MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL

2019, Vol.17, No. 1 Artículo Divulgativo Publicado: 2019-06-30

Condiciones para que un par de funciones tengan un único punto fijo en común

Conditions for a couple of functions have a only fixed point in common

Igsil A. Dávila-Montenegro y Juan C. Yungán-Cazar

Resumen. En este trabajo se estudian las condiciones que deben tener un par de funciones definidas en un espacio métrico para garantizar la existencia de un único punto fijo en común entre ellas. Se analizan resultados propuestos por varios autores para crear un marco teórico lo más completo posible para futuras investigaciones. Además se presenta una generalización de algunos de estos resultados.

Palabras clave: Punto fijo, contracción, punto fijo común.

Abstract In this paper we study the conditions that a pair of defined functions must have in a metric space to guarantee the existence of a single fixed point in common among them. The results proposed for several authors are analyzed. In addition, a generalization of some of these results is presented.

Keywords: Fixed point, contraction, common fixed point.

1. INTRODUCCIÓN

Algunos de los resultados sobre la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones no lineales, existencia de funciones implícitas, métodos numéricos, existencia de fractales, medidas invariantes y

Igsil A.Dávila-Montenegro
Facultad de Ciencias, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Panamericana Sur km 1 1/2, Riobamba-Ecuador, e-mail: igsil.davila@espoch.edu.ec

Juan C. Yungán-Cazar
Facultad de Ciencias, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Panamericana Sur km 1 1/2, Riobamba-Ecuador, e-mail: jyungan@espoch.edu.ec

existencia de subespecies invariantes, pueden ser obtenidos como consecuencia de la teoría del punto fijo. Los primeros resultados de esta teoría fueron desarrollados por el matemático Stefan Banach 1922, conocidos como el principio de contracción de Banach. En Lucimar [1] y Rhoades [2] se presentan resultados que generalizan el principio de contracción de Banach, utilizando para ello modificaciones en la contracción, lo que permitió generalizar el resultado de Banach para una función, basados en estos resultados en este trabajo analizaremos el siguiente problema. Dadas F, G funciones definidas de un espacio métrico (M,d) en sí mismo, queremos hallar condiciones sobre las funciones y/o sobre el espacio (M,d) que nos permitan garantizar la existencia de un punto fijo común para F y G, es decir, existe $z \in M$ tal que $F(z) = z = G(z)$. En 1968 Kannan basado en los trabajos de Banach demostró que si (M,d) un espacio métrico completo, y $F,G : M \longrightarrow M$ dos funciones para las cuales existe $\alpha \in [0,1/2]$ tal que para todo $x,y \in M$ se tiene que:

$$d(F(x), G(y)) \leq \alpha [d(x, F(x)) + d(y, G(y))] \tag{1}$$

entonces F y G poseen un punto fijo en común. En este trabajo se analiza varias generalizaciones de este teorema que se han obtenido en varias direcciones, las cuales se obtienen con la sustitución de la Ecuación 1 para dos funciones por otras contracciones.

2. DEFINICIONES BÁSICAS Y NOTACIÓN

Definición 2.1 Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico $(M.d)$ Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M si dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n,m > n_0$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. En este caso denotamos por $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.
Definición 2.2 Se dice que el espacio métrico (M,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en M es convergente a un punto de M.
Definición 2.3 Sea $\{X_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (M,d). Se dice que $\{X_n\}$ es una $\alpha-$ contracción si existe $\alpha \in (0,1)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(X_{n+1}, X_n) \leq ad(X_n, X_{n-1})$$

El siguiente lema es muy usado en la demostración de algunos resultados de este trabajo.
Lema 2.1 Si X_n es una $\alpha-$ contracción en un espacio métrico (M,d) entonces X_n es una sucesión de Cauchy en (M,d).
Proof. Se observa que de la definición 2.3 tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(X_{n+1}, X_n) \leq \alpha^n d(X_0, X_1)$$

Sean $n,m \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, por desigualdad triangular tenemos que

$$d(X_n, X_m) \leq d(X_n, X_{n+1}) + d(X_{n+1}, X_m)$$

de la observación se tiene que

$$d\left(x_n,x_m\right)\leq \alpha^n d\left(x_1,x_0\right)+d\left(x_{n+1},x_m\right)$$

Aplicando nuevamente desigualdad triangular se obtiene

$$d\left(x_n,x_m\right)\leq \alpha^n d\left(x_1,x_0\right)+d\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)+\cdots+d\left(x_{m-1},x_m\right)$$

Luego, por la observación se tiene

$$d\left(x_n,x_m\right)\leq \alpha^n d\left(x_1,x_0\right)+\qquad \alpha^{n+1} d\left(x_1,x_0\right)+\cdots+\alpha^{m-1} d\left(x_1,x_0\right)$$

por lo tanto,

$$d\left(x_n,x_m\right)\leq \alpha^n d\left(x_1,x_0\right)\left[1+\alpha+\alpha^{n+1}+\cdots+\alpha^{m-1-n}\right]$$

Tomando $k=m-1-n$ se tiene $d\left(x_n,x_m\right)\leq \alpha^n d\left(x_1,x_0\right)\sum_i^k =_0 \alpha^i$ entonces $\sum_i^k =_0 \alpha^i$ es una serie convergente y así, $d\left(x_n,x_m\right)\leq d\left(x_1,x_0\right)\frac{a^n}{1-\alpha}$ ahora tomando limite cuando $n,m\to\infty$se tiene que
$\lim_{n\to\infty} d\left(X_n,X_m\right)\leq \lim_{n\to\infty} d\left(X_1,X_0\right)\frac{a^n}{1-\alpha}$ y como $\alpha\in(0,1)$ entonces $\alpha^n\to 0$ por lo que $\lim_{n\to\infty} d\left(X_n,X_m\right)\leq 0$ asi, $\lim_{n\to\infty} d\left(X_n,X_m\right)=0$ de manera que según la definición 2.1, $\{X_n\}$ es una sucesión de Cauchy en (M,d).
Definición 2.4 Sea M un conjunto no-vacío y $F:M\to M$ una función cualquiera. Un punto $x\in M$ se llama **punto fijo** de F si $F(x)=x$ Se denota por P_F al conjunto de puntos fijos de la función F, es decir,
$P_F=\{x\in M:F(x)=x\}$.
Sea M un conjunto no-vacío y $F,G:M\to M$ dos funciones. Un elemento $x\in M$ es un punto fijo en común para F y G si solo si $x\in P_F\cap P_G$.
Definición 2.5 Sea (M,d) un espacio métrico, una función $F:M\to M$ se dice que es una **contracción** (α-contracción,contracción de Banach o B-contracción) si existe $\alpha\in[0,1)$ tal que para todo $x,y\in M$

$$d\left(F(x),F(y)\right)\leq \alpha d(x,y)$$

3. RESULTADOS PRELIMINARES

3.1. Teorema (Principio de contracción de Banach-P.C.B)

Sea (M,d) un espacio métrico completo y $F:M\to M$ una α-contraccion, entonces:
1. Si $x_0\in M$ es un punto arbitrario y $\{x_n\}\subset M$es una sucesión definida por $x_n=F^n(x_0)$, para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ es convergente, existe $z\in M$ tal que $x_n\to z$.
2. $d\left(x_n,z\right)\leq \frac{a^n}{1-\alpha}d\left(x_0,x_1\right)$
3. $d(x_{n+1},z)\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}d\left(x_{n+1},x_n\right)$
4. $d\left(x_{n+1},z\right)\leq \alpha d\left(x_n,z\right)$
Algunas condiciones para que una función tenga un único punto fijo.
En esta sección presentamos algunos resultados sobre la teoría del punto fijo para

una función, dados por Lucimar [1], Rus [4], Istratescu [3] y Achari [9] respectivamente.
Teorema 3.2 Sea (M,d) un espacio métrico completo, $F : M \to M$ una función y $0 < \alpha < 1$ tal que para cada $x,y \in M$se cumple alguna de las siguientes condiciones
1. $d(F(x),F(y)) \leq \alpha d(x,y)$
2. $d(F(x),F(y)) \leq \alpha d(x,F(x))$
3. $d(F(x),F(y)) \leq \alpha d(y,F(y))$
4. $d(F(x),F(y)) \leq \frac{\alpha}{2}[d(x,F(y))+d(y,F(x))]$

Entonces F tiene un único punto fijo.
A continuación se presenta en resumen las condiciones contractivas y ejemplos de funciones que cumplen con una condición pero no con otra.
Sea (M,d) un espacio métrico completo, $F : M \to M$

P1. Principio de contracción de Banach
$d(F(x),F(y)) \leq \alpha d(x,y)$ Para todo $x,y \in M$ y $\alpha \in [0,1)$

P2. Teorema de Kannan [7]
$d(F(x),F(y)) \leq \alpha[d(x,F(x))+d(y,F(y))]$ Para todo $x,y \in M$ y $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

P3. Teorema de Lucimar [4]
$d(F(x),F(y)) \leq \alpha[d(x,F(y))+d(y,F(x))]$ Para todo $x,y \in M$ y $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

P4. Teorema de S. Riech [6]
$d(F(x),F(y)) \leq ad(x,F(x))+bd(y,F(y))+cd(x,y)$
Para todo $x,y \in M$ y $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, con $a+b+c < 1$.

P5. Teorema de Rus [4]

$$d(F(x),F(y)) \leq ad(x,y)+b[d(x,F(x))+d(y,F(y))]$$

Para todo $x,y \in M$ y $a,b \in \mathbb{R}^+$, con $a+2b < 1$

P6. Teorema de Hardy-Rogers [6]
$d(F(x),F(y)) \leq \alpha_1 d(x,F(x)) + \alpha_2 d(y,F(y)) + \alpha_3 d(x,F(y)) + \alpha_4 d(y,F(x)) + \alpha_5 d(x,y)$
Para todo $x,y \in M$ y $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i < 1$

Ejemplos:
En principio se observa que toda función que cumple la condición P1 es una función continua. En los siguientes ejemplos consideramos la métrica usual de $\mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|$.
1.- Ejemplo de una función que satisface P2 pero no P1

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{x}{5} & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

Así, F no es continua y por lo tanto no satisface P1, pero si P2.

2.- Ejemplo de una función que satisface P1 pero no P2.

$$F:[0,1]\to[0,1]$$

$$F(x)=\frac{x}{3}$$

F es continua y no satisface P2. Tomar $y=0$ y $x=\frac{1}{3}$

3.- Ejemplo de una función que satisface P4 pero no P1 ni P2.

$$F:[0,1]\to[0,1]$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{7x}{20} & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{3x}{10} & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

4.- Ejemplo de una función que satisface P2 pero no P3

$$F:[-1,1]\to[-1,1]$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & \text{si } x\in[-1,1)\\ 0 & \text{si } x=-1\end{cases}$$

5.- Ejemplo de una función que satisface P3 pero no P2.

$$F:[0,1]\to[0,1]$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & \text{si } x\in[0,1)\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$$

4. Resultados para dos funciones

Teorema 4.1 Sea (M,d) un espacio métrico completo, $F,G:M\to M$ funciones y $0<\alpha<1$ tal que para cada $x,y\in M$ se tiene que $d(F(x),G(y))\leq\alpha d(x,y)$ entonces $P_F\cap P_G=\{z\}$.

Proof. Sea $x_0\in M$ es un punto arbitrario y definamos una sucesión $\{x_n\}\subset M$ por , $x_{2n+1}=G(x_{2n})$ y $x_{2n+2}=F(x_{2n+1})$ para todo $n\in\mathbb{N}$, ahora aplicando la contracción de la hipótesis se tiene que $d(x_1,x_2)=d(G(x_0),F(x_1))\leq\alpha d(x_0,x_1)$, por lo tanto $d(x_1,x_2)\leq\alpha d(x_0,x_1)$. De manera análoga $d(x_2,x_3)=d(F(x_1),G(x_2))\leq\alpha d(x_1,x_2)$ de donde se tiene que $d(x_2,x_3)\leq\alpha d(x_1,x_2)$, en general por inducción de puede probar que para todo $n\in\mathbb{N}d(x_{n+1},x_n)\leq\alpha d(x_n,x_{n-1})$, así por el lema 2.1 existe $z\in M$ tal que $x_n\to z$.

Veamos que z es punto fijo de F y G, por desigualdad triangular y por definición de G se tiene

$$d\left(z,F\left(z\right)\right) \leq d\left(z,x_{2n+1}\right)+d\left(x_{2n+1},F\left(z\right)\right) = d\left(z,x_{2n+1}\right)+d\left(G\left(x_{2n}\right),F\left(z\right)\right)$$

Ahora aplicando la contracción de la hipótesis $d\left(z,F\left(z\right)\right) \leq d\left(z,x_{2n+1}\right)+\alpha d\left(x_{2n},z\right)$como $x_n \rightarrow z$ entonces $d\left(z,x_{2n+1}\right) \rightarrow 0$ y $d\left(x_{2n},z\right) \rightarrow 0$ por lo que aplicando limite cuando $n \rightarrow \infty$ en la última desigualdad se obtiene que $d\left(z,F\left(z\right)\right) \leq 0$, luego $F\left(z\right) = z$. De manera análoga se muestra que $G(z) = z$.
Se puede ver que z es el único punto fijo en común de F y G.
Supongamos que $F\left(z^*\right) = z^* = G\left(z^*\right)$ y $F\left(z\right) = z = G(z)$ entonces $d\left(z,z^*\right) = d\left(F\left(z\right),G\left(z^*\right)\right) \leq \alpha d\left(z,z^*\right)$, luego $d\left(z,z^*\right) \leq \alpha d\left(z,z^*\right)$ y como $0 < \alpha < 1$ entonces $d\left(z,z^*\right) \leq 0$ por lo que $z = z^*$de modo que el punto fijo es único.

A continuación se enuncian los resultados propuestos por Kannan [7], Lucimar [1], Rus [4], Yen-Khan [2], Hardy-Rogers [6] cuyas demostraciones se hacen siguiendo procedimientos análogos al teorema anterior.

Teorema 4.2 Sea $(M.d)$ un espacio métrico completo, $F,G : M \rightarrow M$ funciones. Si se cumple alguna de las siguientes contracciones para todo $x,y \in M$, entonces $P_F \cap P_G = \{z\}$

1. Para $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$d\left(F\left(x\right),G\left(y\right)\right) \leq \alpha\left[d\left(x,F\left(x\right)\right)+d\left(y,G\left(y\right)\right)\right]$$

2. Para $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$

$$d\left(F\left(x\right),G\left(y\right)\right) \leq \alpha\left[d\left(x,G\left(y\right)\right)+d\left(y,F\left(x\right)\right)\right]$$

3. Para $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ tal que $a+2b+c < 1$

$$d\left(F\left(x\right),G\left(y\right)\right) \leq ad\left(x,y\right)+b\left[d\left(y,F\left(x\right)\right)+d\left(y,G\left(y\right)\right)\right]+c\left[d\left(x,G\left(y\right)\right)+d\left(y,F\left(x\right)\right)\right]$$

4. Para $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ tal que $a+2b < 1$

$$d\left(F\left(x\right),G\left(y\right)\right) \leq a máx\left\{d\left(x,y\right),d\left(x,F\left(x\right)\right),d\left(y,G\left(y\right)\right)\right\}+b\left[d\left(x,G\left(y\right)\right)+d\left(y,F\left(x\right)\right)\right]$$

5. Para $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$

$$d\left(F\left(x\right),G\left(\left(y\right)\right) \leq a máx\left\{d\left(x,y\right),d\left(x,F\left(x\right)\right),d\left(y,G\left(y\right)\right),1/2\left[d\left(x,G\left(y\right)\right)+d\left(y,F(x)\right)\right]\right\}$$

6. Para $a,b, \in \mathbb{R}^+$ tal que $a < 1$ y $b < 1$

$$d\left(F\left(G(x)\right),G(y)\right) \leq ad\left(x,G(y)\right) \text{ y } d\left(G\left(F\left(x\right)\right),F\left(y\right)\right) \leq bd\left(x,F\left(y\right)\right)$$

7. Para $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$

$$d\left(F\left(x\right),G\left(y\right)\right) \leq \alpha \frac{d(x,F(x))d(x,G(y))+d(y,G(y))d(y,F(x))}{d(x,G(y))+d(y,F(x))}$$

5. RESULTADOS PRINCIPALES

Los siguientes lemas permiten obtener una generalización de algunas contracciones de las enunciadas en la sección anterior.

Lema 5.1 Sea M un conjunto no vacío y $F_i, G_i : M \to M$ funciones para $i = 1,2$, si
1.-$P_{F_1} = P_{G_1} = z$
2.- $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ y $G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1$
Entonces $P_{F_2} \cap P_{G_2} \neq \theta$.

Proof. Del ítem 1 tenemos que $F_1(Z) = Z$, por lo tanto aplicando F_2 tenemos que $F_2(F_1(Z)) = F_2(Z)$, del ítem 2 $F_2(F_1(Z)) = F_1(F_2(Z))$, por lo tanto $F_1(F_2(Z)) = F_2(Z)$, luego $F_2(z) \in P_{F_1}$, así $F_2(z) = z$. Análogamente se muestra que $G_2(z) = z$, luego $P_{F_2} \cap P_{G_2} \neq \theta$. y $P_{F_2} = P_{G_2} = \{z\}$.

Lema 5.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotado por F^n a la composición de Fn-veces. $F,G : M \to M$ Funciones. Si existe $m,n \in \mathbb{N}$ tal que $P_{F^n} = P_{G^m} = \{z\}$entonces $P_F = P_G = \{z\}$.
Proof. Si se considera $F_1 = F^n$, $G_1 = G^m, F_2 = F$ y $yG_2 = G$. Por hipótesis $P_{F_1} = P_{G_1} = \{z\}$ por otro lado,$F_1 \circ F_2 = F^n \circ F = F^{n+1} = F \circ F^n = F_2 \circ F_1$ y análogamente $G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1$ luego se satisfacen las hipótesis del lema 5.1 por lo tanto $P_F = P_G = \{z\}$.
Lema 5.3 Sean $F,G : M \to M$ funciones. Si $P_{F\circ G} = P_{G\circ F}$ entonces $P_F \cap P_G = \{z\}$.
Proof. Por hipótesis $(F\circ G)(z) = z$, aplicando la función G se tiene que $G(F\circ G)(z) = G(z)$ por lo que $(G\circ F)G(z) = G(z)$, así $G(z)$ es un punto fijo de $G\circ F$, luego por la hipótesis $G(z) = z$, análogamente se muestra que $F(z) = z$ por lo tanto $P_F \cap P_G = \{z\}$.

A continuación se presenta unas generalizaciones de los teoremas 4.1, 4.2 a partir de los lemas 5.1, 5.2 y 5.3.

Teorema 5.1 Sea (M,d) un espacio métrico completo, $f,g : M \to M$ dos funciones para las cuales existen $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ tal que $a+2b+2c < 1$ y $m,n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x,y \in M$

$$d(f^n(x), g^m(y)) \leq$$
$$ad(x,y) + b[(d(y, f^n(x)) + d(y, g^m(y))] + c[d(x, g^m(y)) + d(y, f^n(x))]$$

Entonces $P_f = P_g = \{z\}$.
Proof. Si se considera $F = f^n$ y $G = g^m$, sustituyendo en la contracción de la hipótesis se tiene que

$$d(F(x), G(y)) \leq$$
$$ad(x,y) + b[d(y, F(x)) + d(y, G(y))] + c[d(x, G(y)) + d(y, F(x))]$$

Así por el teorema 4.2 se tiene que $P_{f^n} = P_{g^m} = \{z\}$, luego por el lema 5.2 tenemos que $P_f = P_g = \{z\}$.

Teorema 5.2 Sea (M,d) un espacio métrico completo, $f,g : M \to M$ dos funciones para las cuales existen $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ tal que $a+2b+2c < 1$ y $m,n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x,y \in M$

$$d\left(g\left(f\left(x\right)\right), f\left(g\left(y\right)\right)\right) \leq$$
$$ad\left(x,y\right) + b\left[d\left(x, g\left(f\left(x\right)\right)\right) + d\left(y, f\left(g\left(y\right)\right)\right)\right] + c\left[d\left(x, f\left(g\left(y\right)\right)\right) + d\left(y, g\left(f\left(x\right)\right)\right)\right]$$

Entonces $P_f = P_g = \{z\}$.

Proof. Si se considera $F = g \circ f$ y $G = f \circ g$, sustituyendo en la contracción de la hipótesis tenemos que $d\left(F\left(x\right), G\left(y\right)\right) \leq ad\left(x,y\right) + b\left[d\left(y, F\left(x\right)\right) + d\left(y, G\left(y\right)\right)\right] + c\left[d\left(x, G\left(y\right)\right) + d\left(y, F\left(x\right)\right)\right]$, así por el teorema 4.2 $P_{g \circ f} = P_{f \circ g} = \{z\}$ luego, por el lema 5.3 se concluye que $P_f = P_g = \{z\}$.

Teorema 5.3 Sea (M,d) un espacio métrico completo,$f,g : M \to M$ dos funciones para las cuales existe $\alpha \in [0,1/2]$ y $m,n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x,y \in M$

$$d\left(f^n\left(x\right), g^m\left(y\right)\right) \leq$$
$$am\acute{a}x\left\{d\left(x,y\right), d\left(x, f^n\left(x\right)\right), d\left(y, g^m\left(y\right)\right)\right\} + \frac{1}{2}\left[d\left(x, g^m\left(y\right)\right) + d\left(y, f^n\left(x\right)\right)\right]$$

Entonces $P_f = P_g = \{z\}$.

Proof. Consideremos $F = f^n$ y $G = g^m$, sustituyendo en la contracción de la hipótesis tenemos que

$$d\left(F\left(x\right), G\left(y\right)\right) \leq$$
$$am\acute{a}x\left\{d\left(x,y\right), d\left(x, F\left(x\right)\right), d\left(y, G\left(y\right)\right)\right\} + \frac{1}{2}\left[d\left(x, G\left(y\right)\right) + d\left(y, F\left(x\right)\right)\right]$$

Así, por el teorema 4.2 se tiene que $P_{f^n} = P_{g^m} = \{z\}$, luego por el lema 5.2 tenemos que

$P_f = P_g = \{z\}$.

6. CONCLUSIONES

La principal condición para que un par de funciones tenga un único punto fijo es que el espacio métrico donde están definidas las funciones sea un espacio métrico completo ya que a través de la respectiva contracción de la hipótesis se puede encontrar una sucesión de Cauchy cuyo punto de convergencia será el punto fijo buscado para las funciones. El tipo de contracción también es importante ya que esto nos permitió obtener generalizaciones y un marco teórico muy completo para futuras investigaciones relacionadas con este tema. Queda abierta la siguiente pregunta: Que condición o condiciones pueden reemplazar la hipótesis de espacio métrico completo y garantizar así los resultados.

Referencias

1. Lucimar, N.G., Puntos fijos comunes. Boletín de Matemáticas, nueva serie, IV, 43-47, (1997).
2. Rhoades, B.E., Sessa, S., Khan, M.S. and Khan, M.D., Some fixed point theorems for Hardy-Rogers type mappings. Internat. J.Math. AndMath.Sci. 7,1, 75-87, (1984).
3. Istratescu, V.I., Fixed point Theory, An Introduction, Mathematics and its Aplications. 7, D. Reidel Publishing co.
4. Rus, I.A., Metrical Fixed Point Theorems. University of Cluj-Napoca, Departament of Mathematics, Romani.
5. Fisher, B., Results on common fixed points. Math. Japonica, 22, 335-338, (1977).
6. G.E. Hardy and T.D.Rogers M.D., A Generelization of a fixed point theorem of Reich. Canad. Math. Bull. 16, 201-206, (1973).
7. R. Kannan, some results on fixed points-II. A. M Monthly, 405 – 408 (1969).
8. Ioan A. Rus M.D., Some fixed point theorem in metric spaces. 169-172, (1971).
9. J. Achari, M.D., Some results on fixed point theorem of Zamfirescu. Mathematica. 2, 105-111, (1974).
10. Hakima, B., Sarajevo Jour.Math., 1,14, 261-270, (2005).