MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL

2019, Vol.17, No. 1 Artículo Divulgativo Publicado: 2019-06-30

Uniformización y automorfismos en la solución de una ecuación funcional en el bicírculo

Uniformization and automorphisms in the solution of a functional equation in the bicircle

Gortaire Játiva Danilo

Abstract In the present work we analyze the conditions and formulas for the general solution of particular cases of the linear functional equation $A(z,w)\xi(z,w) + A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) + A(0,0)\xi(0,0) = zw\eta(z,w), |z| \leq 1, |w| \leq 1$, with ξ as an unknown, equation that comes from the discrete two-dimensional equation of the Wiener and Hopf type in a quadrant of the plane and which is analyzed for the particular case in which the nucleus $A(z,w)$ has the form $A(z,w) \equiv z^2w - a^2(w+b^2)^2, ab \neq 0$.Detailed studies of functional equations of this type can be found in [D. Gortaire, et al. 1996],[E. Zvierovich, et al. 1987], [D. Gortaire, 1994].The main method of investigation to solve the functional equation with the previous nucleus is the uniformization of the relation$A(z,w) = 0$, the analytic extension, automorphic functions, the Cauchy-type integral, the boundary problems for the analytic functions [F. D. Gájov, 1980], and others.
The present research has a theoretical character, but the results and techniques of analysis can be applied mainly to problems of queuing theory, random walks, Wiener-Hopf equations in a quadrant [D. Gortaire, et al. 1996] and similar functional equations [D. Gortaire, 1994]
Keywords: Functional equation; Uniformization; Automorphism, Convergent series; Analytic prolongation; Cauchy's Integral.

Resumen En el presente trabajo se analizan las condiciones y las fórmulas para la solución general de casos particulares de la ecuación funcional lineal $A(z,w)\xi(z,w) + A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) + A(0,0)\xi(0,0) = zw\eta(z,w), |z| \leq 1, |w| \leq 1$, con ξ como incógnita, ecuación que proviene de la ecuación bidimensional discreta del tipo Wiener y Hopf en un cuadrante del plano, analizada para el caso particular en que el núcleo $A(z,w)$ tiene la forma $A(z,w) \equiv z^2w - a^2(w+b^2)^2, ab \neq 0$
Estudios detallados sobre ecuaciones funcionales de este tipo se pueden encontrar en [D. Gortaire, et al. 1996],[E. Zvierovich, et al. 1987], [D. Gortaire, 1994]. El método

Mat. Gortaire Játiva Danilo, PhD.
Docente titular de la Universidad Central del Ecuador, UCE, Carrera de Matemáticas,Quito - Ecuador, e-mail: agortaire@uce.edu.ec

principal de investigación para resolver la ecuación funcional con el núcleo anterior es el de la uniformización de la relación $A(z,w)=0$, la prolongación analítica, las funciones automorfas, la integral del tipo de Cauchy, los problemas de contorno para las funciones analíticas [F. D. Gájov, 1980] y otros.
La presente investigación tiene un carácter teórico, pero los resultados y técnicas de análisis pueden ser aplicados principalmente a problemas de la teoría de colas, caminatas aleatorias, ecuaciones de Wiener y Hopf en un cuadrante [D. Gortaire, et al. 1996], sistemas infinitos y ecuaciones funcionales semejantes [D. Gortaire, 1994]
Palabras Claves: Ecuación funcional; uniformización; automorfismos; serie convergente; prolongación analítica; integral del tipo de Cauchy.

1 Introducción

Analizamos el siguiente sistema infinito de ecuaciones lineales denominado ecuación del tipo Wiener y Hopf en un cuadrante:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{i-k,j-n}\xi_{k,n}=\eta_{i,j}, \qquad i,j=0,1,2,... \tag{1}$$

Todas las sucesiones $(a_{p,q})_{p,q=-\infty}^{\infty}\cdot(n_{i,j})_{i,j=0}^{+\infty}$pertenecen al espacio l^1, siendo $(\xi_{k,n})_{k,n=0}^{\infty}$ la sucesión incógnita (ver [K. Yosida, 1968], [W. Rudin, 1979]). Consideremos además que $a_{p,q}=0$ si por lo menos uno de los índices p o q toman valores inferiores a -1.

Siguiendo a [E. Zvierovich, et al. 1987], introducimos las siguientes funciones generatrices

$$\begin{aligned} \xi(z,w) &= \textstyle\sum_{k,n\geq 0}\xi_{k,n}z^k w^n,\\ \eta(z,w) &= \textstyle\sum_{i,j\geq 0}\eta_{i,j}z^i w^j,\\ a(z,w) &= \textstyle\sum_{p,q\geq -1} a_{p,q}z^p w^q=\dfrac{1}{zw}A(z,w),\\ & |z|\leq 1, |w|\leq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Denominaremos a la expresión $A(z,w)$ núcleo. Considerando las tres funciones generatrices anteriores (2) y el sistema (1), tendremos:

$$
\begin{aligned}
A(z,w)\xi(z,w) = zw \sum_{p,q\geq -1} a_{p,q} z^p w^q \sum_{k,n\geq 0} \xi_{k,n} z^k w^n &= \\
zw \sum_{k,n\geq 0} \xi_{k,n} z^k w^n \sum_{i-k,j-n\geq -1} a_{n-k,j-n} z^{i-k} w^{j-n} &= \\
zw \sum_{k,n\geq 0} \xi_{k,n} \sum_{i-k,j-n\geq -1} a_{i-k,j-n} z^i w^j &= \\
zw(\sum_{k,n\geq 0} \xi_{k,n} \sum_{i,j\geq 0} a_{i-k,j-n} z^i w^j + \sum_{n\geq 0} \xi_{0,n} \sum_{j-n\geq -1} a_{-1,j-n} z^{-1} w^j &+ \\
\sum_{k\geq 0} \xi_{k,0} \sum_{i-k\geq -1} a_{i-k,-1} z^i w^{-1} - \xi_{0,0} a_{-1,-1} z^{-1} w^{-1}) &= \\
zw(\sum_{i,j\geq 0} a_{i-k,j-n} \xi_{k,n} z^i w^j + \sum_{q\geq -1} a_{-1,q} z^{-1} w^q \sum_{n\geq 0} \xi_{0,n} w^n &+ \\
\sum_{p\geq -1} a_{p,-1} z^p w^{-1} \sum_{k\geq 0} \xi_{k,0} z^k - \xi_{0,0} a_{-1,-1} z^{-1} w^{-1}) & \\
zw(\sum_{i,j\geq 0} \eta_{i,j} z^i w^j + \frac{1}{zw} \sum_{q\geq -1} a_{-1,q} w^{q+1} \xi(0,w) &+ \\
\frac{1}{zw} \sum_{p\geq -1} a_{p,-1} z^{p+1} \xi(z,0) - \xi(0,0) \frac{A(z,w)}{zw}) &= \\
zw\eta(z,w) + A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) - A(0,0)\xi(0,0) &
\end{aligned}
$$

Así, concluimos que el sistema (1), junto con todas sus restricciones (ver [D. Gortaire, et al. 1996], [E. Zvierovich, et al. 1987], [D. Gortaire, 1994]) equivale a la siguiente ecuación funcional lineal en el bicírculo:

$$
A(z,w)\xi(z,w) - A(z,0)\xi(z,0) - A(0,w)\xi(0,w) + A(0,0)\xi(0,0) = zw\eta(z,w),
$$

$$
|z| \leq 1, |w| \leq 1 \tag{3}
$$

Todas las funciones $A(z,w), \xi(z,w), \eta(z,w)$ que intervienen en la ecuación funcional son analíticas en el bicírculo $K^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ y continuas en el bicírculo cerrado $\overline{K}^2$, y sus valores límite en el filo de la frontera del bicírculo pertenecen al anillo $\mathbf{W}$ de Wiener, compuesto de todas las funciones representables en forma de sumas de series de potencias absolutamente convergentes.

Es evidente que la solución de la ecuación funcional (3) está contenida en la fórmula:

$$
\xi(z,w) = \frac{A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) - A(0,0)\xi(0,0) + zw\eta(z,w)}{A(z,w)},
$$

$$(z,w)\in\overline{K}^2 \tag{4}$$

que conduce a la búsqueda de las funciones $\xi(z,0)$ y $\xi(0,w)$ con $\xi(z,0)_{z=0}=\xi(0,w)_{w=0}=\xi(0,0)$, todas pertenecientes a los respectivos anillos de Wiener y que al ser sustituidas en la parte derecha de (4) tengamos una división sin resto. Esto a su vez implica resolver la nueva ecuación funcional con la condición sobre el conjunto Ω, así:

$$A(z,0)\xi(z,0)+A(0,w)\xi(0,w)-A(0,0)\xi(0,0)=-zw\eta(z,w),$$

$$\Omega=(z,w)\in\mathbb{C}^2:A(z,w)=0,|z|\leq 1,|w|\leq 0 \tag{5}$$

2 Planteamiento del problema

Con la finalidad de investigar el comportamiento de la ecuación funcional (3) con núcleos $A(z,w)$ algebraicos, analizamos el caso particular con núcleo de la forma

$$A(z,w)\equiv z^2w-a^2(w+b^2)^2, \qquad ab\neq 0 \tag{6}$$

Para este caso la ecuación funcional toma la forma

$$\begin{aligned}(z^2w-\ a^2(w+b^2)^2)\xi(z,w)+a^2b^4\xi(z,0)+a^2(w+b^2)^2\xi(0,w)-a^2b^4\xi(0,0)=\\ zw\eta(z,w), \quad |z|\leq 1,|w|\leq 1\end{aligned} \tag{7}$$

en donde la función dada η y la función incógnita ξ, se consideran analíticas en el bicírculo

$$K^2=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:|z|<1,|w|<1\}$$

y continuas en el bicírculo cerrado

$$\overline{K}^2=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:|z|\leq 1,|w|\leq 1\}$$

Se exige además que todas las funciones pertenezcan al anillo Wiener **W**, compuesto de todas las funciones representables en series de potencias absolutamente convergentes [L. Hörmander, 1966], [W. Rudin, 1979] para $|z|\leq 1,|w|\leq 1$.

Acorde a lo dicho en la introducción, es evidente que la solución $\xi(z,w)$ de la ecuación funcional (7) está contenida en la fórmula:

$$\xi(z,w) = \frac{-a^2b^4\xi(z,0) - a^2(w+b^2)^2\xi(0,w) + a^2b^4\xi(0,0) + zw\eta(z,w)}{z^2w - a^2(w+b^2)^2} \qquad (8)$$

$$|z| \leq 1, |w| \leq 1 \ ,$$

cuyo numerador debe dividirse por el denominador sin resto, lo que equivale a buscar las funciones $\xi(z,0)$, $\xi(w,0)$ y el valor $\xi(0,0)$ pertenecientes al anillo **W** de Wiener que cumplan con la nueva ecuación funcional en el conjunto Ω:

$$a^2b^4\xi(z,0) + a^2(w+b^2)^2\xi(0,w) - a^2b^4\xi(0,0) = zw\eta(z,w), \quad (z,w) \in \Omega, \quad (9)$$

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (z,w) \in \mathbb{C}^2 : z^2w - a^2(w+b^2)^2 = 0, \\ |\ z\ | \leq 1, |\ w\ | \leq 1 \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

La correspondencia algebraica (núcleo) $A(z,w) \equiv z^2w - a^2(w+b^2)^2 = 0$ es irreducible y admite la uniformización global

$$\begin{cases} z = z(t) = ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right) \qquad t \in \hat{\mathbb{C}} \\ \qquad w = w(t) = t^2 \end{cases} \qquad (11)$$

Pasando al análisis de las preimágenes de los círculos $|\ z\ | \leq 1$ y $|\ w\ | \leq 1$, mediante (11), tenemos las curvas ∂D_1 y ∂D_2 y sus respectivos interiores D_1^0, D_2^0 dados por las relaciones:

$$\begin{cases} |z(t)| = \left|ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right)\right| \leq 1, \qquad t \in \hat{\mathbb{C}} \\ \qquad |w(t)| = |t^2| \leq 1, \end{cases} \qquad (12)$$

Introduciendo los conjuntos:

$$D_1 = \left\{t \in \mathbb{C} : \left|ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right)\right| \leq 1\right\} = \left\{t \in \mathbb{C} : |a(t^2+b^2)| \leq |t|\right\}, \qquad (13)$$

$$D_2 = \left\{t \in \mathbb{C} : |t^2| \leq 1\right\} = \left\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 1\right\} \qquad (14)$$

y las siguientes representaciones:

$$t = x + iy, \qquad b^2 = p + iq, \qquad t = \frac{b}{|b|}t_1, \qquad t_1 = x_1 + iy_i,$$

donde, la transformación $t = \frac{b}{|b|}t_1$ es una isometría entre los plano t y t_1, siendo esta una rotación de ángulo $\theta = arg(\frac{b}{|b|})$ del plano t, tendremos:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |a|^2(x^2+y^2)^2 + (2|a|^2p-1)x^2 - (2|a|^2p+1)y^2 + 4|a|^2qxy + |a|^2|b|^4 \leq 0\},$$

donde los puntos $t_{1,2} = \pm ib$, raíces de $t^2+b^2=0$, se hallan estrictamente en el interior de D_1, y $t=0 \notin D_1$. Análogamente tenemos

$$D_2 = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

Pasamos ahora a analizar las posiciones recíprocas entre los conjuntos D_1, D_2 y las curvas ∂D_1, ∂D_2:

$$\partial D_1 = \{t \in \mathbb{C} : |a|\left|t+\tfrac{b^2}{t}\right| = 1\} \qquad \text{y} \qquad \partial D_2 = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

Para simplificar los conjuntos, utilizamos la simetría $t = x+iy = \frac{b}{|b|}t_1 = \frac{b}{|b|}(x_1 + iy_1)$. Obtenemos:

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{c} (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2+y_1^2)^2 - \left(\frac{1}{|a|^2} - (2|b|^2\right)x_1^2 - \\ \left(\frac{1}{|a|^2} - 2|b|^2\right)y_1^2 + |b|^4 \leq 0 \end{array} \right\} \tag{15}$$

$$\partial D_1 = \left\{ \begin{array}{c} (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2+y_1^2)^2 - \left(\frac{1}{|a|^2} - 2|b|^2\right)x_1^2 - \\ \left(\frac{1}{|a|^2} - (2|b|^2\right)y_1^2 + |b|^4 = 0 \end{array} \right\} \tag{16}$$

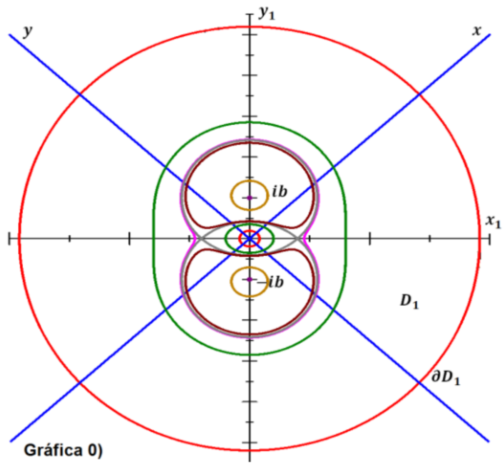
$$D_2 = \{(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2+y_1^2 \leq 1\}, \tag{17}$$

$$\partial D_2 = \{(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2+y_1^2 = 1\}. \tag{18}$$

Con respecto al conjunto D_1 observamos que para $|a_1| < |a_2|$ tenemos la implicación

$$\left\{|a_1|\left|t+\frac{b^2}{t}\right| \leq 1\right\} \Rightarrow \left\{|a_2|\left|t+\frac{b^2}{t}\right| \leq 1\right\}$$

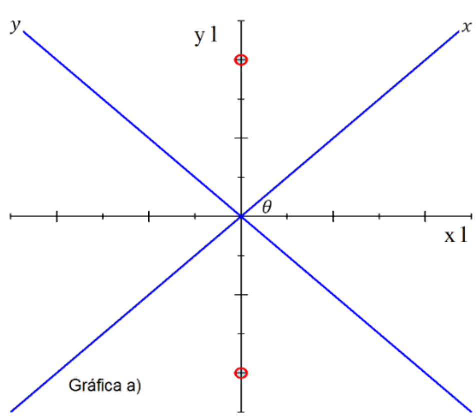
entonces, $D_{1,|a_2|} \subset D_{1,|a_1|}$, lo que significa que el conjunto D_1 crece por inclusión cuando disminuye el parámetro $|a|$. Ver Gráfica 0.

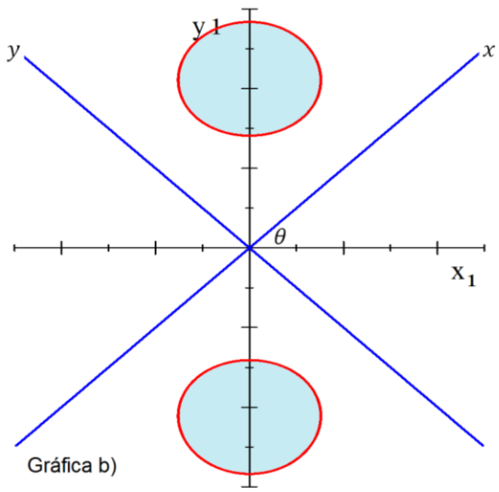


La sucesión o complemento de D_1 podemos mirar en las Gráficas a)- g).
Para $|a| \to \infty$ obtenemos $D_1 \to \{-ib, ib\}$, es decir, en el límite, D_1 está compuesto de dos puntos $-ib$ y ib.

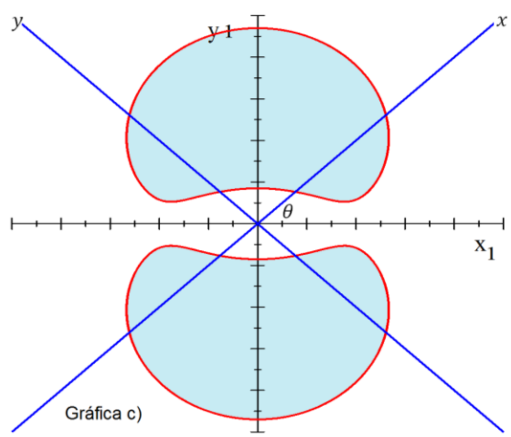
Para $|ab| > \frac{1}{2}$, el conjunto D_1 está compuesto de dos dominios cerrados y conexos, limitados por dos óvalos disjuntos. Para $|ab| = \frac{1}{2}$, los óvalos se convierten en dos semilunas con centros en los puntos $-ib$ y ib. Para $|ab| < \frac{1}{2}$, el conjunto D_1 se convierte en un dominio doblemente conexo, tipo anillo, el mismo que contiene a la circunferencia $\{t \in \mathbb{C} : |t| = |b|\}$, pero que no contiene a los puntos $t = 0, t = \infty$.

Finalmente, para $|a| \to 0$ se tiene $D_1 \to \mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

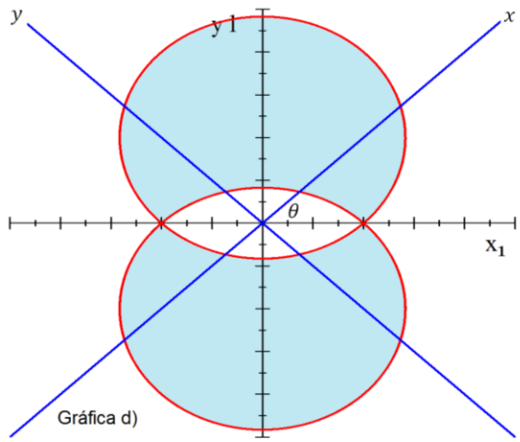


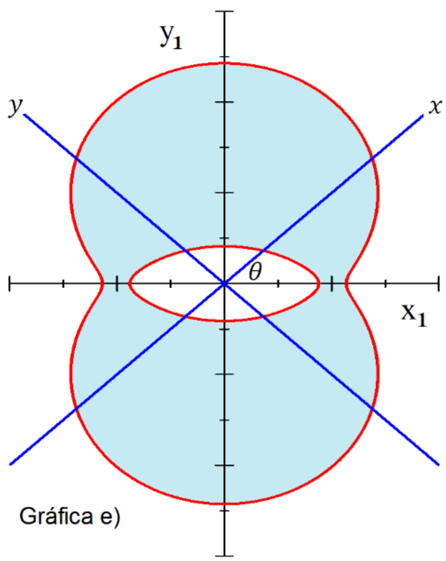


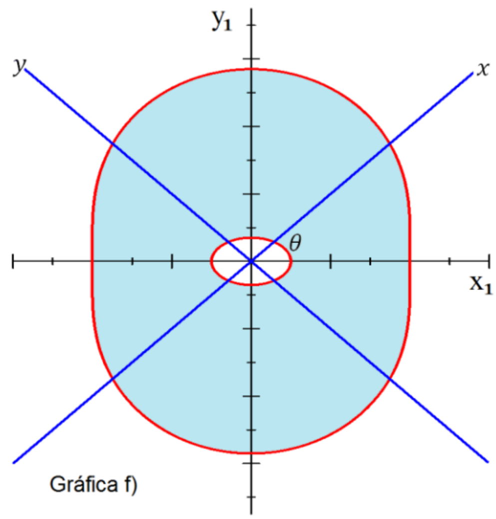
Gráfica b)

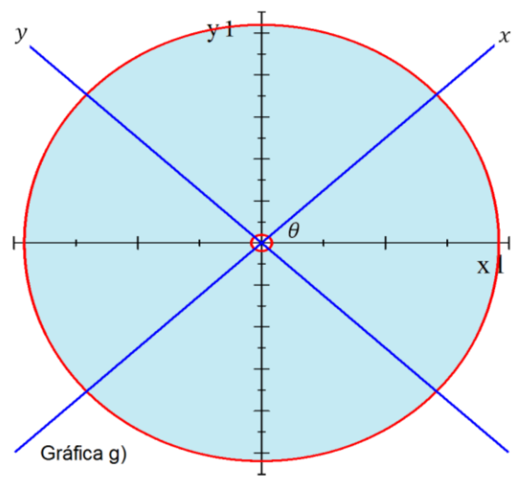


Gráfica c)

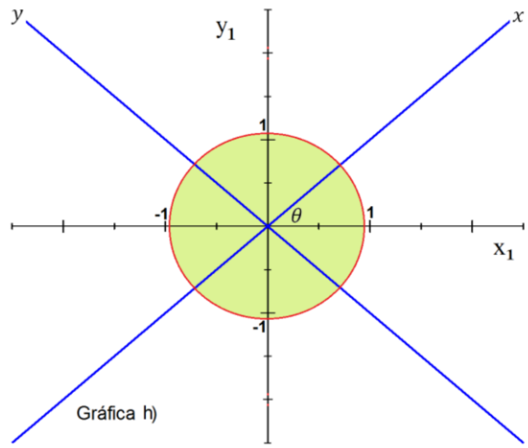

y
y 1
x
θ
x1
Gráfica d)


y1
y
x
θ
x1
Gráfica e)





Análogamente, en la Gráfica h) tenemos el conjunto D_2 (círculo) y la curva ∂D_2 (circunferencia), los mismos que son invariantes con la isometría $t = \frac{b}{|b|}t_1$ entre los planos t y t_1, siendo ésta una rotación de ángulo $arg\left(\frac{b}{|b|}\right)$ del plano t:



3 Solución del Problema

La solución de la ecuación funcional (9) - (10) dependerá del comportamiento recíproco que tengan los conjuntos D_1,D_2 y las curvas o contornos que los rodean ∂D_1 y ∂D_2. Pasamos primero a analizar este problema geométrico dado por las cuatro relaciones (15) - (18), que implican resolver el sistema de ecuaciones (16) y (18):

$$\left\{ \begin{array}{c} (x_1^2+y_1^2)^2 - \left(\frac{1}{|a|^2} - 2|b|^2\right)x_1^2 - \left(\frac{1}{|a|^2} - 2|b|^2\right)y_1^2 + |b|^4 = 0 \\ x_1^2+y_1^2 = 1 \end{array} \right\} \tag{19}$$

Resolviendo el sistema (19) tenemos:

$$x_1^2 = \frac{1-(|a||b|^2-|a|)^2}{4|ab|^2}, \qquad y_1^2 = \frac{(|a||b|^2+|a|)^2-1}{4|ab|^2} \tag{20}$$

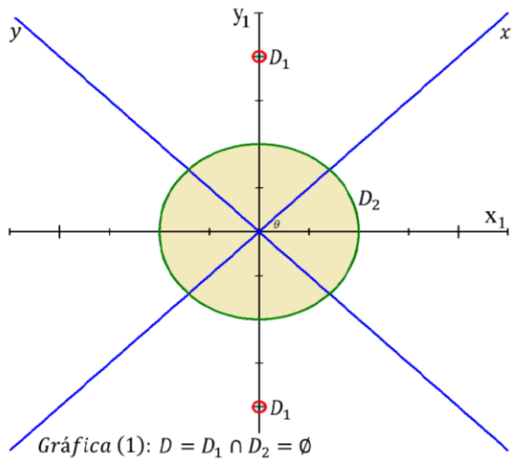
Es evidente que $\partial D_1 \bigcap \partial D_1 = \text{Ø}$ cuando el numerador de x_1^2 es negativo, es decir, cuando se cumple la desigualdad

$$|a|||b|^2-1| > 1 \tag{21}$$

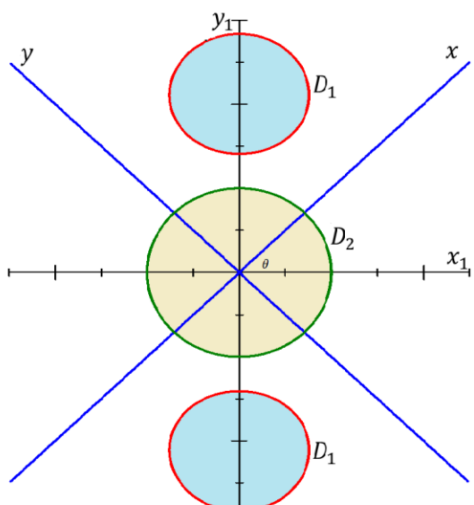
A continuación, tenemos la siguiente **clasificación para los conjuntos $\mathbf{D}, \mathbf{D_1}$** y $\mathbf{D_2}$:

a) $D = D_1 \cap D_2 = \text{Ø}$ equivale al cumplimiento de las dos desigualdades (Gráficas (1) y (2)):

$$\left\{ \begin{array}{c} |a|||b|^2-1| > 1 \\ |b| > 1 \end{array} \right. \tag{22}$$



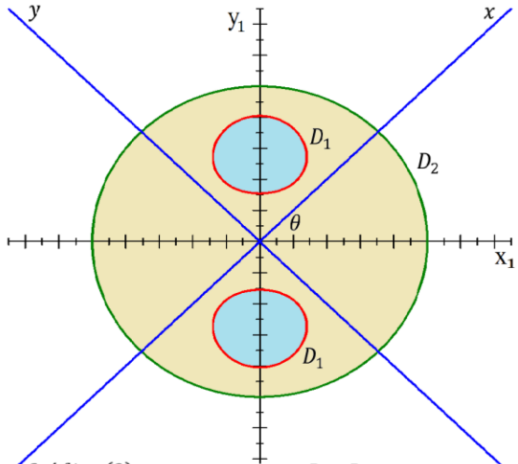
$Gráfica\ (1)$: $D = D_1 \cap D_2 = \emptyset$



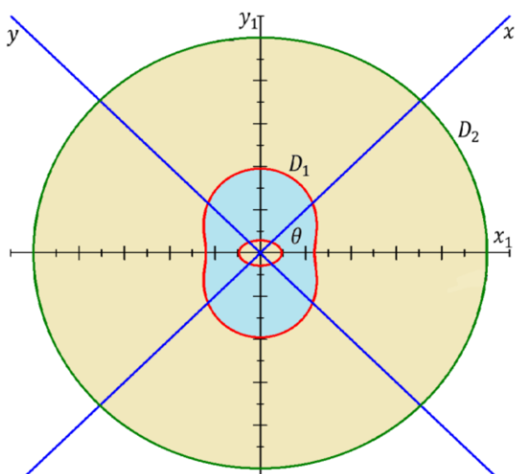
$Gráfica\ (2)$: $D = D_1 \cap D_2 = \emptyset$

b) $D = D_1 \cap D_2 = D_1$, es decir, se cumple la inclusión $D_1 \subset D_2$ que equivale al cumplimiento de las dos desigualdades (Gráficas (3)y (4)):

$$\begin{cases} |a||\,|b|^2 - 1| > 1 \\ |b| > 1 \end{cases} \tag{23}$$



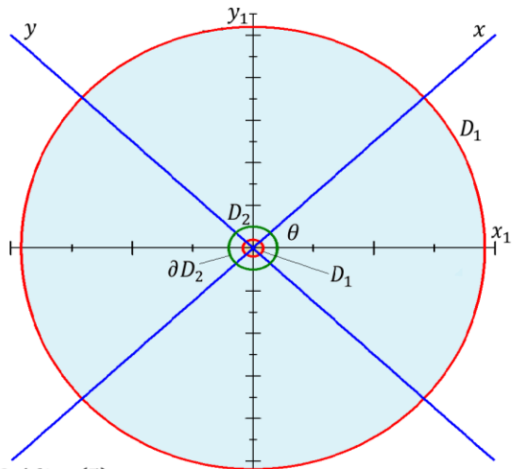
$Gráfica\ (3)$: $D = D_1 \cap D_2 = D_1,\ D_1 \subset D_2$



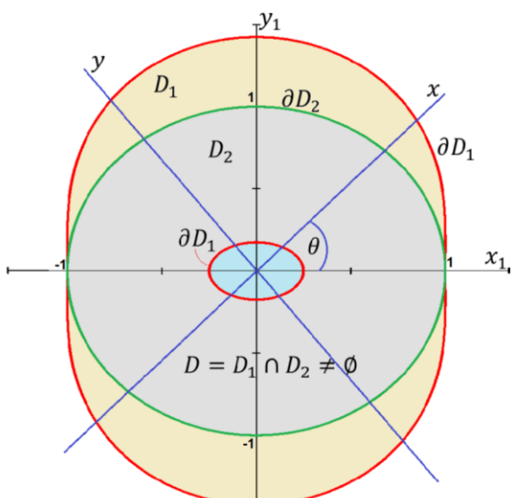
$Gráfica\ (4)$: $D = D_1 \cap D_2 = D_1,\ D_1 \subset D_2$

c) $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset, \partial D_2 \subset D_1$, equivale al cumplimiento de las dos desigualdades (Gráficas (5)y (6)):

$$\begin{cases} |a|||b|^2+1| < 1 \\ |ab| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{24}$$



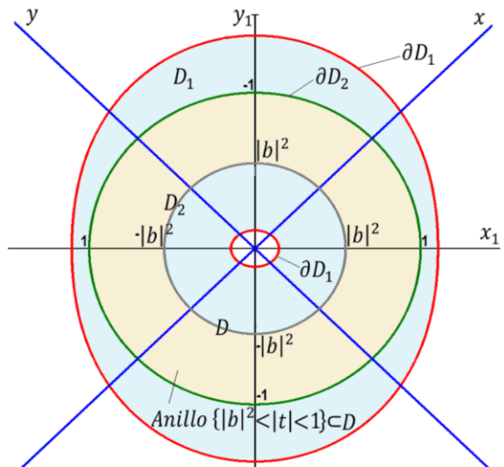
Gráfica (5): $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\ \partial D_2 \subset D_1$



Gráfica (6): $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\ \partial D_2 \subset D_1$

d) $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset, \partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$, que equivale al cumplimiento de la desigualdad (Gráfica (7)):

$$|a|||b|^2 - 1| < 1 \tag{25}$$



Gráfica (7): $D=D_1\cap D_2\neq\emptyset,\ \partial D_1\cap\partial D_2=\emptyset,\ \partial D_2\subset D_1$

Acorde a anteriores consideraciones y análisis geométrico (Gráficas (1) y (2)) llegamos al resultado:

TEOREMA 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1)
$$\begin{cases} |a|\cdot||b|^2-1|>1 \\ |b|>1 \end{cases}$$

2) El conjunto $D := D_1 \cap D_2 = \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \leq 1\} \cap \{t \in \mathbb{C} | w(t)| \leq 1\} = \emptyset$

3) La ecuación funcional (7) con el núcleo $A(z,w) = z^2w - a^2(w+b^2)^2, ab \neq 0$, es soluble incondicionalmente, y su solución general viene dada mediante la fórmula (8), donde las funciones $\xi(z,0), \xi(0,w) \in W$ son arbitrarias y cumplen con la condición $\xi(z,0)|_{z=0} = \xi(0,w)|_{w=0}$.

Ahora, pasando en la ecuación (7) - (8) a la variable uniformizadora t, y tomando en cuenta (11),

$$\begin{cases} z = z(t) = ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right) \\ w = w(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in \hat{\mathbb{C}},$$

tendremos las representaciones

$$\varphi(t) := a^2b^4\xi[z(t),0], \qquad t \in D_1 \tag{26}$$
$$\psi(t) := a^2(t^2+b^2)^2\xi[0,w(t)], \qquad t \in D_2 \tag{27}$$
$$\mu := a^2b^4\xi(0,0), \tag{28}$$
$$\hat{\eta}(t) := z(t)w(t)\eta[z(t),w(t)],$$
$$t \in D = D_1 \cap D_2 \tag{29}$$

De esta manera, considerando (26) - (28), la ecuación funcional (7)-(8) tomará la forma

$$\varphi(t) + \psi(t) = \mu + \hat{\eta}(t), \qquad t \in D, \tag{30}$$

con

$$D = \left\{ t \in \mathbb{C} : \left| ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right) \right| \leq 1, |t^2| \leq 1 \right\} \tag{31}$$

La función desconocida φ debe ser analítica con respecto a t y también con respecto a $z = ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right)$. Es evidente que como la función $z = z(t)$ es automorfa con respecto al grupo de transformaciones lineales fraccionarias $\Lambda_1 = \{t, \alpha(t)\}$ con $\alpha(t) \equiv \frac{b^2}{t}$, φ también deberá ser automorfa con respecto al grupo Λ_1. Análogamente, la función desconocida ψ debe ser analítica con respecto a t y también con respecto a $w = t^2$. Como la función $w = w(t)$ es automorfa con respecto al grupo de transformaciones lineales $\Lambda_2 = \{t, \beta(t)\}$ con $\beta(t) \equiv -t$, ψ también deberá ser automorfa con respecto al grupo Λ_2.
Observemos que en este caso se cumplen las relaciones $\alpha(\alpha(t)) = t, \beta(\beta(t)) = t$ y $\alpha(\beta(t)) = \beta(\alpha(t)) = -\frac{b^2}{t}$, es decir, se cumple la conmutatividad de las traslaciones, y entonces, el grupo compuesto $[\Lambda_1, \Lambda_2] = \Lambda_0$ es un grupo finito de cuarto orden [B.L. Van der Waerden, 1979], siendo

$$\Lambda_0 = \{t, \alpha(t), \beta(t), \alpha(\beta(t))\} = \left\{ t, \frac{b^2}{t}, -t, -\frac{b^2}{t} \right\}$$

La función automorfa fundamental con respecto al grupo Λ_0 es $g(t) = \frac{t^2}{b^2} + \frac{b^2}{t^2}$.

Siguiendo adelante, analicemos la ecuación funcional (30)-(31) en el conjunto $\hat{D} \subseteq D$, donde $\hat{D}$ es el dominio donde actúa el grupo Λ_0. Es evidente que el grupo Λ_0 actúa en los casos: **1)** cuando $\hat{D} = D_1 \subset D_2$ (inclusión, el otro caso $D_2 \subset D_1$ no existe); **2)** cuando existe el anillo $\hat{D} := \{t \in \mathbb{C} : |b^2| \leq |t| \leq 1\} \subset D$. La inclusión $D_1 \subset D_2$ (ver Gráficas(3) y (4)) tiene lugar cuando se cumplen las desigualdades (23)

$$\begin{cases} |a|||b|^2 - 1| > 1 \\ |b| > 1 \end{cases}$$

El anillo $|b^2| \leq |t| \leq 1$ está contenido en el conjunto $D = D_1 \cap D_2$ cuando se cumplen las desigualdades

$$\begin{cases} |a|||b|^2 \pm 1| < 1 \\ |ab| < 1 \end{cases} \tag{32}$$

Supongamos que se cumplen las condiciones (23) o las condiciones (32), entonces la ecuación funcional (30)(31) toma la forma

$$\varphi(t) + \psi(t) = \mu + \hat{\eta}(t), \qquad t \in \hat{D} \subseteq D. \tag{33}$$

Partiendo del automorfismo de las funciones desconocidas y reemplazando en (30) o (33) t por $\frac{b^2}{t}$, luego por $-t$ y luego por $-\frac{b^2}{t}$, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi(t) + \psi(t) = \mu + \hat{\eta}(t), \\ \varphi(t) + \psi\left(\frac{b^2}{t}\right) = \mu + \hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right), \quad t \in \hat{D} \\ \varphi(-t) + \psi(t) = \mu + \hat{\eta}(-t), \\ \varphi(-t) + \psi\left(\frac{b^2}{t}\right) = \mu + \hat{\eta}\left(-\frac{b^2}{t}\right), \end{array} \right\} \tag{34}$$

Del sistema (34) anterior, se sigue que la condición necesaria de solubilidad de la ecuación (33) es la identidad

$$\hat{\eta}(t) - \hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right) - \hat{\eta}(-t) + \hat{\eta}\left(-\frac{b^2}{t}\right) \equiv 0 \tag{35}$$

Con la finalidad de simplificar el análisis de la ecuación funcional (33), utilizando las propiedades grupales de las funciones φ y ψ (ver [D. Gortaire, et al. 1996]), observamos que si se tiene cierta función f, definida sobre el conjunto $\hat{D}$, donde actúa el grupo Λ_0, entonces se cumple la descomposición única

$$f(t) = \frac{1}{2}[f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)], \qquad t \in \hat{D} \tag{36}$$

donde f_0, f_1, f_2 y f_3 no se alteran bajo cualquier cambio o permutación de los grupos $\Lambda_0 = \left\{t, -t, \frac{b^2}{t}, -\frac{b^2}{t}\right\}, \Lambda_1 = \left\{t, \frac{b^2}{t}\right\}, \Lambda_2 = \{t, -t\}, \Lambda_3 = \left\{t, \frac{b^2}{t}\right\}$, respectivamente, y con las otras permutaciones del grupo Λ_0, las funciones cambian de signo. Utilizando la descomposición (36) para las funciones φ, ψ y $\hat{\eta}$ y tomando en cuenta las identidades $\varphi(t) \equiv \varphi\left(\frac{b^2}{t}\right), \psi(t) \equiv \psi(-t)$, obtendremos:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)], t \in \hat{D} \tag{37}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(t) = \varphi(t) + \varphi(-t), \\ \varphi_1(t) = \varphi(t) - \varphi(-t), \\ \varphi_2(t) = \quad \varphi_3(t) = 0 \end{array} \right\} \tag{38}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}[\psi_0(t) + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t)], \qquad t \in \hat{D} \tag{39}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi_0(t) &=& \psi(t) + \psi\left(\frac{b^2}{t}\right), \\ \psi_2(t) &=& \psi(t) - \psi\left(\frac{b^2}{t}\right), \\ \psi_1(t) &=& \quad \psi_3(t) = 0 \end{array} \right\} \tag{40}$$

Utilizando la descomposición (36) y las 4 igualdades (37)-(40), podemos escribir la ecuación funcional (33) como un sistema equivalente de 4 ecuaciones independientes con respecto a las funciones desconocidas $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0$ **y** ψ_2:

$$\varphi_0(t) + \psi_0(t) = \mu + \hat{\eta}_0(t), \tag{41}$$
$$\varphi_1(t) \quad = \hat{\eta}_1(t), \tag{42}$$
$$\psi_2(t) \quad = \hat{\eta}_2(t), \tag{43}$$
$$0 \quad = \hat{\eta}_3(t), \tag{44}$$
$$t \in \hat{D}$$

La última igualdad (44) no contiene funciones desconocidas y por tanto, su cumplimiento es la condición necesaria para la solubilidad de la ecuación funcional (33). Esta condición (44) es equivalente a la condición (35).

4 Solución de la ecuación funcional (33) en $\hat{\mathbf{D}} \subset \mathbf{D}$

Pasando a la solución de la ecuación (33) (o del sistema equivalente (41)-(44)) en el caso cuando $\hat{D} := \{t \in \mathbb{C} : |b^2| \leq |t| \leq 1\} \subset D$, (ver Gráfica (7)) tendremos la ecuación

$$\varphi(t) + \psi(t) = \mu + \hat{\eta}(t), \qquad |b^2| \leq |t| \leq 1, \tag{45}$$

Como en el anillo $\hat{D}$ actúa el grupo $\Lambda_1 = \left\{t, \frac{b^2}{t}\right\}$, entonces sustituyendo en la ecuación (45) t por $\frac{b^2}{t}$, obtenemos:

$$\varphi(t) + \psi\left(\frac{b^2}{t}\right) = \mu + \hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right), \qquad t \in \hat{D} \subset D \tag{46}$$

Restando la (46) de la (45) obtendremos el siguiente *Problema de Carleman* [F. D. Gájov, 1980],[L. Lavréntiev, et al. 1991]

$$\varphi(t) - \psi\left(\frac{b^2}{t}\right) = \hat{\eta}(t) - \hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right), \qquad t \in \hat{D} \tag{47}$$

cuya solución la obtendremos desarrollando la función $\hat{\eta}(t)$ en serie de Laurent (ver [A. Markushevich, 1978],[D. Gortaire, 1994], [L. Hörmander, 1966]) en el anillo $\hat{D}$:

$$\hat{\eta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k t^k, \qquad |b^2| \leq |t| \leq 1, \tag{48}$$

Es evidente que esta serie converge absolutamente en el anillo $\hat{D}$. Ahora, si en la igualdad (48) reemplazamos t por $\frac{b^2}{t}$ obtendremos la serie

$$\hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_{-k} b^{-2k} t^k, \tag{49}$$

la misma que también converge absolutamente en el anillo $\hat{D}$. Poniendo los desarrollos en serie (48) y (49) en la parte derecha de la igualdad (47), y considerando la relación (35) (es decir, la paridad de la función $\hat{\eta}(t) - \hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right)$), obtendremos

$$\psi(t) - \psi\left(\frac{b^2}{t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\eta_{2k} - \eta_{-2k} b^{-2k}) t^{2k}, \tag{50}$$

De aquí se desprende que la función $\psi(t)$, con exactitud de una constante, es igual a la parte regular del desarrollo (50), y en cambio $\psi\left(\frac{b^2}{t}\right)$ es igual a la parte principal en este desarrollo. Con esto concluimos que el problema (50) es soluble incondicionalmente y que su solución general viene dada mediante

$$\psi(t) = c + \sum_{k\geq 1} (\eta_{2k} - \eta_{-2k} b^{-2k}) t^{2k}, \tag{51}$$

donde c es una constante arbitraria. La función $\varphi(t)$ la encontramos a partir de las relaciones (45) y (51)

$$\varphi(t) = \mu + \hat{\eta}(t) - \psi(t) = \mu + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k t^k - c - \sum_{k\geq 1} \eta_{2k} t^{2k} + \sum_{k\geq 1} \eta_{-2k} b^{-2k} t^{2k} \tag{52}$$

Con la finalidad de simplificar la parte derecha de la igualdad (52), reescribimos la condición (35) en términos de los coeficientes del desarrollo (48):

$$0 \equiv \hat{\eta}(t) - \hat{\eta}\left(\frac{b^2}{t}\right) - \hat{\eta}(-t) + \hat{\eta}\left(-\frac{b^2}{t}\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k t^k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k \frac{b^{2k}}{t^k} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k (-t)^k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k (-1)^k \frac{b^{2k}}{t^k} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\eta_k - b^{-2k}\eta_{-k} - (-1)^k \eta_k + (-1)^k b^{-2k} \eta_{-k}) t^k = \tag{53}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\eta_{2k-1} - b^{-2k+1}\eta_{-2k+1}) t^{2k-1} \tag{54}$$

Concluimos que las condiciones buscadas, equivalentes a las condiciones (35) y (44) son:

$$\eta_{2k-1} - b^{-2k+1}\eta_{-2k+1} = 0, k \in \mathbb{Z} \tag{55}$$

Ahora, considerando la nueva condición (55), transformamos la igualdad (52):

$$\varphi(t) =$$

$$\mu + \eta_0 - c + \sum_{k\geq 1} \eta_{2k} t^{2k} + \sum_{k\geq 1} \eta_{2k-1} t^{2k-1} +$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \eta_{2k} t^{2k} + \sum_{k\geq 1} \eta_{-2k+1} t^{-2k+1} - \sum_{k\geq 1} \eta_{2k} t^{2k} + \sum_{k\geq 1} \eta_{-2k} b^{-2k} t^{2k} =$$

$$\mu + \eta_0 - c + \sum_{k\geq 1} \eta_{-2k} t^{-2k} + \sum_{k\geq 1} \eta_{-2k} b^{-2k} t^{2k} +$$

$$\sum_{k\geq 1} \eta_{-2k+1} b^{-2k+1} t^{2k-1} + \sum_{k\geq 1} \eta_{2k-1} t^{2k-1}$$

Finalmente obtenemos

$$\varphi(t) = \mu - c + \eta_0 + \sum_{k\geq 1} \eta_{-k} b^{-k} \left(\frac{t^k}{b^k} + \frac{b^k}{t^k}\right) \tag{56}$$

Desarrollando nuevamente la expresión derecha de (56) en potencias de $ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right) = z(t)$ (lo que es posible gracias al Teorema de los Polinomios Simétricos (ver [B.L. Van der Waerden, 1979]), tenemos:

$$\varphi(t) = \mu - c + \eta_0 + \sum_{k\geq 1} \varphi_k \left[ab\left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t}\right)\right]^k \tag{57}$$

De esta manera, concluimos que el problema o ecuación (45) es soluble en el anillo de Wiener **W**, si y solamente si, se cumple la desigualdad

$$\sum_{k\geq 1} |\varphi_k| < +\infty \tag{58}$$

La solución general contiene una constante arbitraria c y viene dada mediante las igualdades (51) y (57). Nótese que los coeficientes o valores φ_k, ellos mismos se expresan en forma de series y por eso su existencia no es evidente. Sin embargo, estos coeficientes pueden ser expresados en forma de integrales (ver [A. Markushevich, 1978],[L. Lavréntiev, et al. 1991], [J. Back, et al. 1991])

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1} \frac{\varphi(t)dt}{t^{k+1}}, \qquad k = 0,1,2,... \tag{59}$$

y cuya existencia se desprende de la analiticidad de la función φ sobre el círculo $|t| = 1$.

Regresando al análisis de la ecuación funcional (9)-(10), la función $\psi(t)$ debe satisfacer la condición $\psi(0) = a^2b^4\xi(0,0)$ y, por lo tanto, tendremos que poner $c = a^2b^4\xi(0,0)$. Ahora, utilizando el desarrollo de la función $\varphi(t)$, hallamos el valor $a^2b^4\xi(0,0) = \mu$:

$$\begin{aligned} &\mu = \varphi(\pm ib) = \\ a^2b^4\xi(0,0) - a^2b^4\xi(0,0) + \eta_0 + &\sum_{k\geq 1}\eta_{-k}b^{-k}\left[(\pm i)^k + (\mp i)^k\right] = \\ &\eta_0 - 2\sum_{k\geq 1}\eta_{4k-2}b^{4k-2} + 2\sum_{k\geq 1}\eta_{4k}b^{4k}, \end{aligned}$$

es decir,

$$a^2b^4\xi(0,0) = \eta_0 - 2\sum_{k\geq 1}\eta_{-4k+2}b^{-4k+2} + 2\sum_{k\geq 1}\eta_{-4k}b^{-4k} = c, \tag{60}$$

Finalmente, utilizando la relación (60), hallamos la función incógnita de la ecuación funcional inicial $\xi(0,w)$:

$$\begin{aligned} \xi(0,w) = \frac{1}{a^2(w+b^2)^2} \\ \left[\sum_{k\geq 1}(\eta_{2k} - \eta_{-2k}b^{-2k})w^k + \eta_0 + 2\sum_{k\geq 1}\eta_{-4k}b^{-4k} - 2\sum_{k\geq 1}\eta_{-4k+2}b^{-4k+2}\right] \end{aligned} \tag{61}$$

Para que el numerador de (61) se divida sin resto para el denominador, es necesario y suficiente que este se anule en $w = -b^2$ con orden no inferior al segundo, es decir, para $t = \pm ib \in \hat{D} \subset D$. Estas condiciones son posibles expresarlas a partir de (61), y considerando que $\psi(ib) = \psi(-ib) = 0$:

$$\sum_{k\geq 1}(\eta_{2k} - \eta_{-2k}b^{-2k})(-b)^{2k} + \eta_0 + 2\sum_{k\geq 1}\eta_{-4k}b^{-4k} - 2\sum_{k\geq 1}\eta_{-4k+2}b^{-4k+2} = 0,$$

y

$$\sum_{k\geq 1}(\eta_{2k}-\eta_{-2k}b^{-2k})(-b)^{2k-2}=0, \tag{62}$$

Por otro lado, de la fórmula (57) obtenemos la otra función incógnita

$$a^2b^4\xi(0,0)=\eta_0+\sum_{k\geq 1}\varphi_k z^k \tag{63}$$

Pasamos a formular los resultados finales:

TEOREMA 2. Para la solución de la ecuación funcional (9)-(10) es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones (62), (35) (o de la (44)). La solución única viene dada mediante las fórmulas:

$$a^2b^4\xi(0,0)=\eta_0+\sum_{k\geq 1}\varphi_k z^k,$$

$$\xi(0,w)=\frac{1}{a^2(w+b^2)^2}\left[\sum_{k\geq 1}(\eta_{2k}-\eta_{-2k}b^{-2k})w^k+a^2b^4\xi(0,0)\right],$$

$$a^2b^4\xi(0,0)=\eta_0-2\sum_{k\geq 1}\left(\eta_{-4k+2}b^{-4k+2}-\eta_{-4k}b^{-4k}\right)$$

La anterior solución pertenecerá al anillo de Wiener, **W**, si $\sum_{k\geq 1}|\varphi_k|<+\infty$.

Regresando a la ecuación funcional (3) con el núcleo (6), hallamos las condiciones bajo las cuales, la solución general, se obtiene mediante la fórmula (8). Suponiendo que la ecuación (9)-(10) es soluble y colocando su solución general Teorema 2 en el numerador de la parte derecha de (8), concluimos que la parte derecha de (8) es analítica en el bicírculo $|z|<1, |w|<1$, es decir, permite su desarrollo en serie de potencias

$$\xi(z,w)=\sum_{k,l\geq 0}\xi_{kl}z^k w^l, \tag{64}$$

Los coeficientes ξ_{kl} se pueden obtener mediante la división directa del numerador para el denominador en la fórmula (8). Formulamos los resultados obtenidos:

TEOREMA 3. Para la solución de la ecuación funcional 3 con el núcleo (6), es necesario y suficiente que se cumplan todas las condiciones del Teorema 2y la desigualdad $\sum_{k,l\geq 0}|\xi_{kl}|<\infty$ donde ξ_{kl} son los coeficientes en el desarrollo (64), obtenidos al dividir el numerador para el denominador en la expresión (8). Con el cumplimiento de estas condiciones, la solución general viene dada mediante la fórmula (8).

5 Bibliografía

Referencias

A. Markushevich. (1978). *Teoría de las funciones analíticas*, Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú.

B.L. Van der Waerden. (1979). *Algebra*. Ed. Nauka, Moscú, (en ruso).

D. Gortaire. (1994). *Investigación de ciertas ecuaciones funcionales lineales para funciones analíticas en el bicírculo utilizando el método de uniformización*, Tesis previa a la obtención del título de candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas. Minsk, Belarus (en ruso).

D. Gortaire. E. Zvierovich. (1996). *Sobre ciertos tipos de ecuaciones funcionales lineales para funciones analíticas en el bicírculo*, V Encuentro de Matemática y sus Aplicaciones. Memorias, E.P.N Quito, julio.

E. Zvierovich. E. Krushevski. (1987). *Solución explicita de un caso particular de la ecuación bidimensional de Wiener y Hopf en un cuadrante*, Simposium sobre los problemas contemporáneos de la física matemática. Univ. de Tbilisi, Georgia, (en ruso).

F. D. Gájov. (1980). *Problemas de contorno*. Editorial Mir, Moscú.

J. Back. D. Newman. (1991) *Complex Analysis*. Springer – Verlag New York Inc., New York.

K. Yosida. (1968). *Functional Analysis*. Springer – Verlag New York Inc., New York .

L. Hörmander. (1966). *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*.D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey.

L. Lavréntiev. B. Shabat.(1991). *Métodos de teoría de las funciones de una variable compleja*. Editorial Mir, Moscú.

R. E. Edwards. (1979). *Fourier Series. A Modern Introduction*. Vol. I, II. Springer – Verlag New York Inc., New York .

W. Rudin. (1979). *Análisis Real y Complejo*. Ed. Alhambra, Madrid .