hamiltoniano $H$ es un elemento del espectro puntual de este operador.

Sea $U$ un operador unitario o antiunitario definido sobre todo el espacio de Hilbert, el cual representa una simetría de un sistema físico. Supongamos además que $U$ deja invariante al dominio del hamiltoniano $H$ del sistema físico en cuestión, y que en ese dominio se verifica

$$UHU^{-1} = H \quad \Longrightarrow \quad [U,H] = 0, \tag{22}$$

entonces, si existe un autoestado de $H$ de energía mínima que no es dejado invariante por $U$, decimos que $U$ es una simetría espontáneamente rota [Capri, A. Z, 1977], [González, L, 1996]. De la definición anterior, resulta claro que es suficiente que el estado base sea no degenerado (y que $H$ sea dejado invariante) para que la simetría no sea espontáneamente rota.

En conclusión, si exigimos que el operador momentum $\widehat{P}_\theta$ transforme según (8) frente a paridad, y que su energía cinética (14) no exhiba ruptura espontanea de simetría (un hecho inusual para la partícula libre), obtenemos que el único operador momentum en $(0,\ell)$ es $\widehat{P}_{\theta=0}$ y el único operador energía cinética es $\widehat{K}_{\theta=0}$. En definitiva, tenemos que los operadores momentum y energía cinética, definidos en $\mathscr{L}^2(0,\ell)$, son

$$P = -i\hbar\frac{d}{dx}, \tag{23a}$$

$$\mathscr{D}_{\theta=0}(P) = \{\phi \in \mathscr{W}_{2,1}(0,\ell)\,|\,\phi(\ell) = \phi(0)\} \tag{23b}$$

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{23c}$$

$$\mathscr{D}_{\theta=0}(K) = \left\{\psi \in \mathscr{W}_{2,2}(0,\ell)\,|\, \begin{smallmatrix}\psi(\ell)=\psi(0),\\ \psi'(\ell)=\psi'(0).\end{smallmatrix}\right\} \tag{23d}$$

Es claro que $\left[\widehat{K}_{\theta=0}, \widehat{P}_{\theta=0}\right] = 0$, lo cual es característico de un operador hamiltoniano que sea energía cinética solamente. Nótese que el operador momentum antes mencionado tiene sólo espectro discreto, a diferencia del operador momentum en la recta real, cuyo espectro es puramente continuo [González, L, 1996]. En uno de los textos clásicos de Mecánica Cuántica [Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F, 1977] se confunde el operador momentum en $(0,\ell)$ con el de $\mathbb{R}$.

De todas las extensiones autoadjuntas hamiltonianas en $(0,\ell)$ sólo una corresponde al operador energía cinética, las restantes describen a una partícula cuántica sometida a interacción. Una de las extensiones autoadjuntas hamiltonianas más conocida que describe a una partícula cuántica sometida a interacción viene dada por

$$H_F = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{24a}$$

$$\mathscr{D}(H_F) = \{\Psi(x) \in \mathscr{W}_{2,2}(0,\ell)\,|\,\Psi(\ell) = \Psi(0) = 0\}, \tag{24b}$$

siendo $\mathscr{W}_{2,2}(0,\ell)$ el espacio de Sobolev de orden dos en $(0,\ell)$ [Richtmyer, R, 1978]. Dicha extensión se conoce como la extensión de Friedrichs [Weidmann, J, 1980], o más familiarmente como el hamiltoniano de una partícula cuántica en un pozo cuadrado infinito unidimensional. Veamos que $\left[\widehat{H}_F, \widehat{P}_{\theta=0}\right] \neq 0$:

Las autofunciones del hamiltoniano $H_F$, vienen dadas por

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),\ \mathrm{con}\, n \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

con espectro de energía dado por

$$E_n^F = \left(\frac{n\pi\hbar}{\ell}\right)^2, \text{ con } n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

El operador $\hat{H}_F$ no se encuentra degenerado, en virtud al teorema de no degeneración [Yndurain, F, 2003].

Las descomposiciones espectrales de los operadores $\widehat{H}_F$ y momento $\widehat{P}_{\theta=0}$, vienen dados respectivamente por

$$\widehat{H}_F = \sum_n E_n^F \, |E_n^F\rangle\langle E_n^F|, \tag{27a}$$

$$\widehat{P}_{\theta=0} = \sum_n p_n^0 |p_n^0\rangle\langle p_n^0|, \tag{27b}$$

donde $\Psi_n(x) \equiv \langle x|E_n^F\rangle$ y $\phi_n^0(x) \equiv \langle x|p_n^0\rangle$ corresponden a las autofunciones en la base del operador coordenada, de los operadores energía y momentum, respectivamente. Así, el conmutador viene dado por

$$\begin{aligned}\left[\widehat{H}_F, \widehat{P}_{\theta=0}\right] = \sum_{m,n} E_m p_n^\theta \Big\{ &\langle E_m|p_n^\theta\rangle \, |E_m\rangle\langle p_n^\theta| \\ &- \langle p_n^\theta|E_m\rangle \, |p_n^\theta\rangle\langle E_m| \Big\}.\end{aligned} \tag{28}$$

Por otra parte,

$$\langle E_m^F|p_n^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i} \left(\delta_{m,-2n} - \delta_{m,2n}\right). \tag{29}$$

Al sustituir (29) en (28), y teniendo en cuenta que $E_{\pm 2n}^F = 4E_n^F$, se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\left[\widehat{H}_F, \widehat{P}_{\theta=0}\right] = -i2\sqrt{2}\sum_n E_n^F p_n^0 \Big\{ &|E_{-2n}^F\rangle\langle p_n^0| \\ - |E_{2n}^F\rangle\langle p_n^0| + |p_n^0\rangle\langle E_{-2n}^F| - &|p_n^0\rangle\langle E_{2n}^F| \Big\}.\end{aligned} \tag{30}$$

Tomando en cuenta que $\langle x|E_{-2n}^F\rangle = -\langle x|E_{2n}^F\rangle$, la expresión anterior se escribe de la siguiente forma

$$\left[\widehat{H}_F, \widehat{P}_{\theta=0}\right] = i4\sqrt{2}\sum_n E_n^F p_n^0 \Big\{ |E_{2n}^F\rangle\langle p_n^0| + |p_n^0\rangle\langle E_{2n}^F| \Big\}, \tag{31}$$

la cual es claramente no nula, lo que se traduce en que el operador $\widehat{H}_F$ no es únicamente función del operador momentum $\widehat{P}_{\theta=0}$, como ocurre con el operador $\widehat{K}_{\theta=0}$. En conclusión, $\widehat{H}_F$ no corresponde a una partícula cuántica libre en $(0,\ell)$.

## 4. El operador posición

En el intervalo $(0,\ell)$ de la recta real, el operador posición $\widehat{X}$ viene dado por

$$(X\Phi)(x) = x\Phi(x), \tag{32a}$$

$$\mathscr{D}(X) = \{\Phi(x) \in \mathscr{L}^2(0,\ell)\}. \tag{32b}$$

El operador $\widehat{X} = (X, \mathscr{D}(X))$ es acotado y hermítico, por lo tanto autoadjunto [González, L, 1996].

## 5. El principio de incertidumbre

En la literatura, el principio de incertidumbre en $(0,\ell)$ es inadecuadamente discutido [Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F, 1977], [Messiah, A, 1970], ya que no se toman en cuenta los dominios de los operadores involucrados. La conocida desigualdad [Galindo, A. y Pascual, 1978]

$$\triangle\widehat{X}_\varphi \triangle\widehat{P}_\varphi \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \varphi\middle| i[\widehat{X},\widehat{P}]\middle|\varphi\right\rangle\right|; \varphi \in \mathscr{D}_{\mathrm{r}}, \tag{33}$$

es sólo válida en $\mathscr{D}_{\mathrm{r}} \subseteq \mathscr{D}$, donde $\mathscr{D}$ es el dominio de validez de la regla canónica de conmutación $[\widehat{X},\widehat{P}]$, esto es, $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\hat{X}\hat{P}) \cap \mathscr{D}(\hat{P}\hat{X})$. En otras palabras, $\mathscr{D}_{\mathrm{r}}$ es el conjunto de estados donde el producto de la dispersión de los operadores $\widehat{X}$ y $\widehat{P}$, respectivamente, se encuentre acotado inferiormente (cota distinta de cero, obviamente).

La regla canónica de conmutación $[\widehat{X},\widehat{P}_{\theta=0}] = i\hbar\mathbb{1}$ es sólo válida en el dominio $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}(X) \cap \mathscr{D}_{\theta=0}(P)$. En el caso que nos ocupa, el dominio $\mathscr{D}$ es el conjunto caracterizado por la condición de contorno $\phi(\ell) = \phi(0) = 0$. Lo que nos permite afirmar que $\mathscr{D}$ es vacío. Así, la desigualdad (33) no aplica. Dado que para todos los autoestados de $\widehat{P}_{\theta=0}$ la dispersión $\left(\triangle\widehat{P}_{\theta=0}\right)_{\psi_n^0} = 0$, se tiene que

$$\triangle\widehat{X}_{\psi_n^0}\left(\triangle\widehat{P}_{\theta=0}\right)_{\psi_n^0} = 0 \tag{34}$$

donde

$$\triangle\widehat{X}_{\psi_n^0} = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}. \tag{35}$$

Así, de (34), podemos preguntarnos: ¿Viola el sistema físico en cuestión el principio de incertidumbre? La respuesta a esta interrogante es no, porque nuevamente no se presenta la debida atención al dominio de validez del principio de incertidumbre (en este caso, el dominio de validez de una relación). Dicho principio es aplicable sólo para un conjunto determinado de estados (los cuales llamaremos estados regulares del sistema cuántico dado). Este dominio $\mathscr{D}_{\mathrm{r}}$ (estados regulares) está estrictamente incluido en $\mathscr{D}$.

Si ahora consideramos estados del operador $\widehat{H}_F$, observamos que éstos se encuentran en

$$\mathscr{D}_{\mathrm{r}} = \left\{ \varphi \in \mathscr{W}_{2,2}(0,\ell) \mid {}^{\varphi(\ell)=\varphi(0)=0,}_{\varphi'(\ell)=\varphi'(0).} \right\}. \tag{36}$$

En este dominio, la dispersión del operador momento $(\triangle\widehat{P}_{\theta=0})_\varphi$ y la regla canónica de conmutación $[\widehat{X}, \widehat{P}_{\theta=0}]$ están bien definidas. Si $[\widehat{X}, \widehat{P}_{\theta=0}] = i\hbar\mathbb{1}$, entonces la desigualdad $\triangle\widehat{X}_\varphi\,(\triangle\widehat{P}_{\theta=0})_\varphi \geq \frac{\hbar}{2}$ vale en $\mathscr{D}_{\mathrm{r}}$. Nótese que los estados regulares de un sistema físico (arbitrario) constituyen un subconjunto propio de los estados físicos que describen las propiedades del sistema. En general, aunque todo vector de estado normalizado del espacio de Hilbert es un estado físico, el principio de incertidumbre no vale para cualquier estado físico [González, L, 1996].

## 6. Conclusiones

En diversas situaciones, los físicos consideran explíctamente los dominios de los operadores con los cuales trabajan, por ejemplo, partículas idénticas, reglas de superselección. Evidentemente, en estos casos el espectro de los observables cambia. Lo que hemos visto en este trabajo, es que otras consideraciones de dominios no son aspectos técnicos sino que tienen que ver con la física a la cual los operadores están vinculados.

La idea de que los dominios generan interacción es clara de los resultados de la sección 3. En efecto, hemos visto que partícula libre es esencialmente única, y por lo tanto, la mayoría de las extensiones autoadjuntas hamiltonianas halladas tienen que ver con una partícula sometida a interacción. En estos casos, la interacción está dada a través del dominio (condiciones de contorno).

El encontrar el operador energía cinética $K$ asociada a una partícula libre en $\mathscr{L}^2(0,\ell)$, resuelve el problema de la física de las extensiones autoadjuntas de un hamiltoniano de la forma $H = K + V$, siempre que $V$ sea regular (por ejemplo, $V(x) = \frac{kx^2}{2}$, en la representación de coordenada).

Notemos que las condiciones de borde periódicas en $\mathscr{L}^2(0,\ell)$ han sido usadas en la literatura para modelar partícula libre [Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F, 1977], [Pathria, R. K, 1972]. Usualmente, estas condiciones son llamadas de Born - Von Karman [Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F, 1977]. Sin embargo, en estas referencias también se mencionan los estados estacionarios que se anulan en los extremos del intervalo $[0,\ell]$ como describiendo partículas libres. Como hemos visto en nuestro trabajo, esto último no es correcto. No obstante, si tomamos el limite termodinámico $(N \to \infty, V \to \infty, \frac{N}{V} \to ctte)$, tenemos que, independiente de las condiciones de contorno, la densidad de estados será la misma [Pathria, R. K, 1972].

Para finalizar, debemos enfatizar que el principio de incertidumbre, cuando tiene lugar (cuando existe un conjunto de estados para los cuales se pueden medir dos observables canónicamente conjugados (como $\hat{X}$ y $\hat{P}$) cuyas precisiones sean independientes o no), vale para un subconjunto de estados físicos.

## 7. Bibliografía

## Referencias

Blank, J., Exner P., y Havlíček . M.(2008). *Hilbert Space Operators in Quantum Physics*, Nueva York: Springer

Bonneau, G., Faraut, J., y Valent, G. (2001). Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. *American Journal of physics*, *69*(3), 322 - 331. doi: 10.1119/1.1328351

Capri, A. Z. (1977). Self-adjointness and spontaneously broken symmetry. *American Journal of Physics*, *45*(9), 823 - 825. doi: 10.1119/1.11055

Cohen - Tannoudji C., Diu B., y Laloe, F. (1977). *Quantum Mechanics*, Vols. I. y II, Nueva York: Willey - Interscience.

Galindo, A. y Pascual. P.(1978). *Mecanica Cuántica*, Alhambra, Madrid.

González, L. (1996). *Dominio de operadores y su relación con la Física* (Tesis de pregrado). Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

Jordan, T. (1969). *Linear operators for quantum mechanics*, Nueva York: Jhon Wiley & Sons

Messiah, A. (1970). *Quantum Mechanics*, Vol. I, Amsterdam, North - Holland

Naimark, M. A. (1968). *Linear differential operators*, Vol. II, Nueva York: Ungar

Pathria, R. K. (1972). *Statistical Mechanics*, Apéndice A, Nueva York: Pergamon Press

Prugovecki, E. (1981). *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, Nueva York: Academic Press.

Richtmyer, R. . (1978) *Principles of Advanced Mathematical Phvsics*, Vol I, Nueva York: Springer- Verlag

Weidmann, J. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Nueva York: Springer - Verlag.

Yndurain, F. (2003). *Mecanica Cuántica*, Barcelona, España: Ariel (Ed. 2da.).