

## Un nuevo esquema iterativo robusto y eficiente para un problema parabólico no lineal degenerado

### A new robust and efficient iterative scheme for a degenerated non-linear parabolic problem

Guillermo A. Albuja , Iván C. Naula

**Resumen** El flujo de agua a través del suelo está modelado matemáticamente por la ecuación de Richards. Esta ecuación doblemente no lineal degenerada, es difícil de resolver, más aun la no linealidad y la degeneración hacen que el diseño de esquemas numéricos para este problema sea una tarea desafiante. Según la literatura los métodos implícitos son los que dan mejores resultados ya que los esquemas obtenidos permiten simular el problema degenerado sin embargo estos producen problemas no lineales que deben ser resueltos mediante métodos de linealización. En esta investigación se desarrolla un nuevo esquema numérico de linealización de la ecuación de Richards. Se usa un esquema de Euler totalmente implícito para discretizar el tiempo y elementos finitos para discretizar el espacio, sin embargo, estos esquemas deberían funcionar para cualesquier discretización espacial escogida. Se consiguió un esquema más robusto y más rápido (en lo que a número de iteraciones y tiempo total de máquina empleado se refiere) que los ya existentes.

**Palabras claves:** Esquema de linealización numérica, Ecuación de Richards, Elementos Finitos, Esquema de Euler.

**Abstract** The flow of water through the soil is modeled mathematically by the Richards equation. This doubly degenerate nonlinear equation is difficult to solve, even more nonlinearity and degeneration make the design of numerical schemes for this problem a challenging task. According to the literature, the implicit methods are the ones that give the best results since the schemes obtained allow to simulate the degenerate problem, however these produce nonlinear problems that must be solved

---

Guillermo A. Albuja, MSc.

Docente titular de la Universidad Central del Ecuador, UCE, Facultad de Ciencias, Ciudadela Universitaria. Quito-Ecuador, e-mail: galbuja@uce.edu.ec

Iván C. Naula, MSc.

Docente titular de la Universidad Central del Ecuador, UCE, Facultad de Ciencias, Ciudadela Universitaria. Quito-Ecuador, e-mail: icnaula@uce.edu.ec

by means of linearization methods

In this investigation a new numerical scheme of linearization of the Richards equation is developed. A totally implicit Euler scheme is used to discretize time and finite elements to discretize space, however, these schemes should work for any spatial discretization chosen. A more robust and faster scheme was achieved (in terms of number of iterations and total machine time used) than those already existing.

**Keywords:** Numerical linearization scheme, Richards equation, finite elements, Euler's scheme.

## 1 Introducción

### 1.1 Ecuación de Richards

La ecuación de Richards es una ecuación diferencial parcial que es utilizada con mayor frecuencia para modelar el flujo de agua a través del suelo, es por esto que el medio poroso al que haremos referencia en este documento será el suelo y el fluido será el agua, sin embargo es importante señalar que existen muchas otras aplicaciones que involucran otros medios porosos y otros fluidos distintos del suelo y el agua.

Se considerara un medio poroso isótropo, indeformable y homogéneo con porosidad constante, el fluido es incompresible sin histéresis y no tiene reacciones químicas con el medio poroso.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  con  $d \in \{1, 2, 3\}$  un dominio abierto acotado conexo que representa el medio poroso, y  $(0, T)$  un intervalo finito de tiempo donde  $T$  es una constante positiva fija. Definimos el contenido de humedad como la función  $\theta : \Omega \times (0, T) \rightarrow [\theta_r, \theta_s]$ , donde  $\theta_r$  y  $\theta_s$  son dos constantes fijas y  $\theta(\vec{x}, t)$  es el contenido de humedad en un punto del espacio  $\vec{x} \in \Omega$  y un tiempo  $t$  determinado. En este contexto podemos escribir la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = S \text{ sobre } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

donde  $\vec{q}$ ,  $[LT^{-1}]$  es el flujo que está definido como el caudal por unidad de área del medio poroso y  $S : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que representa las posibles fuentes o sumideros. Para mayores detalles sobre la ecuación de continuidad nos podemos referir a (W. & Delleur, 2006).

El punto más importante para el modelo matemático de flujo en medios porosos es la ley de Darcy formulada en 1856 por el ingeniero Frances Henry Darcy (para mayores detalles ver (W. & Delleur, 2006), esta ley fue originalmente introducida para flujo en medios porosos saturados, y posteriormente extendida para medios porosos no saturados por (Buckingham, 1907), ésta describe las características del movimiento de un fluido a través de un medio poroso continuo, homogéneo e isoto-

po, cuando el flujo es saturado y no saturado. Matemáticamente esta ley se escribe como:

$$\vec{q} = -K(\theta)\nabla H$$

Donde  $\nabla H$  es un campo vectorial adimensional conocido como gradiente hidráulico y representa la pérdida o cambio de potencial hidráulico por unidad de longitud medida en el sentido del flujo.  $H$ , [L] es el potencial hidráulico, que está dado por  $H = \Psi + z$  donde  $\Psi$ , [L] es la cabeza de presión que la mediremos en unidades de longitud y  $z$ , [L] es la coordenada vertical, que consideraremos positiva hacia arriba.  $K(\theta)$ , [LT<sup>-1</sup>] es conocida como la conductividad hidráulica del medio poroso y representa la mayor o menor facilidad con la que el medio poroso deja pasar el fluido. Puesto  $\theta$  es también función de  $\Psi$  (relación que se encuentra dada por curva de retención de humedad) la conductividad hidráulica  $K$  es también función de  $\Psi$ , es decir  $K(\theta(\Psi))$  que frecuentemente notaremos simplemente como  $K(\Psi)$ . Por lo tanto la ley de Darcy-Buckingham se puede escribir de la manera siguiente:

$$\vec{q} = -K(\Psi)\nabla(\Psi + z) \text{ sobre } \Omega \times (0, T) \quad (2)$$

Es importante anotar que el fluido considerado en la ley de Darcy-Buckingham y a través de este documento es incompresible y no viscoso es decir típicamente será un líquido y frecuentemente al referirnos al fluido este será el agua.

El resultado de reemplazar la ley de Darcy-Buckingham (ecuación (2)) en la ecuación de continuidad (ecuación (1)) es la famosa ecuación de Richards. Esta fue propuesta por Richards en 1931 y describe el movimiento de un fluido a través de un medio poroso (para mayor información ver (Richards, 1931))

$$\frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \text{div}(K(\Psi)\nabla(\Psi + z)) = S \text{ sobre } \Omega \times (0, T) \quad (3)$$

En la zona saturada, es decir donde los poros se llenan completamente de agua, las funciones  $\theta$  y  $K$  son constantes y  $\Psi \geq 0$ , mientras que si el flujo es no saturado  $\theta$  y  $K$  son funciones no lineales de  $\Psi$  y además  $\Psi < 0$ , lo que significa que la ecuación de Richards es una ecuación diferencial no lineal. La ecuación es degenerada, puesto que está degenera, cuando  $K(\theta(\Psi)) \rightarrow 0$ , que es el caso de difusión lenta o cuando  $\theta$  es constante que es el caso de difusión rápida, la región de degeneración depende de la saturación del medio, por lo que estas regiones no son conocidas a priori y pueden variar en el tiempo y en el espacio, en este trabajo nos concentraremos especialmente en el caso de difusión rápida en cuyo caso, la ecuación de Richards es degenerada elíptica-parabólica, es típico de este caso la baja regularidad de las soluciones.

## 1.2 Definición del Problema

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$  un abierto conexo acotado con frontera  $\partial\Omega$  Lipschitz continua, definimos  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  para una constante fija  $T > 0$ . Consideramos la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal degenerada elíptica-parabólica:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \operatorname{div}[K(\Psi)\nabla(\Psi + z)] = S & \text{sobre } Q_T \\ \Psi(x, 0) = \Psi_0(x) & \text{para todo } x \in \Omega \\ + \text{Condiciones de borde} \end{cases} \quad (4)$$

Las condiciones de frontera determinan la interacción del fenómeno con el medio que lo rodea, esta interacción solo puede darse a través de su frontera. Las principales condiciones de frontera son las de Dirichlet y las de Neumann dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_D(x, t), \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ -K(\Psi(x, t))\nabla[\Psi(x, t) + z] \cdot \vec{n} &= \Psi_D(x, t), \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

La existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación (4) puede ser consultada en (Marinoschi, 2010) y (Alt & Luckhaus, 1983) para diversas condiciones de borde

## 2 Estado del Arte

### 2.1 Discretización en el tiempo

La mayor parte de la bibliográfica consultada coincide en que la primera opción para la discretización temporal es un esquema de Euler hacia atrás, esto se debe a dos razones: la necesidad de una discretización estable que permita pasos de tiempo largos y la baja regularidad de la solución que no soporta cualquier esquema de alto orden. En cuanto a la discretización espacial existen muchas más opciones posibles. Uno de los análisis más importantes que se hace para determinar la bondad de los esquemas numéricos desarrollados para la ecuación de Richards es el balance de masa. Aún cuando las dos formas de la ecuación de Richards, basada en  $\Psi$  (ver (Celia & Bouloutas, 1990)) y la forma mixta (ecuación (3)) son equivalentes, sus aproximaciones numéricas cuando se usa un esquema de Euler pueden conducir a diferentes resultados como lo demuestran (Celia & Bouloutas, 1990) y (Lehmann & Ackerer, 1998), más aún estos autores demuestran que la discretización con un esquema de Euler hacia atrás, de la formulación basada en  $\Psi$ , arroja resultados pobres caracterizados por un gran error en el balance de masa y estimaciones erróneas de la profundidad de infiltración, en contraste con la discretización de la forma mixta que produce un correcto balance de masa aún cuando debemos señalar que un correcto balance de masa es una condición necesaria pero no suficiente para obtener una solución correcta según lo demuestra Lehmann F. (1998).

Por lo anotado anteriormente en la mayoría de la bibliografía revisada, los autores prefieren usar una discretización temporal de Euler hacia atrás conjuntamente con la forma mixta de la ecuación Richards, ya que produce una discretización con una correcta propiedad de conservación de masa, además que proporciona soluciones continuas a través de condiciones heterogéneas y lo que es más importante, incluso en transmisiones de régimen de no saturado a saturado.

## 2.2 Métodos de linealización para la ecuación de Richards

Un trabajo muy completo es el de (List & Radu, 2016), donde se resumen y se comparan los métodos de linealización que se conocen hasta el momento. Los métodos de linealización estudiados por estos autores son el método de Newton, método de Picard modificado, L-esquema. Es conocido que el método de Newton es cuadráticamente convergente pero tiene el inconveniente de ser solo localmente convergente, es decir no esta garantizada la convergencia del método para cualesquier solución inicial con la que se arranque, además necesita del cálculo de las derivadas de  $\theta$  y  $K$ . Por otro lado el método de Picard modificado y el L-esquema son solo linealmente convergentes pero en cambio son más robustos.

### 2.2.1 Esquema de linealización de Newton

Fue uno de los primeros métodos de linealización usado para resolver la ecuación de Richards y ha sido estudiado por varios autores, ver por ejemplo (Lehmann & Ackerer, 1998; Bergamaschi & Putti, 1999; Eymard, Gutnic, & Hilhorst, 1999; List & Radu, 2016; Lipnikova, Moultona, & Svyatskiy, en prensa), este tiene la ventaja de ser cuadráticamente convergente, sin embargo tiene algunas desventajas. El método es solo localmente convergente aunque el uso de la solución en el tiempo anterior como solución inicial en el método mejora considerablemente su robustez, aun así el metodo podría fallar, un ejemplo de ello se puede ver en (List & Radu, 2016). Involucra el cálculo de las derivadas de  $\theta$  y  $K$  y además su convergencia depende del tamaño de la malla espacial.

La convergencia del método de Newton es estudiada por (Radu, Pop, & Knabner, 2006), según este trabajo es necesario una etapa de regularización para garantizar la convergencia, la correspondiente condición de convergencia de acuerdo a este articulo es como se sigue:

$$h_t \leq C\varepsilon^3 h^d \quad (5)$$

donde  $\varepsilon$  denota el parámetro de regularización,  $h$  el tamaño de la malla,  $d$  la dimensión espacial y  $C$  una constante que no depende de los parámetros de discretización. En la referencia antes mencionada la demostración está hecha para una discretización de elementos finitos mixtos pero según lo afirma (List & Radu, 2016) la demos-

tración para elementos finitos de Galerkin es similar, no se encontró demostración alguna para una discretización espacial de volúmenes finitos. En todo caso lo que se debe tomar muy en cuenta es que la convergencia del método de linealización de Newton depende de la discretización espacial, más aún de acuerdo con la ecuación (5) y las pruebas numéricas realizadas por nosotros se verifica que al hacer la malla espacial más fina inevitablemente se llega a una divergencia del método.

Es claro entonces que en el caso de la ecuación de Richards el método de Newton no suele converger fácilmente, esto ha derivado en el desarrollo de varias estrategias para optimizar las propiedades de convergencia como por ejemplo los así llamados continuación-Newton que pueden ser consultados en (Younis, Tchelepi, Dagmar, & Aziz, 2010). Las soluciones basadas en regiones de confianza ver (Wang & H., 2013). También se han desarrollado recientemente técnicas de preconditionamiento no lineal con el fin de mejorar el rendimiento del método ver por ejemplo (Dolean, Gander, Kheriji, Kwok, & R., 2016; Cai & Keyes, 2002). Un enfoque alternativo consiste en resolver usando un esquema más robusto aun cuando este tenga solo convergencia lineal.

### 2.2.2 Esquema de linealización de Picard modificado

Este esquema fue propuesto por (Celia & Bouloutas, 1990), y posteriormente ha sido usado por varios autores por ejemplo ver (Lehmann & Ackerer, 1998; Caviedes, P., & Murillo, 2013; Kuraz, Mayer, & Pech, 2015; List & Radu, 2016; Lipnikova et al., en prensa). Es claro que este método coincide con el método de Newton en el caso de conductividad hidráulica constante o cuando se usa la ecuación de Richards después de haber aplicado la transformada de Kirchhoff. El método de Picard es solo linealmente convergente pero es más robusto que el método de Newton esto fue demostrado por (Lehmann & Ackerer, 1998), la idea del método es discretizar la no linealidad que involucra a  $\theta$  cuadráticamente mientras que la no linealidad de  $K$  es aproximada linealmente por lo tanto el método solo es linealmente convergente, el método aún involucra el cálculo de derivadas, Es importante señalar que la convergencia de este método también podría fallar como se demuestra en uno de los ejemplos propuestos por (List & Radu, 2016). El esquema Picard modificado se construye de la siguiente forma:

Comenzamos usando un esquema de linealización de Picard estándar en la ecuación (13) para lo cual usamos el superíndice  $n$ , es así que se tiene el esquema siguiente:

$$\theta_{k+1}^{n+1} - h_t \operatorname{div}(K_{k+1}^n \nabla(\Psi_{k+1}^{n+1} + z)) = \theta_k + h_t S_{k+1} \quad (6)$$

La clave del método es expandir  $\theta$  en una serie de Taylor truncada en una vecindad de  $\Psi_{k+1}^n$  y evaluar la expansión en  $\Psi_{k+1}^{n+1}$ , es decir:

$$\theta_{k+1}^{n+1} \approx \theta_{k+1}^n + \frac{d\theta_{k+1}^n}{d\Psi} (\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n)$$

$$\theta_{k+1}^{n+1} \approx \theta_{k+1}^n + C_{k+1}^n (\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n) \quad (7)$$

reemplazando (7) en (6) se tiene finalmente el esquema de Picard modificado, el cual de aquí en adelante lo llamaremos simplemente esquema de Picard

$$C_{k+1}^n (\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n) - h_t \operatorname{div}(K_{k+1}^n \nabla(\Psi_{k+1}^{n+1} + z)) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t S_{k+1} \quad (8)$$

que es lo mismo que:

$$C_{k+1}^n \Psi_{k+1}^{n+1} - h_t \operatorname{div}(K_{k+1}^n \nabla(\Psi_{k+1}^{n+1} + z)) = \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t S_{k+1} + C_{k+1}^n \Psi_{k+1}^n \quad (9)$$

El esquema (9) nos dice que para cada paso de tiempo fijo  $t_k$  se debe resolver un cierto número de veces la ecuación diferencial lineal homogénea (9), en donde se suponen conocidos  $\Psi_k$ ,  $\Psi_{k+1}^n$ , y por tanto también se conocen  $\theta_k$ ,  $\theta_{k+1}^n$ ,  $C_{k+1}^n$  y  $K_{k+1}^n$ .

La convergencia del método de Picard modificado es estudiada por (Radu et al., 2006), este autor demuestra que la condición de convergencia del esquema es similar a la del método de Newton (nos remitiremos a la desigualdad (5)), aún así, desde el punto de vista teórico, existe un aumento cuantitativo de la robustez del método comparado con el método de Newton, es decir si el método de Picard falla también el de Newton pero si el método de Newton falla no necesariamente falla el método de Picard modificado, un ejemplo de esto se puede ver en (List & Radu, 2016) donde el método de Newton no converge sin embargo el método de Picard modificado sí converge, pero al aumentar el número de elementos de la malla el método de Picard modificado diverge, esto se debe a que la convergencia sigue dependiendo de la malla espacial. Es importante resaltar que aún cuando existe un aumento de la robustez el método de Picard modificado sigue teniendo el mismo problema que el método de Newton

### 2.2.3 L-esquema

El L-esquema fue propuesto por (Slodicka, 2002) para el método de elementos finitos de Galerkin y luego por (Radu, Pop, & Knabner, 2004) para elementos finitos mixtos, posteriormente fue estudiado por (List & Radu, 2016) también para el método de elementos finitos. No se han encontrado reportes de este esquema de linealización con el método de volúmenes finitos, igualmente la convergencia ha sido demostrada y analizada solo para el esquema de elementos finitos.

Este es el único esquema que aprovecha la monotonía de  $\theta$  y se caracteriza por ser un esquema robusto aunque solo linealmente convergente, no involucra ningún cálculo de derivadas y además la convergencia no depende del tamaño de la malla como si ocurre en los dos esquemas anteriores, más aún los sistemas lineales de ecuaciones algebraicas que se obtiene con el L-esquema están mucho mejor condicionados que los sistemas obtenidos usando los métodos de Newton y Picard modificado, debido a esto existen ejemplos donde el L-esquema puede ser más rápido en tiempo de máquina que el método Newton aún cuando solo tiene convergencia

lineal, ver por ejemplo (List & Radu, 2016).

A continuación describiremos el L-esquema propuesto por (List & Radu, 2016), para elementos finitos de Galerkin lineales. Nosotros restringiremos el análisis a condiciones de borde de Dirichlet homogéneas solo por simplicidad, aún cuando la extensión a condiciones más generales suelen ser simples. La formulación variacional o débil del problema (13) queda dada como se sigue:

$$\begin{cases} \text{hallar } \Psi_{k+1} \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \langle \theta_{k+1}, \varphi \rangle + h_t \langle K_{k+1} \nabla(\Psi_{k+1} + z), \nabla \varphi \rangle = \langle \theta_{k+1} + h_t S_{k+1}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (10)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno en  $L^2(\Omega)$ , sea  $\mathbb{T}_h = \{T_i / i = 1, 2, \dots, M\}$  una descomposición tipo elementos finitos del dominio  $\Omega$  y sea  $V_h = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_h\}$  un subespacio de dimensión finita de  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $v_i|_{T_j}$  es un polinomio de grado 1 para cualesquier  $i = 1, 2, \dots, h$  y  $T_j \in \mathbb{T}$ . Para mayores detalles del método de elementos finitos y su implementación nos referimos al libro de (Knabner & Angermann, 2003), la formulación completamente discreta en el tiempo y en el espacio queda como se sigue:

$$\begin{cases} \text{hallar } \Psi_{k+1} \in V_h \text{ tal que:} \\ \langle \theta_{k+1}, v \rangle + h_t \langle K_{k+1} \nabla(\Psi_{k+1} + z), \nabla v \rangle = \langle \theta_k + h_t S_{k+1}, v \rangle \quad \forall v \in V_h \end{cases} \quad (11)$$

Notemos que por simplicidad no se ha cambiado la notación de  $\Psi_{k+1} \in H_0^1(\Omega)$  solución del problema continuo (10) y  $\Psi_{k+1} \in V_h$  solución del problema discreto (11). A continuación presentamos la linealización del problema (11) mediante el L-esquema para lo cual usamos el superíndice  $n$ :

$$\begin{cases} \text{Dado } \Psi_k \text{ y } \Psi_{k+1}^n \text{ Hallar } \Psi_{k+1}^{n+1} \text{ tal que:} \\ L \langle \Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n, v \rangle + h_t \langle K_{k+1}^n \nabla(\Psi_{k+1}^{n+1} + z), \nabla v \rangle = \langle \theta_k - \theta_{k+1}^n + h_t S_{k+1}, v \rangle \\ \text{para cada } v \in V_h \end{cases} \quad (12)$$

El elemento clave en el método de linealización L-esquema es la adición del término de estabilización  $L \langle \Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n, v \rangle$ . La convergencia del L-esquema es global es decir es independiente de la solución inicial aunque es claro que será beneficioso si se empieza las iteraciones con la solución obtenida en el paso anterior de tiempo.

### 2.3 Discretización Espacial

Las aproximaciones típicas que se aplican al dominio espacial son los esquemas de diferencias finitas, elementos finitos, elementos finitos mixtos y volúmenes finitos.

### 2.3.1 Elementos Finitos

Existen numerosos trabajos que involucran una discretización de Euler hacia atrás en el tiempo y los elementos finitos de Galerkin en el espacio ver por ejemplo (Celia & Bouloutas, 1990), (Lehmann & Ackerer, 1998), (Slodicka, 2002), (Radu et al., 2004), (Berninger, Kornhuber, & Sander, 2011), List et al.(2016) (List & Radu, 2016). Según lo demuestra Celia et al. (1990) (Celia & Bouloutas, 1990) un esquema de Euler en el tiempo, conjuntamente con los elementos finitos de Galerkin en el espacio aplicados a la ecuación de Richards podría producir soluciones oscilatorias, aún cuando el esquema tiene la propiedad de conservación de masa, el mal desempeño de la solución de elementos finitos se debe a la pérdida de monotonicidad que resulta de la incapacidad del esquema de satisfacer el principio del máximo. Además el número de iteraciones aumenta dramáticamente con la condición inicial es decir, el número de iteraciones aumenta a medida que la condición inicial se vuelve seca.

### 2.3.2 Elementos Finitos Mixtos

Existen varios trabajos que usan elementos finitos mixtos para resolver la ecuación de Richards ver por ejemplo (Bergamaschi & Putti, 1999), (Pop & Radu, 2004), (Radu et al., 2004), (Radu, Pop, & Knabner, 2008).

Segun (Pop & Radu, 2004) la discretización en el tiempo se logra mediante un esquema de Euler hacia atrás, mientras que para el espacio se lo hace mediante elementos finitos mixtos empleando más precisamente los elementos Raviart-Thomas (Raviart & Thomas, 1977) y el espacio de funciones constantes a trozos. El esquema numérico obtenido es implícito, lo que significa que en cada paso de tiempo se debe resolver un problema no lineal para lo que se usa un proceso de linealización

### 2.3.3 Volúmenes Finitos

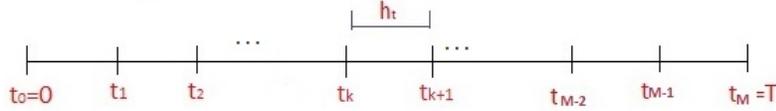
El método de volúmenes finitos es útil para la simulación numérica de leyes de conservación y este es justamente el caso de la ecuación de Richards. Existen varias referencias sobre esquemas numéricos de volúmenes finitos para la ecuación de Richards ver por ejemplo (Eymard et al., 1999), (Zambra, Dumbser, Toro, & Moraga, 2012), (Misiats & Lipnikov, 2013), (Caviedes et al., 2013), (Lai & Ogden, 2015), (Brenner, Hilhorst, & Vu-Do, 2016), (Brenner & Cancès, 2017).

Para la discretización en el tiempo se usa generalmente el método de Euler hacia atrás mientras que para el espacio existen varios esquemas de volúmenes finitos, algunos de estos explícitos como los usados en (Misiats & Lipnikov, 2013), (Caviedes et al., 2013), (Zambra et al., 2012), y otros implícitos como los usados en (Caviedes et al., 2013) en estos casos obtenemos un problema discreto no lineal donde se emplea un esquema de linealización.

### 3 Resultados de la Investigación

El esquema propuesto esta basado en un método de Euler hacia atrás en el tiempo, su implementación esta dada a través de una malla equiespaciada, para este efecto consideramos el intervalo de simulación  $(0, T)$ , y  $M$  un número entero positivo y definimos  $h_t = T/M$  el paso de malla y  $t_k = kh_t$  los nodos de la malla de acuerdo a la figura 1 siguiente:

**Figura 1** Malla para la discretización en el tiempo. Fuente: Creación propia



Con la finalidad de simplificar un poco la escritura, en todo lo que sigue usamos la siguiente notación:  $\theta(\Psi(z, t_k)) = \theta_k$ . Por lo tanto, la discretización de la ecuación de Richards en su forma mixta, usando un esquema de Euler hacia atrás, queda como se sigue:

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h_t} - \text{div}(K_{k+1} \nabla(\Psi_{k+1} + z)) = S_{k+1}$$

que es equivalente a:

$$\theta_{k+1} - h_t \text{div}(K_{k+1} \nabla(\Psi_{k+1} + z)) = \theta_k + h_t S_{k+1} \quad (13)$$

Esto significa que a cada paso de tiempo  $t_{k+1}$  debemos resolver la ecuación no lineal estacionaria (13), note que en esta ecuación se supone conocido el contenido de humedad en el tiempo  $t_k$  es decir  $\theta_k$ . Para resolver el problema no lineal (13) es necesario usar un método de linealización.

El nuevo esquema propuesto para linealizar la ecuación de Richards es globalmente convergente y su convergencia no depende de la malla ni tampoco del esquema de discretización seleccionado para el espacio, los experimentos numéricos realizados indican una significativa mejora en el tiempo de máquina y número de iteraciones.

Este método de linealización esta basado en el L-esquema y en adelante lo llamaremos L-esquema generalizado. En la ecuación (13) aplicamos un método de linealización de Picard estandar y obtenemos (6), en donde remplazamos  $\theta_{k+1}^{n+1}$  por la siguiente aproximación  $\theta_{k+1}^{n+1} \approx \theta_{k+1}^n + L(\Psi_{k+1}^n)(\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n)$ , donde la función  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será considerada como constante por tramos, obteniendo el esquema siguiente:

$$\theta_{k+1}^n + L(\Psi_{k+1}^n)(\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n) - h_t \text{div}(K_{k+1}^n \nabla(\Psi_{k+1}^{n+1} + z)) = \theta_k + h_t S_{k+1} \quad (14)$$

Para determinar L definimos la partición finita de  $\mathbb{R}$  siguiente:  $\{I_i \subset \mathbb{R}/i=0, 1, \dots, H\}$  con las propiedades habituales de toda partición es decir  $I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$  y

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^H I_i$$

Puesto que  $\theta$  es Lipschitz continua,  $\theta|_{I_i}$ , para  $i \in \{0, 1, 2, \dots, H\}$  son también Lipschitz continuas con constante de Lipschitz  $L_i \leq L_\theta \quad i = 1, 2, \dots, H$ . Definimos entonces L de la manera siguiente:

$$L(z) = \begin{cases} L_0 & \text{si } z \in I_0 \\ L_1 & \text{si } z \in I_1 \\ L_2 & \text{si } z \in I_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ L_H & \text{si } z \in I_H \end{cases} \quad (15)$$

En la práctica una posible implementación del método puede ser la que describiremos a continuación:

Suponemos adicionalmente que  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cumple con las siguientes hipótesis:

- (i)  $\theta(z) = \theta_s$  para todo  $z > 0$ ,
- (ii)  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \theta(z) = \theta_r$ ,
- (iii)  $\theta$  es estrictamente creciente en  $(-\infty, 0)$ ,
- (iv)  $\theta \in C(-\infty, 0)$
- (v) Existe un único  $\bar{x} \in (-\infty, 0)$  tal que la función  $\theta'$  es monótona creciente entre  $(-\infty, \bar{x})$  y es monótona decreciente entre  $(\bar{x}, 0)$ .

Es importante señalar que las ecuaciones de Van-Genuchten cumplen perfectamente con estas hipótesis. Para la implementación del L-esquema generalizado nosotros pretendemos determinar la partición de  $\mathbb{R}$  de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- (i)  $I_i \subset \mathbb{R}$  son intervalos para todo  $i = 1, 2, \dots, H$
- (ii) Para todo  $I_i, I_j$  intervalos distintos se tiene que:

$$\int_{I_i} C(z) dz = \int_{I_j} C(z) dz$$

Observe que  $\theta'(z) = 0$  para todo  $z > 0$ , puesto que  $\theta(z) = \theta_s$  para todo  $z > 0$ , lo que significa que:

$$A_T = \int_{-\infty}^{+\infty} C(z) dz = \int_{-\infty}^0 C(z) dz = \theta(0) - \theta_s$$

Consideramos  $p \in \mathbb{N}$  fijo que por lo general tomará valores pequeños, para los ejemplos se ha tomado  $p = 2, 3, 4, 6, 8$ . Dividimos  $A_T$  en  $p$  áreas de igual de magnitud  $A = A_T/p$ .

Por las hipótesis hechas sobre la función  $\theta$ , y más concretamente el punto iii), es inmediato ver que  $\theta$  es invertible en  $(-\infty, 0)$ , por lo que es posible definir la función inversa como  $\theta^{-1} : (\theta_r, \theta_s) \rightarrow (-\infty, 0)$ , luego dado  $x_i \in (-\infty, 0)$  es posible hallar  $x_{i+1} \in (-\infty, 0)$  de manera que el área bajo la curva  $C$  y comprendida entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  sea exactamente  $A$ :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} C(z) dz = A \Rightarrow x_{i+1} = \theta^{-1}[\theta(x_i) + A] \quad (16)$$

Usando (16) resulta fácil implementar un algoritmo para encontrar la partición.

En lo que que sigue a este método lo llamaremos LGp esquema donde  $p$  esta relacionado con el numero de intervalos  $I_k$  que se tiene, a continuación presentáramos dos ejemplos bidimensionales los cuales pretenden de alguna manera mostrar las bondades del nuevo esquema. Los algoritmos fueron implementados en FreeFem++ y para la discretización espacial hemos escogido el método de elementos finitos con distintos tamaños de malla, se compara el número de iteraciones del método de linealización y el tiempo de maquina empleado

### 3.1 Experimentos Numéricos

Las siguientes simulaciones fueron realizadas en una computadora portatil HP Pavilion dm4 con sistema operativo Windows 10 pro.

**EJEMPLO 1:** El ejemplo presentado fue propuesto por (List & Radu, 2016), Este es un ejemplo de inyección/extracción en la zona vadosa, el domino  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , esta dividido en una zona vadosa notada por  $\Omega_v = (0, 1) \times (-3/4, 0)$  y una zona saturada notada por  $\Omega_s = (0, 1) \times (-1, -3/4)$  de tal manera que  $\Omega = \Omega_v \cup \Omega_s$ . El problema tiene condiciones de borde mixtas una condición de Dirichlet en  $\Gamma_D = (0, 1) \times \{0\}$  y una condición de Neumann sobre  $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$ .

$$\psi = -3 \text{ sobre } \Gamma_D$$

$$[-K(\psi)\nabla(\psi + z)] \bullet \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N$$

Las funciones de contenido de humedad y conductividad hidráulica están dadas por el modelo de Van Genuchten con los siguientes parámetros  $\theta_r = 0,026$ ,  $\theta_s = 0,42$ ,  $\alpha = 0,95$ ,  $n = 2,9$ ,  $m = 1 - 1/n$  y  $K_s = 0,12$  puesto que  $n > 2$  se deduce inmediatamente que son tanto  $K$  como  $\theta$  son Lipschitz continuas la condición inicial es discontinua en la transición de zona saturada a zona vadosa y está dada por:

$$\psi(x, z, 0) = \psi_0(x, z) = \begin{cases} -3 & \text{si } (x, z) \in \Omega_v \\ -z - 3/4 & \text{si } (x, z) \in \Omega_s \end{cases}$$

El problema tiene un término fuente el cual toma valores positivos y negativos dado por:

$$f(x, z, t) = \begin{cases} -0,006 \cos(3/4 \Pi z) \text{sen}(2 \Pi x) & \text{si } (x, z) \in \Omega_v \\ 0 & \text{si } (x, z) \in \Omega_s \end{cases}$$

La condición de parada para los métodos de linealización está dada por:

$$\|\psi_{k+1}^{n+1} - \psi_{k+1}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,001$$

En cuanto al L-esquema se tomó  $L = 0,25$ , mientras que para el LGp esquema se tomo  $p = 4$  Examinamos la solución para el primer paso de tiempo con  $h_t = 1$ , y para distintos tamaños de malla  $h$ , en este primer ejemplo se calculó el número de iteraciones de cada método de linealización (ver tabla 1)

**Cuadro 1** Ejemplo 1 Número de iteraciones de los métodos de linealización. Fuente: Creación propia

h	Newton	Picard	L	LG4
0,3041	19	7	20	10
0,16027	—	8	22	11
0,0552	—	11	24	11
0,0428	—	13	25	12
0,033	—	17	26	13
0,0271	—	22	27	13
0,0234	—	—	27	13
0,0206	—	—	27	13
0,0191	—	—	27	13

En la tabla 1 podemos apreciar que para un tamaño de malla menor o igual a 0.16027 el método de Newton diverge mientras que el método de Picard no es convergente para tamaños de malla menores o iguales a 0.0271, así mismo podemos ver que el L-esquema y el LG4 esquema convergen para todos los tamaños de malla empleados, así mismo podemos apreciar que el LG4 hace muchas menos iteraciones que el L-esquema lo que se traduce en un menor tiempo de computo.

**EJEMPLO 2:** Con el fin de comparar los métodos de linealización usaremos un ejemplo en el que se describe la recarga de un depósito de agua subterránea a partir de una zona de drenaje.

El dominio  $\Omega = (0, 2) \times (-3, 0)$  representa una sección vertical del subsuelo en la parte derecha del dominio el nivel freático se fija por una condición de Dirichlet  $\Gamma_{D_1} = \{2\} \times (-3, -2)$ , el drenaje se modela con una condición de Dirichlet en el límite superior  $\Gamma_D = (0, 1) \times \{0\}$ , el resto de la frontera  $\Gamma_N = \partial\Omega - (\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2})$  es puesta sin condiciones de flujo, más precisamente:

$$\psi(x, z, t) = \begin{cases} -2 + 2,2 \frac{t}{0,0625} & \text{si } t \leq 0,0625 \\ 0,2 & \text{si } t > 0,0625 \end{cases}$$

sobre  $\Gamma_{D_1}$

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= -2 - z \quad \text{sobre } \Gamma_{D_2} \\ [-K(\psi)\nabla(\psi + z)] \bullet \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \end{aligned}$$

Se establece la siguiente condición inicial:

$$\psi(x, z, 0) = -2 - z \quad \text{para todo } (x, z) \in \Omega$$

Las funciones de contenido de humedad y conductividad hidráulica están dadas por el modelo de Van Genuchten con los siguientes parámetros  $\theta_r = 0,131$ ,  $\theta_s = 0,396$ ,  $\alpha = 0,423$ ,  $n = 2,06$ ,  $m = 1 - 1/n$  y  $K_s = 0,0496$ , puesto que  $n > 2$  se deduce inmediatamente que son tanto  $K$  como  $\theta$  son Lipschitz continuas.

La condición de parada para los métodos de linealización está dada por:

$$\|\psi_{k+1}^{n+1} - \psi_{k+1}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,00000001$$

En cuanto al L-esquema se tomó  $L = 0,0451$ , mientras que para el LGp esquema se tomo  $p = 2, 3, 4, 6, 8$  Examinamos la solución para un tiempo total de simulación  $T = 3/16$  con un paso de tiempo  $h_t = 1/48$ , es decir calculamos para 9 niveles de tiempo además usamos distintos tamaños de malla  $h$ , en este segundo ejemplo se calculó el número de iteraciones y el tiempo de cómputo de cada método de linealización.

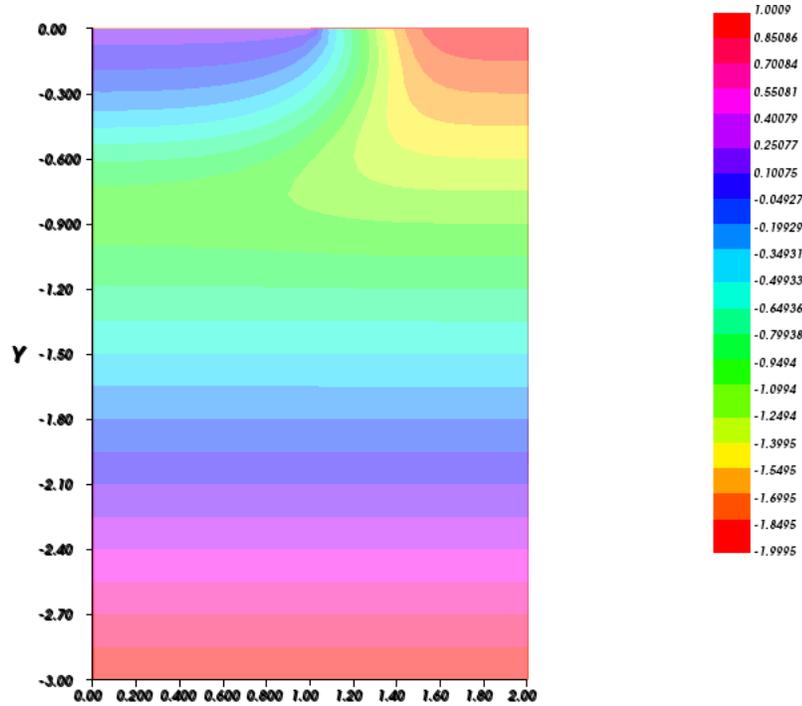
**Cuadro 2** Ejemplo 2 Número de iteraciones. Fuente: Creación propia

h	Picard	L	LG2	LG3	LG4	LG6	LG8
0,304138	89	557	282	142	157	159	154
0,15	103	803	286	168	188	190	184
0,106425	104	833	286	174	191	193	188
0,09	108	846	286	179	195	197	190
0,06407	108	852	286	181	197	198	192
0,05763	108	854	286	181	197	199	192

En la tabla 2 se puede apreciar que para todos los valores de p el LGp esquema es muy superior al L-esquema en lo que a número de iteraciones se refiere pues hace muchas menos iteraciones, el mejor resultado se obtiene con p=3 donde el L-esquema hace tres veces más iteraciones que el LG3 esquema.

El método de Picard tiene resultados un poco mejores que el LGp esquema pero recuerde que el método de Picard no es globalmente convergente más aun su convergencia depende del tamaño de la malla como se muestra en el ejemplo 1.

**Figura 2** Solución ejemplo 2 usando el esquemas de linealización LG3 con un tamaño de malla  $h=0.06425$ . Fuente: Creación propia



**Cuadro 3** Ejemplo 2 Tiempo de cómputo. Fuente: Creación propia

h	Picard	L	LG2	LG3	LG4	LG6	LG8
0,304138	14,5	54,3	41,9	21	23,2	23,6	23,3
0,15	55,2	305,3	172,9	99,8	111,8	113,2	110,3
0,106425	123,8	668,5	373,8	226,4	249	262,7	246,7
0,09	277,6	1244,2	659,2	408,5	458	452,9	439,2
0,06407	367,9	2035,6	1084,6	678	736	746,8	730,5
0,05763	513,7	2854,4	1535,2	954,4	1058	1049,5	1018,3

De manera similar en la tabla 3 se puede ver que para todos los valores de  $p$  el LGp esquema es muy superior al L-esquema en lo que a tiempo de cómputo se refiere, obteniendo el mejor resultado para  $p=3$  donde el L-esquema se demora casi tres veces más tiempo que el LG3 esquema. Así mismo podemos apreciar que el método de Picard tiene resultados un poco mejores que el LGp esquema pero recuerde que el método de Picard no es globalmente convergente más aun su convergencia de-

pende del tamaño de la malla. La figura 2 ilustra la solución de ejemplo 2 obtenida usando el nuevo esquema de linealización.

## 4 Bibliografía

### Referencias

- Alt, H., & Luckhaus, S. (1983). Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Mathematische Zeitschrift*, *183*, 311-341.
- Bergamaschi, L., & Putti, M. (1999). Mixed finite elements and newton type linearizations for the solution of richards equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *45*, 1025-1046.
- Berninger, H., Kornhuber, R., & Sander, O. (2011). Fast and robust numerical solution of the richards equation in homogeneous soil. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *49*, 2576–2597.
- Brenner, K., & Cancès, C. (2017). Improving newtons method performance by parametrization: the case of the richards equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *55*, 1760-1785.
- Brenner, K., Hilhorst, D., & Vu-Do, H. (2016). The generalized finite volume sushi scheme for the discretization of richards equation. *Vietnam Journal of Mathematics*, *44*, 557-586.
- Buckingham, E. (1907). Studies on the movement of soil moisture. *U.S. Department of Agriculture Bureau of Soils*, *38*, 0.
- Cai, X. C., & Keyes, D. E. (2002). Nonlinearly preconditioned inexact newton algorithms. *Siam Journal on Scientific Computing*, *24*, 183-200.
- Caviedes, D., P., G., & Murillo, J. (2013). conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1d richards equation. *Journal of Hydrology*, *480*, 69-84.
- Celia, M., & Bouloutas, E. (1990). General mass-conservative numerical solutions for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*, *26*, 1483-1496.
- Dolean, V., Gander, M. J., Kheriji, W., Kwok, F., & R., M. (2016). Nonlinear preconditioning: How to use a nonlinear schwarz method to precondition newton's method. *SIAM J. Scientific Computing*, *6*, 3357–3380.
- Eymard, R., Gutnic, M., & Hilhorst, D. (1999). The finite volume method for richards equation. *Computational Geosciences*, *3*, 259-294.
- Knabner, P., & Angermann, L. (2003). *Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations*. Springer.
- Kuraz, M., Mayer, P., & Pech, P. (2015). Solving the nonlinear and nonstationary richards equation with two-level adaptive domain decomposition (dd-adaptivity). *Applied Mathematics and Computation*, *267*, 207-222.
- Lai, W., & Ogden, F. (2015). A mass-conservative finite volume predictor–corrector solution of the 1d richards' equation. *Journal of Hydrology*, *523*, 119–127.

- Lehmann, F., & Ackerer, P. (1998). Comparison of iterative methods for improved solutions of the fluid flow equation in partially saturated porous media. *Transport in Porous Media*, 31, 275-292.
- Lipnikova, K., Moultona, D., & Svyatskiy, D. (en prensa). New preconditioning strategy for jacobian-free solvers for variably saturated flows with. *Advances in Water Resources*, 0, 0.
- List, F., & Radu, F. (2016). study on iterative methods for solving richards equation. *Computational Geosciences*, 20, 341-35.
- Marinoschi, G. (2010). *Functional approach to nonlinear models of water flow in soils* (1st Edition. ed.). Springer.
- Misiats, O., & Lipnikov, K. (2013). Second-order accurate monotone finite volume scheme for richards equation. *Journal of Computational Physics*, 239, 123-137.
- Pop, I., & Radu, F. (2004). Mixed finite elements for the richards equation: linearization procedure. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 365-373.
- Radu, F., Pop, I., & Knabner, P. (2004). Order of convergence estimates for an euler implicit, mixed finite element discretization of richards' equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42, 1452-1478.
- Radu, F., Pop, I., & Knabner, P. (2006). On the convergence of the newton method for the mixed finite element discretization of a class of degenerate parabolic equation. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, 42, 1194-1200.
- Radu, F., Pop, I., & Knabner, P. (2008). Error estimates for a mixed finite element discretization of some degenerate parabolic equations. *Numerische Mathematik*, 109, 285-311.
- Raviart, P., & Thomas, J. (1977). A mixed finite element method for second order elliptic problems. in mathematical aspects of the finite elements method, galligani i, magenes e (eds) lecture notes in mathematics. *Springer:New York*, 606.
- Richards, L. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Journal of Applied Physics*, 1, 318-333.
- Slodicka, M. (2002). A robust and efficient linearization scheme for doubly nonlinear and degenerate parabolic problems arising in flow in porous media. *Siam Journal on Scientific Computing*, 23, 1593-1614.
- W., J., & Delleur. (2006). *The handbook of groundwater engineering, second edition*. CRC Press.
- Wang, X., & H., T. (2013). Trust-region based solver for nonlinear transport in heterogeneous porous media. *J. Comput. Phys.*, 253, 114-137.
- Younis, R., Tchelepi, A., Dagmar, T., & Aziz, K. (2010). Adaptively localized continuation-newton method nonlinear solvers that converge all the time. *SPE Journal*, 15, 526-544.
- Zambra, C., Dumbser, M., Toro, E., & Moraga, N. (2012). A novel numerical method of high-order accuracy for flow in unsaturated porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89, 227-240.