matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2011, Vol. 9, No. 2

UNA VARIANTE DEL PROBLEMA DE LA DIVERSIDAD MÁXIMA PARA SELECCIONAR EQUIPOS DE TRABAJO EFICIENTES

Sandoya Fernando[1], Aceves Ricardo[2]

Resumen. *El problema de la diversidad máxima consiste en seleccionar un subconjunto de elementos desde un conjunto dado, de tal manera que una medida de diversidad sea maximizada. En particular nos enfocamos en el modelo denominado Max-Mean, en el cuál se maximiza la distancia promedio entre los elementos del subconjunto seleccionado. Primero se realiza una revisión de la literatura sobre métodos y formulaciones de programación matemática previos que han sido desarrollados para otros problemas de dispersión y proponemos nuevas propiedades analíticas del problema. Nuestro modelo es especialmente útil para casos en los cuáles las "distancias" representan afinidades y por tanto no se restringe a que sólo tomen valores no negativos. En este artículo se resuelve un caso real, para obtener un conjunto diverso de profesores de una Universidad. Para cada profesor se registran 7 atributos (posición laboral, género, grado académico, nivel, nivel salarial, unidad donde trabaja), y la medida de similaridad entre cada pareja de individuos es calculada.*

Palabras Claves: Problema de la diversidad máxima, Programación no lineal binaria.

Abstract. *The maximum diversity problem consists in selecting a subset of elements from a given set in such a way that a measure of diversity is maximized. In particular, we target the Max-Mean model in which the average distance between the selected elements is maximized. We first review previous methods and mathematical formulations for this and related dispersion problems and then propose analytic properties for them. Our model is especially suited for instances in which the "distances" represent affinity and are not restricted to take non-negative values. In this paper, we solving a real instance, to obtain a diverse assembly of professors from the ESPOL University at Guayaquil (Ecuador). For each professor, we record 7 attributes (tenure position, gender, academic degree, research level, background, salary level, and department), and the similarity measure between each pair of them is computed.*

Key Words: Maximum Diversity Problem, Binary nonlinear programming.

Recibido: Julio, 2011
Aceptado: Agosto, 2011

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de seleccionar objetos, actividades, personas, recursos, etc. es una de las actividades que frecuentemente realizamos, basados en algún criterio económico, de espacio, afectivo, políticos etc. En la mayoría de esos casos se trata de elegir el mejor subconjunto de elementos de un conjunto grande de posibilidades, el mejor en algún sentido, y generalmente es de interés que los elementos seleccionados no se parezcan entre sí, sino más bien que representen la diversidad existente en el conjunto original.

En muchos casos se toman estas decisiones intuitivamente y no resolviendo el respectivo problema de decisión sobre todos los criterios que están en juego. Pero procedimientos simples basados en la intuición, que aparentemente ofrecen soluciones eficientes, llevan a tomar malas decisiones. En la literatura de optimización combinatoria, elegir el grupo de elementos con la mayor diversidad configura el denominado *Problema de la Diversidad Máxima*; es decir, el problema que consiste en seleccionar un subconjunto de elementos, de cardinalidad conocida o no, a partir de un conjunto dado , de tal manera que una medida de la diversidad presente en el subconjunto que es seleccionado sea maximizada.

Una aplicación interesante consiste en estudiar la conformación de equipos de trabajo, en donde la diversidad podría jugar un papel crucial. Estudios recientes han determinado que la diversidad en un grupo de personas aumenta la capacidad de estos grupos para resolver problemas [1], y por lo tanto, lleva a obtener equipos de trabajo más eficientes. Estos autores proporcionan una justificación teórica para este fenómeno. Otro investigador pionero de este último hecho, Page [9], establece que: "Perspectivas y herramientas diversas permiten a los grupos de personas hallar más y mejores soluciones y contribuir a la productividad total". Como resultado, el problema de identificar grupos diversos de personas se convierte en un punto clave en las empresas e instituciones.

2. EL PROBLEMA DE LA DIVERSIDAD MÁXIMA Y EL PROBLEMA MAX-MEAN

Si $V=\{1,2,...,n\}$ es un conjunto de personas, objetos, etc., y M es el subconjunto a seleccionar, $M \subset V$, de cardinalidad conocida o no, buscaremos optimizar el objetivo representado en la ecuación (2.1).

$$Max\, f_1(M) = div(M) \qquad (2.1)$$

[1] *Sandoya Fernando, M.Sc., Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).*
(e_mail: fsandoya@espol.edu.ec).
[2] *Aceves Ricardo, Facultad de Ingeniería, Departamento de Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Méxco D.F. (e_mail: aceves@servidor.unam.mx).*

Donde $div(M)$ representa la medición que se ha realizado sobre la diversidad en M.

En la literatura se describen muchos modelos para lograr este fin, y se exploran muchas aplicaciones prácticas, [5]; aquí se aborda un nuevo modelo, denominado *Modelo de Dispersión del Máximo Promedio* (Max-Mean), en el cual se selecciona el subconjunto que maximiza la distancia promedio entre sus elementos, así, el número de elementos que se seleccionan también es una variable de decisión.

Pero ¿por qué este problema es complicado?, imaginemos que se tienen $n = 100$ personas, de las cuales vamos a seleccionar $m = 10$ de ellas, en total existen $\binom{100}{10} \approx 1.73 \times 10^{13}$ maneras de seleccionar tal subconjunto, y si intentáramos resolver el asunto explorando todas las soluciones posibles y de ahí escoger la mejor, necesitaríamos además evaluar la diversidad de cada subconjunto, pero el cálculo con la más sencilla de las medidas de diversidad es del orden $O\left(m^2\right)$, por lo que se necesitarían alrededor de 1.73×10^{15} operaciones elementales.

Pero si las soluciones factibles de este problema son muchas, que pasa si agregamos una complicación más al problema. Supongamos ahora que no establecemos a priori el número de personas a seleccionarse, sino que debemos establecer cuántas y cuáles personas necesitamos seleccionar para que esa selección sea la mejor posible. Habría tantas soluciones factibles como subconjuntos de cardinalidad $m \geq 2$; es decir, $\sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} = \left(2^{100} - 101\right) \approx 1.267 \times 10^{30}$ con lo que el problema se vuelve inmanejable.

2.1 DISTANCIAS, SIMILARIDAD Y DIVERSIDAD

Para medir la diversidad $div\left(M\right)$ de la ecuación (2.1), se requiere primero tener bien definida una relación d_{ij} que describa la relación, distancia, o similaridad entre cada pareja de objetos i,j del conjunto original. La estimación de esta distancia depende del problema concreto que se está analizando. En particular, en sistemas complejos como los grupos de personas, una operación fundamental es la valoración de la similaridad entre cada pareja de individuos. Muchas medidas de similaridad que se han propuesto en la literatura, como en [13], en las que se valora la similaridad como una distancia en algún espacio con características adecuadas, generalmente un espacio métrico, en muchos casos se asocia la distancia euclidiana.

Como ejemplo se menciona la medida de similaridad en grupos de solucionadores de problemas de [8], en la que dados dos individuos i,j cuyas características están representadas en: $x_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}\right), \quad x_j = \left(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jp}\right)$ se define la medida de no similaridad como:

$$d_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{k} \delta\left(x_{il}, x_{jl}\right)}{k}$$

Donde:

$$\delta\left(x_{il}, x_{jl}\right) = \begin{cases} -1 & si\ x_{il} = x_{jl} \\ \left|x_{il} - x_{jl}\right| & si\ x_{il} \neq x_{jl} \end{cases}$$

Esta medida toma valores negativos (en el caso de similaridad) y positivos (en el caso de no similaridad). La idea en esta última medida es que características iguales de dos individuos son contrarias a la diversidad y por tanto se castigan con -1, mientras que características diferentes de los individuos aportan a la medida de la no similaridad con una cantidad positiva, dependiendo su valor de cuanto valoramos esta característica dentro del conjunto de atributos considerados. Para ilustrar consideremos personas con las siguientes características: condición laboral, sexo, máximo nivel académico, si el profesor obtuvo su título profesional en la misma Universidad, el tipo de relación laboral del profesor con la Universidad, Unidad a la que pertenece y nivel salarial, todas estas características codificadas adecuadamente. Y supongamos que tenemos dos profesores, denominados 1 y 2, con las características observadas en la Tabla I:

TABLA I

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Características observadas en dos profesores de una Universidad

PROFESOR (i)	CONDICION LABORAL	SEXO	MAXIMO NIVEL ACADEMICO	ESTUDIO EN LA MISMA	TIPO DE PROFESOR	UNIDAD A LA QUE PERTENECE	NIVEL SALARIAL
1	1	-1	0.5	-1	-1	0.5	0.3
2	1	-1	1	-1	1	0.5	-0.6

Entonces, el coeficiente de no similaridad sería:

$$d_{12} = \frac{-1-1+.5-1+1-1+0.9}{7} = -0.09$$

Una vez que se tiene una forma de evaluar las relaciones inter-elemento d_{ij}, viene la cuestión de cómo calcular la diversidad existente en un subconjunto conocido. El problema es que, el término diversidad en sí es muy vago, y está lleno de subjetividad, en todo caso se puede afirmar que es un concepto asociado a una característica global del subconjunto seleccionado, y que debe ser evaluado en función de las d_{ij} consideradas.

La medida de dispersión de la Suma

Con esta medida se calcula la diversidad de un conjunto como la suma de las distancias inter-elemento de todos sus elementos:

$$div(M) = \sum_{i<j, i,j \in M} d_{ij} \qquad (2.2)$$

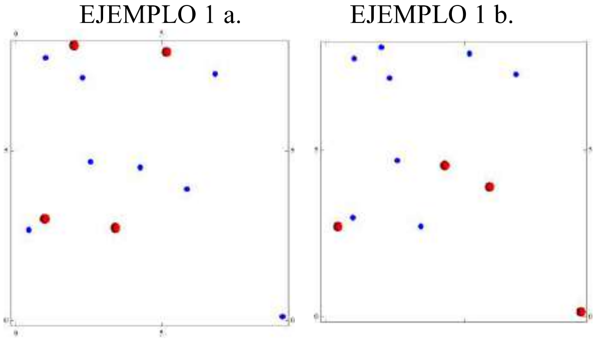
Así, esta medida fuerza a seleccionar elementos que estén muy distantes de otros, como se observa en la Figura 1, pero paradójicamente elementos que estén muy cercanos podrían favorecer la diversidad del conjunto, si es que estos elementos se encuentran lejos de otros. Esta medida de diversidad da origen al modelo Max-Sum.

FIGURA 1

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Dos grupos de 4 elementos seleccionados de un grupo de 12 elementos con distancias Euclidianas

EJEMPLO 1 a. EJEMPLO 1 b.



MEDIDA	EJEMPLO 1a.	EJEMPLO 1b.
Dispersión de la suma	28.315	32.1994

La medida de la dispersión Promedio

En este caso se define esta medida como una medida de la diversidad media:

$$div(M) = \frac{\sum_{i<j, i,j \in M} d_{ij}}{|M|} \qquad (2.3)$$

2.2 FORMULACIONES Y MODELOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dado un conjunto $V = \{1, 2, ..., n\}$, y la distancia inter-elemento d_{ij} entre cada pareja de elementos de V, el problema es seleccionar un subconjunto $M \subset V$, de cardinalidad $m < n$ conocida o no, que maximice la ecuación (2.1). La manera en que medimos la diversidad en esta ecuación da lugar a distintos problemas de optimización, en particular al problema Max-Sum y el problema Max-Mean:

El problema Max-Sum

El problema Max-Sum consiste en:

$$\max_{M \subset V, |M| = m} \sum_{i<j, i,j \in M} d_{ij}$$

Introduciendo las variables binarias:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si el elemento } i \text{ es seleccionado} \\ 0 \text{ sino} \end{cases} ; \quad 1 \le i \le n$$

Entonces este problema puede ser formulado como un problema de programación cuadrática binaria:

$$\max \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} x_i x_j \qquad (2.4)$$

$$s.t \sum_{i=1}^{n} x_i = m \qquad (2.5)$$

$$x_i \in \{0,1\}; 1 \le i \le n \qquad (2.6)$$

El problema (2.4)-(2.6) puede ser linealizado introduciendo nuevas variables binarias [7].

El problema Max-Mean

Este modelo surge de la optimización de la medida de la diversidad descrita en la ecuación (2.3), y al contrario de los problemas anteriores la cardinalidad de M es también una variable de decisión. El problema puede describirse como:

$$\max_{M \subset V, |M| \ge 2} \frac{\sum_{i<j, i,j \in M} d_{ij}}{|M|}$$

Una formulación de programación matemática con variables binarias es entonces:

$$\max \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (2.7)$$

$$s.t \sum_{i=1}^{n} x_i \ge 2 \qquad (2.8)$$

$$x_i \in \{0,1\}; 1 \le i \le n \qquad (2.9)$$

En este problema la función objetivo (2.7) es el promedio de la suma de las distancias entre los elementos seleccionados, la restricción (2.8) indica que por lo menos dos elementos deben seleccionarse. Tal como se lo presenta este es un problema de optimización binaria fraccional, pero puede ser linealizado utilizando nuevas variables binarias como se puede observar en [11].

Nótese que se puede resolver el problema Max-Mean con un método de solución para el problema Max-Sum, si lo aplicamos repetidamente para todos los valores posibles de $m = |M|; m = 2,3,...,n$. Sin embargo, como se demuestra en [12] hallar la solución del problema Max-Mean con métodos exactos a través de la estrategia de resolver los $(n-1)$ problemas de tipo Max-Sum requiere menos tiempo que resolver directamente la formulación (2.7)-(2.9) de este problema.

Complejidad Computacional

Es conocido que el problema Max-Sum formulado en las ecuaciones (2.7) a (2.9) es fuertemente NP-duro [2]. Recientemente también se ha demostrado la propiedad 1, en [11], que el problema Max-Mean es fuertemente NP-duro si las "distancias" inter-elemento toman valores positivos y negativos; en [12] se demuestra la propiedad 2, que indica que si estas distancias son no negativas, simétricas, y además se satisface la desigualdad triangular, entonces la diversidad $div(M)$ para cualquier $M \subset V$ es siempre menor que la diversidad de $M \cup \{k\}$ para cualquier $k \notin M$, luego, una solución con $m < n$ elementos no puede ser óptima en el problema Max-Mean, de ahí que el óptimo en este caso es seleccionar todos los n elementos.

Propiedad 1:

Si los coeficientes d_{ij} no tienen restricciones en el signo, entonces el problema Max-Mean es fuertemente NP-duro

Propiedad 2:

Si los coeficientes d_{ij} son no negativos, satisfacen la desigualdad triangular y son simétricos, entonces el problema Max-Mean tiene como solución óptima $M = V$; es decir, todos los elementos del conjunto original deben ser seleccionados.

3. DESARROLLO DE UN ALGORITMO BASADO EN GRASP PARA RESOLVER EL PROBLEMA MAX-MEAN

En esta investigación se propone una heurística que consiste de una fase de construcción basada en la metaheurística GRASP, con una fase de búsqueda local que se fundamenta en la metodología de búsqueda en vecindades variables (Variable Neighborhood Search), a este método lo denominamos heurística GRASP3, que posteriormente es mejorado con una fase de post procesamiento, basada en la metodología de Rencadenamiento de Trayectorias (Path Relinking), a todo el algoritmo lo denominamos heurística GRASP3+PR.

3.1 FASE DE CONSTRUCCIÓN DE GRASP3

Basados en el comportamiento observado en el modelo Max-Sum cuando se lo resuelve para todos los valores posibles de m, que determina un patrón cuasi-cóncavo para los valores óptimos del problema Max-Mean en función de m, como se demuestra en [12], se diseñó un método constructivo de tipo GRASP, en el cual añadimos nuevos elementos a la solución parcial bajo construcción siempre que el valor de la función objetivo del problema Max-Mean mejore, y cuando se observa un decrecimiento de este valor, se detiene la fase de construcción.

En lugar de una típica construcción basada en la metaheurística GRASP, en la cual para construir la Lista de Candidatos Restringida primero cada elemento candidato a seleccionarse es evaluado por una función voraz y luego se selecciona un elemento aleatoriamente, se utiliza un diseño alternativo, en concordancia con lo propuesto en estudios recientes [16], mediante lo cual primero aplicamos la aleatorización y luego la parte voraz, permitiendo a la metaheurística obtener mejores resultados que con su diseño clásico.

En términos matemáticos, dada la solución parcial M_k con k elementos seleccionados, la lista de candidatos CL está formada por los $(n-k)$ elementos no seleccionados. La lista de candidatos restringida, *RCL,* contiene una fracción $\alpha(0 < \alpha < 1)$ de los elementos de CL seleccionados aleatoriamente, donde α es un parámetro a escoger adecuadamente.

Luego, cada elemento $i \in RCL$ es evaluado de acuerdo al cambio que produce en la función objetivo; es decir, se calcula:

$$eval(i) = div(M_k \cup \{i\}) - div(M_k)$$

Después, el método selecciona el mejor candidato i^* en RCL si esto mejora la solución parcial actual; o sea si $eval(i^*) > 0$, y lo añade a la solución parcial, $M_{k+1} = M_k \cup \{i^*\}$; en caso contrario, si $eval(i^*) \leq 0$, el método para.

En la Figura 2 se muestra el seudo código de esta fase de construcción del método que denominamos heurística GRASP3.

FIGURA 2

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Fase de construcción del método GRASP3

1. Seleccionar aleatoriamente un elemento $i^{\bullet}$ en $V=\{1,2,...,n\}$
2. Poner $M_1\{i^{\bullet}\}, k=1$ y $improve=1$.

Mientras $(improve=1)$:

3. Calcular $CL=\{1,2,...,n\}\setminus M_k$
4. Construir RCL a partir de $\alpha|CL|$ elementos aleatoriamente seleccionados de CL
5. Calcular $eval(i)=div(M_k\cup\{i\})-div(M_k)\,\forall i\in RCL$
6. Seleccionar el elemento $i^{\bullet}$ en RCL con el máximo valor de $eval$

Si $(eval(i^{\bullet}))>0$:

7. $M_{k+1}=M_k\cup\{i^{\bullet}\}$
8. $k=k+1$

Sino

9. $improve=0$

3.2 BÚSQUEDA LOCAL EN GRASP3

Basados en la metodología de Búsqueda en Vecindades Variables, consideramos tres tipos de vecindad en nuestro procedimiento de búsqueda local:

- N_1: Remover un elemento de la solución actual, reduciendo así el número de elementos seleccionados en una unidad.
- N_2: Intercambiar un elemento seleccionado, con uno no seleccionado, manteniendo así constante el número de elementos seleccionados.
- N_3: Añadir un elemento no seleccionado en la solución actual, incrementando así el número de elementos seleccionados en una unidad.

Dada una solución, M_m, la búsqueda local primero intenta obtener una solución en N_1 que la mejore. Si esto sucede, y logramos hallar M'_{m-1} con $div(M'_{m-1})>div(M_m)$, entonces aplicamos el movimiento y consideramos M'_{m-1} como la solución actual. Caso contrario, el método recurre a explorar la vecindad N_2 y busca el primer intercambio que mejora M_m. Si esto sucede, y logramos hallar M'_m con:

$$div(M'_m)>div(M_m)$$

Entonces, aplicamos el movimiento y consideramos M'_m como la solución actual. En cualquier caso, sin tener en cuenta si hallamos la solución mejorada en N_1 o en N_2, en la próxima iteración el método inicia explorando nuevamente N_1 para mejorar la solución actual. Si ni la vecindad N_1 ni la vecindad N_2 contienen una mejor solución que la solución actual, entonces finalmente recurrimos a explorar N_3. Si esta exploración es exitosa, y logramos hallar M'_{m+1} con $div(M'_{m+1})>div(M_m)$, entonces aplicamos el movimiento y consideramos M'_{m+1} como la solución actual, y luego regresamos a explorar N_1 en la siguiente iteración. Caso contrario, estaríamos en una situación en la que ninguna de las vecindades contiene una mejor solución que la solución actual, y por tanto el método termina.

Dada una solución M_m, calculamos la contribución de cada elemento seleccionado i, así como la contribución potencial de cada elemento no seleccionado i como:

$$d_s(i,M_m)=\sum_{j\in M_m} d_{ij}$$

Entonces, cuando exploramos N_1 para remover un elemento de M_m, buscamos los elementos seleccionados en el orden dado por d_s, donde el elemento con el valor más pequeño se prueba primero. Similarmente, al explorar N_2 vamos probando los elementos seleccionados en el mismo orden pero los elementos no seleccionado en el "orden inverso"; es decir, primero consideramos los elementos no seleccionados con una gran contribución potencial. Finalmente, cuando exploramos N_3 los elementos no seleccionados, que se consideran para ser añadidos en la solución actual, son explorados de la misma manera que en N_2, en la cual el elemento con la mayor contribución potencial es considerado primero.

La Figura 3 muestra el seudo código de esta fase de mejora del algoritmo.

FIGURA 3

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Algoritmo de búsqueda local para GRASP3

1. Sea M_m la solución inicial, determinada en la fase de construcción
2. Calcular $d_s\left(i, M_m\right)$ para todo elemento $i \in V$.
   Mientras $\left(improve = 1\right)$
3. Explorar los elementos seleccionados en el orden de d_s para transformarlos en no seleccionados
   Si existe un movimiento en N_1 que mejora la solución actual,
4. Realizar el primer movimiento de mejora $\left(N_1\right)$
5. Sea M'_{m-1} la solución actual
   Sino
6. Buscar para realizar los intercambios en el orden de d_s
   Si existe un movimiento en N_2 que mejora la solución actual,
7. Realizar el primer movimiento de mejora $\left(N_2\right)$
8. Sea M'_m la solución actual
   Sino
9. Buscar los elementos no seleccionados en el orden reverso de d_s
   Si existe un movimiento en N_3 que mejora la solución actual,
10. Realizar el primer movimiento de mejora $\left(N_3\right)$
11. Sea M'_{m+1} la solución actual Sino
12. $improve = 0$
13. Actualizar los valores de d_s

3.3 GRASP3+RENCADENAMIENTO DE TRAYECTORIAS

El algoritmo de Rencadenamiento de Trayectorias (PR por sus siglas en inglés), fue descrito por primera vez en el marco del método de búsqueda tabú (Glover, y otros, 1997), como una estrategia de intensificación de la búsqueda en regiones prometedoras del espacio de soluciones de un problema de optimización combinatoria. El método de rencadenamiento de trayectorias opera sobre un conjunto de soluciones, denominado "Conjunto Elite", ES, que se construye con la aplicación de un método previo, que en general es una metaheurística (originalmente el método de búsqueda tabú). En nuestro caso este método previo es la heurística GRASP3, con el cual se genera el conjunto élite, considerando tanto la calidad como la diversidad como las características deseables de sus elementos.

La estrategia que aplicamos para diseñar el nuevo algoritmo (GRASP3+PR) es la siguiente:

Inicialmente ES es vacío, y se aplica GRASP3, para $b = |ES|$ iteraciones, con esto poblamos inicialmente el conjunto élite con estas soluciones obtenidas, ordenando las soluciones en *ES* en base a su valor objetivo desde la mejor, representada con x^1, a la peor, representada con x^b. Nótese que *ES* es por tanto un conjunto ordenado de soluciones.

Una vez poblado el conjunto *ES* por *b* soluciones iniciales, en las siguientes iteraciones del algoritmo, se determina cuando una nueva solución generada, x', califica o no para entrar a *ES*, y cuál solución que estaba en *ES* deberá salir, con el fin de que su cardinalidad permanezca constante e igual a *b*.

Específicamente una nueva solución x' ingresa al conjunto *ES* si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. Si x' es mejor que x^1, esta solución ingresa al conjunto élite, esto indica que se privilegia la calidad como una condición esencial para pertenecer al conjunto *ES*.
2. Si x' es peor que x^1 pero mejor que x^b y además es suficientemente diferente que las otras soluciones del conjunto *ES*, x' también ingresa al conjunto *ES*, esto con el fin de favorecer la diversidad del conjunto de soluciones élite. Ahora, para ver esto, considerar que x' es suficientemente diferente que cualquier otra solución en *ES*, si la distancia entre x' y *ES*, es mayor que cierto umbral que representaremos con *dth*; esto es, x' ingresa al conjunto *ES*, si se satisface la condición (3.1):

$$x' \text{ es mejor que } x^1, \text{ o,}$$
$$x' \text{ es mejor que } x^b \text{ y } d(x', ES) \geq dth \quad (3.1)$$

Donde $d(x', ES)$ representa la distancia entre x' y ES, luego tenemos que definir que es esta distancia y como debe ser calculada.

Para conservar la cardinalidad de *ES* constante e igual a *b*, cuando se añade un elemento a este conjunto debemos remover alguno de los que ya estaban presentes. Y con el fin de privilegiar la calidad y la diversidad del conjunto *ES*, se remueve aquella solución de peor valor que está más cercana a x' en *ES*. Para declarar que una solución está cercana o lejana a x' en *ES*, debemos considerar una medida de distancia entre esta solución y el conjunto de soluciones élite.

En consecuencia, una solución del problema Max-Mean x, puede ser interpretada como un vector binario con *n* coordenadas:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}; x_i \in \{0, 1\}$$

Donde la coordenada x_i toma el valor 1 si el elemento i está seleccionado en esa solución y 0 en caso contrario, con esta representación la distancia entre las dos soluciones puede ser calculada como se muestra en la ecuación (3.2):

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad (3.2)$$

Es decir, $d(x, y)$ indica el número de elementos que no están simultáneamente en ambas soluciones x, y, o desde otro punto de vista, el número de elementos en los que difieren las dos soluciones.

Así entonces la distancia entre una solución x' y el conjunto de soluciones élite, ES, $d(x', ES)$ puede ser calculada como la suma de las distancias entre x' y todos los elementos de *ES*.

$$d(x', ES) = \sum_{y \in ES} d(x', y) \qquad (3.3)$$

Para establecer completamente la forma de evaluar la condición (3.3), se implementó el parámetro de umbral dth como un porcentaje φ del tamaño total de la población, *n*, representado como dth^*, multiplicado por la cardinalidad del conjunto élite de soluciones b; es decir:

$$dth = (\varphi\, n)b = dth^*\, b \quad (3.4)$$

La razón de la ecuación (3.4) es que $d(x', ES)$ es la suma de las distancias desde x' hasta cada elemento del conjunto *ES*, que tiene cardinalidad *b*. Si consideramos que dos soluciones son suficientemente diferentes cuando en promedio difieran en un porcentaje φ de sus elementos, de acuerdo a la ecuación (3.2) tenemos que $d(x', y) \geq \varphi\, n$, y entonces con la fórmula (3.3) para evaluar de la distancia de x' a *ES*, se tiene:

$$d(x', ES) \geq \varphi\, n b.$$

Cuando se hace esto para cierto número de iteraciones se tiene finalmente poblado el conjunto *ES* y a continuación se realiza la fase de intensificación, con el procedimiento de Rencadenamiento de Trayectorias propiamente dicho, que se describe a continuación:

Dadas dos soluciones $x, y \in ES$, el procedimiento de Rencadenamiento de trayectorias $PR(x, y)$ inicia con la primera solución x, denominada *solución inicial*, y por medio de un mecanismo de transformación gradualmente se transforma en la solución final y denominada *solución* guía. Para lograr esto en cada iteración consideramos dos movimientos:

- Remover un elemento que está en x pero que no está presente en y; o,
- Añadir un elemento que no está presente en x pero que si está presente en y.

El método selecciona el mejor de estos candidatos, originando la primera *solución* *intermedia* de la trayectoria, representada con $x(1)$. Luego se consideran nuevamente los dos movimientos para $x(1)$, es decir remover un elemento en $x(1)$ que no está presente en y, o añadir un elemento que no está presente en $x(1)$ pero que si está presente en y. El mejor de estos candidatos es la segunda solución intermedia $x(2)$. De esta manera, si operamos recursivamente, generamos un camino, o una trayectoria, de soluciones intermedias $x(1), x(2), \dots, x(k)$ hasta alcanzar a y. Luego, se aplica a esta mejor solución encontrada la fase de mejora por el procedimiento de búsqueda local. En nuestra investigación realizamos el procedimiento *PR* para ir de x a y $\left(PR(x,y)\right)$, y también para ir de y a x $\left(PR(y,x)\right)$, de donde se obtiene una solución x', que será considerada como la mejor solución si su valor objetivo supera a la mejor solución de *ES*.

La Figura 4, muestra el seudo código del algoritmo que denominamos GRASP3+PR, que incluye las fases de construcción, búsqueda local y rencadenamiento de trayectorias.

FIGURA 4

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Seudo Código del algoritmo GRASP con Rencadenamiento de Trayectorias (GRASP3+PR)

1. Poner $Globaliter$ igual al número global de iteraciones elegida.
2. Aplicar el método GRASP3 (construcción más mejora) por $b = |ES|$ iteraciones para poblar el conjunto $ES = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$
3. Poner $iter = b + 1$

   Mientras $(iter \le Globaliter)$:
4. Aplicar la fase de construcción GRASP $\Rightarrow x$
5. Aplicar la fase de búsqueda local de GRASP a $x \Rightarrow x'$

   Si $f(x') > f(x^1)$ o $f(x') > f(x^b)$ y $d(x', ES) \ge dht$
6. Sea x^k la solución más cercana a x' en ES con $f(x') > f(x^k)$
7. Añadir x' a ES y remover x^k.
8. Actualizar el orden del conjunto ES (desde el mejor x^1 al peor x^b).
9. Sea $x^{best} = x^1$

   Para ($i = 1$ hasta $i = b - 1$ y desde $j = i + 1$ hasta $j = b$)
10. Aplicar $PR(x^i, x^j)$ y $PR(x^j, x^i)$, sea x la mejor solución hallada
11. Aplicar la fase de búsqueda local de GRASP3 a $x \Rightarrow x'$

    Si $\left(f(x') > f(x^{best})\right)$:

    12. $x^{best} = x'$
13. Salida x^{best}

4. LA SELECCIÓN DE EQUIPOS DE TRABAJO EFICIENTES

Es un hecho evidente, a partir de nuestra vivencia diaria, que los seres humanos a menudo cooperamos en todo tipo de situaciones, desde cuestiones de la familia a problemas de carácter mundial como la protección de los bosques y la lucha contra el calentamiento global. Sin embargo, la teoría de juegos evolutiva predice que la tentación egoísta a renunciar al bien público es mayor que el deseo de la cooperación colectiva, lo cual está avalado por múltiples experimentos económicos, entonces ¿cómo es que aparece la cooperación?. Pues según estudios recientes, [9], [14], [1], es la diversidad social la que proporciona un escape a esta paradoja, así una sociedad diversa crea problemas y oportunidades.

Y aunque en el pasado, mucho del interés público en la diversidad social estuvo enfocado desde el punto de vista de la igualdad de oportunidades, la justicia, la equidad y la representación, recientemente se ha tratado de encontrar cómo sacar ventaja de la diversidad [9]. Así pues, en la actividad cotidiana de las organizaciones, empresas, escuelas, equipos deportivos, etc. se ha observado evidencias que la diversidad juega un papel importante en la habilidad que tienen los grupos de personas para resolver problemas. Últimamente han aparecido en la literatura investigaciones que demuestran formalmente que este fenómeno empírico es cierto, proporcionando una justificación teórica para este hecho [9]. Una consecuencia de esto es que, bajo ciertas circunstancias, los grupos de personas que están conformados de manera diversa pueden superar en productividad a los grupos conformados por las personas individualmente más capacitadas para resolver estos problemas; es decir, en cierto sentido la diversidad triunfa sobre la habilidad, y el lema de Steve Jobs, ex CEO de Apple, "*piensa diferente*" puede ser una frase clave si se quiere aumentar la productividad de equipos de trabajo. Desde un punto de vista práctico este resultado implica que, por ejemplo, una empresa que quiere conformar un equipo de trabajo no deberá buscar seleccionar simplemente a los individuos más altamente calificados para ello, probablemente lo más eficiente será escoger un grupo diverso. Lo ideal sería que los grupos de trabajo estén conformados por personas con alta habilidad y diversos; sin embargo, estos dos objetivos suelen estar contrapuestos pues la diversidad del equipo formado por las personas más hábiles tiende a hacerse pequeña, como se demuestra en [10].

¿Cómo seleccionar el equipo de trabajo más productivo?

Desde un punto de vista intuitivo, la conclusión de que grupos diversos en identidad pueden superar a grupos no diversos (homogéneos) debido a su gran diversidad funcional se basa en la afirmación, bien aceptada, que si los agentes dentro de los grupos tienen igual habilidad individual para resolver un problema, un grupo funcionalmente diverso superará a un grupo homogéneo, En [9] se demuestra que grupos con diversidad funcional tienden a superar a los mejores agentes individuales con tal de que los agentes en el grupo tengan igual habilidad. Esto todavía dejaba abierta una importante pregunta: ¿Puede un grupo funcionalmente diverso, cuyos integrantes tienen menor habilidad individual, tener un rendimiento superior al grupo de personas que tienen la más alta habilidad individual?, en [8] finalmente se resolvió de manera afirmativa esta pregunta, proporcionando una demostración matemática a este hecho. Pero aún surgen de manera natural otras inquietudes al respecto: ¿Cuántos integrantes debería tener este grupo de tal manera que la diversidad promedio dentro del grupo sea máxima?, y, ¿se puede detectar cuál es este grupo funcionalmente más diverso?

Así, por ejemplo, consideremos la situación en la cual una Institución desea contratar personas para resolver un problema. Para realizar una buena selección la institución usualmente tomaría una prueba a los aplicantes, digamos 500, para estimar sus habilidades individuales para resolver el problema. Supongamos que todos los aplicantes son individualmente capaces para resolverlo, pues tienen la formación y la experiencia necesarias, pero tienen diferentes niveles de habilidad. Nos preguntamos si la Institución deberá contratar:

(i). La persona con el mayor puntaje obtenido en la prueba
(ii). Las 10 personas con los puntajes más altos
(iii). 10 personas seleccionadas aleatoriamente desde el grupo de aplicantes
(iv). Las 10 personas más diversas en identidad del grupo de aplicantes
(v). El grupo de personas más diverso en promedio del grupo de aplicantes (en este caso el número a seleccionar no es asumido como conocido).

Ignorando los posibles problemas de comunicación dentro de los grupos, la literatura existente sugiere que (ii) es mejor que (i) [10], ya que más personas buscarán en un espacio más amplio, teniendo entonces más oportunidades para obtener mejores soluciones, en lugar de la acción de la persona mejor puntuada que se quedará atascada en uno de sus óptimos locales. Recientemente en [6] se ha demostrado formalmente que (iii) es mejor que (ii). De esta manera, falla la intuición basada en que el grupo de las personas con puntajes más altos, es decir los más capacitados individualmente, vayan a formar el mejor equipo de trabajo, y por tanto que la empresa debe contratar (ii), pues se demuestra que bajo ciertas hipótesis (iii) es mejor decisión [6]. Los autores llegan a determinar que un equipo de personas escogidas aleatoriamente tiene más diversidad funcional y que bajo ciertas condiciones supera en rendimiento a (ii), ya que bajo el conjunto de condiciones que identifican los autores, la diversidad funcional del grupo de las personas que están individualmente mejor capacitadas para resolver el problema necesariamente se vuelve muy pequeña, por lo que, al final, la ventaja de tener las mejores habilidades individuales se ve más que compensada por la mayor diversidad del grupo escogido aleatoriamente. Aquí no se considera al equipo con la máxima diversidad, sino a un grupo seleccionado aleatoriamente, a partir de ahí se demuestra que, si escogiéramos al grupo más diverso en promedio, es decir contratar al grupo conformado según (iv), éste resultaría más productivo que contratar aquel formado aleatoriamente (iii), y, por transitividad, mejor que el grupo conformado por los mejores puntuados (ii) y por último mejor que simplemente escoger el más puntuado (i).

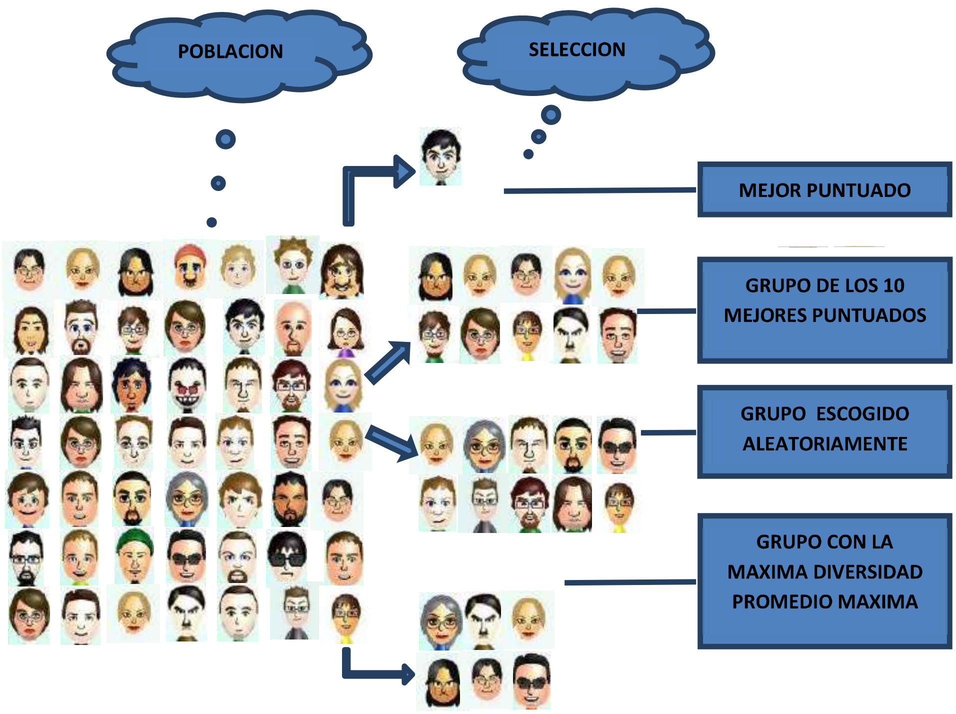
Por otro lado la literatura dice poco o nada sobre (v), pues clásicamente en los problemas de diversidad se ha considerado al número de elementos a escoger como un valor dado, sin embargo en las aplicaciones prácticas no está claro como escoger el número de elementos a seleccionar, y lo mejor podría ser dejar que sea el propio proceso de optimización el que nos proporcione su valor. Así el foco de nuestro análisis se centra en la disputa entre la importancia que tienen las habilidades individuales de cada persona en el grupo, su diversidad funcional (atrapada por la diversidad en identidad), y el tamaño ideal del grupo, tal como se representa esquemáticamente en la Figura 5. Una conclusión de todo esto es que la diversidad en las organizaciones debe ser alentada, lo cual implica nuevas políticas, formas organizacionales y estilos de administración. En el contexto de resolver un problema, el valor de una persona depende de su habilidad para mejorar la decisión colectiva, pues la contribución de esta persona depende en gran medida de las perspectivas y heurísticas de las otras personas que conforman el equipo de trabajo. Así, para estimar la contribución potencial de una persona en un equipo de trabajo, es más importante hacer énfasis en medir cómo esta persona piensa diferente, antes que en estimar la magnitud de la habilidad de la persona a través de pruebas de aptitud o test de inteligencia.

Sin embargo, hay que estar conscientes de algunos aspectos que no han sido considerados y que podrían tener influencia en el rendimiento de un equipo de personas. Un aspecto importante que hay que mencionar es que los grupos diversos en identidad a menudo podrían tener más conflictos, más problemas de comunicación, menos respeto mutuo y menos confianza entre sus miembros que los grupos homogéneos, lo que podría ocasionar en los grupos diversos una disminución en su rendimiento.

FIGURA 5

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

¿Cuál es la mejor selección de un equipo de trabajo a partir de una población de personas capacitadas para resolver un problema pero con distintos grados de habilidad?



5. RESOLUCIÓN DE UN CASO

Para aplicar los algoritmos generados se escogió una muestra de 586 profesores de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (Guayaquil – Ecuador), con el fin de seleccionar un grupo representativo de diversidad máxima.

Las variables consideradas fueron:

PROFESOR: Identificador, valores de 1,2,…,586
CONDICION LABORAL: -1 contratado, 1 titular
SEXO: -1 femenino, 1 masculino

NIVEL ACADEMICO: -1 Tecnólogo,-0.5 Grado, 0.5 Maestría, 1 Doctorado
ESTUDIO EN LA ESPOL: -1 si, 1 no
TIPO DE PROFESOR: -1 académico, 0 académico-investigador, 1 investigador
UNIDAD: -0.5 Instituto, 0.5 Facultad
NIVEL SALARIAL: -1, -0.9, -0.8,…, 0.9, 1 (desde el más bajo al más alto)

La medida de similaridad (d_{ij}) es para nuestro caso:

$$d_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{k} \delta\left(\phi_l^i, \phi_l^j\right)}{k}$$

Donde

$$\delta\left(\phi_l^i, \phi_l^j\right) = \begin{cases} -1 & si\ \phi_l^i = \phi_l^j \\ \left|\phi_l^i - \phi_l^j\right| & si\ \phi_l^i \neq \phi_l^j \end{cases}$$

Se aplicó el algoritmo GRASP3+PR a los datos. Se hicieron 10 corridas, la Tabla 2 muestra los resultados promedio, mientras que en la Tabla 3 se muestran los resultados detallados de cada una de las 10 corridas.

TABLA II

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Resultados promedio sobre las 10 corridas del algoritmo GRASP3+PR

	Solución
# seleccionados	97.7
Valor objetivo	1.11280577
Tiempo de ejecución (seg.)	125.9248

TABLA III

Una variante del problema de la diversidad máxima para seleccionar equipos de trabajo eficientes

Resultados individuales para cada una de las 10 corridas

CORRIDA	GRASP3+PR		
	tiempo	valor	M
1	127.094	1.11542	101
2	125.081	1.11393	100
3	120.028	1.10484	96
4	115.622	1.10311	92
5	114.616	1.10251	94
6	139.309	1.10811	96
7	123.162	1.12293	100
8	134.082	1.12600	100
9	125.688	1.12033	101
10	134.566	1.11090	97
PROMEDIO	**125.9248**	**1.11281**	**97.7**

6. CONCLUSIONES

El problema de maximización Max-Mean es un problema computacionalmente difícil que se plantea en el contexto de los problemas de la dispersión equitativa y de la diversidad máxima. Este problema nos ha servido para desarrollar nuevas estrategias de búsqueda, las cuales proponemos para resolver este problema combinatorio. En particular hemos desarrollado un algoritmo GRASP constructivo basado en una combinación no estándar de codicia y aleatoriedad, una estrategia de búsqueda local basada en la metodología de vecindades descendientes variables, la cual incluye tres tipos diferentes de vecindades, y una fase de post procesamiento basada en rencadenamiento de trayectorias. Este último método está basado en una medida de control de la diversidad en el proceso de búsqueda.

Se realizaron extensos experimentos computacionales para estudiar primero el efecto de los cambios en los elementos críticos de la búsqueda y luego comparar la eficiencia de las heurísticas que proponemos con otros procedimientos adaptados de otros autores para problemas similares. La comparación con los métodos previos también basados en la metaheurística GRASP favorece nuestra propuesta.

Como bajo ciertas circunstancias la diversidad triunfa sobre la habilidad, la diversidad en las organizaciones debe ser alentada, lo cual implica nuevas políticas, formas organizacionales y estilos de administración. En el contexto de resolver un problema, el valor de una persona depende de su habilidad para mejorar la decisión colectiva, pues la contribución de esta persona depende en gran medida de las perspectivas y heurísticas de las otras personas que conforman el equipo de trabajo. La diversidad en el enfoque de la solución a un problema respecto a las otras personas es un importante predictor de su valor, y a la larga puede ser más relevante que su habilidad individual para resolver el problema por su cuenta. Así, para estimar la contribución potencial de una persona en un equipo de trabajo, es más importante hacer énfasis en medir cómo esta persona piensa diferente, antes que en estimar la magnitud de la habilidad de la persona a través de pruebas de aptitud o test de inteligencia.

También hay que anotar algunos aspectos que no han sido considerados y que podrían tener influencia en el rendimiento de un equipo de personas. Tal vez el más importante es que los grupos diversos en identidad a menudo podrían tener más conflictos, más problemas de comunicación, menos respeto mutuo y menos confianza entre sus miembros que los grupos homogéneos, lo que podría ocasionar en los grupos diversos una disminución en su rendimiento. En [6] se menciona que las personas con perspectivas similares pero con heurísticas diversas pueden comunicarse unos con otros sin mayor problema, pero personas con perspectivas diversas pueden tener problemas para comprender soluciones identificadas por los otros integrantes del grupo, en ese sentido lo mejor para las organizaciones será contratar personas con perspectivas similares pero garantizando una diversidad de heurísticas, de esta manera, las organizaciones pueden explotar de mejor manera los beneficios de la diversidad mientras minimiza los costos de la falta de comunicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **CASTILLO, O., MELIN, P., GAMEZ, E., KREINOVICH, V., & KOSHELEVA, O.** (2009). Intelligence Techniques Are Needed to Further Enhance the Advantage with Diversity in Problem Solving. *IEEE Workshop Hybrid Intelligent Models and Applications. HIMA'09*, (págs. 48-55).

[2]. **ERKUT, E.** (1990). The discrete p-dispersion problem. *European Journal of Operational Research, 46*, 48-60.

[3]. **GAREY, M. R., & JOHNSON, D. S.** (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* New York: W.H. Freeman.

[4]. **GHOSH, J.** (1996). Computational aspects of the maximum diversity problem. *Operations Research Letters*(19), 175 - 181.

[5]. **GLOVER, F., KUO, C., & DHIR, K.** S. (1995). A discrete optimization model for preserving biological diversity. *Appl. Math. Modeling, 19*, 696 - 701.

[6]. **HONG, L., & PAGE, S.** (2004). Groups of diverse problem solvers can outperform groups of high-ability problem solvers. *PNAS, 101*(46), 16385 - 16389.

[7]. **KUO, M., GLOVER, F., & DHIR, K.** (1993). Analyzing and modeling the maximum diversity problem by zero-one programming. *Decision Sciences*(24), 1171 - 1185.

[8]. **LU HONG, S. E.** (2004). Groups of diverse problem solvers can outperform groups of high-ability problem solvers. *PNAS, 101*(46), 16385-16389.

[9]. **PAGE, S.** (2007). *The Difference: How the Power of Diversity Creates better Groups, Firms, Schools, and Societies.* New Jersey: Princenton University Press.

[10]. **POLZER, J., MILTON, L., & SWANN, W.** (2002). Capitalizing on Diversity: Interpersonal Congruence in Small Work Groups. *Administrative Science Quarterly, 47*(2), 296 - 324.

[11]. **PROKOPYEV, O., KONG, N., & MARTÍNEZ-TORRES, D.** (2009). The equitable dispersion problem. *European Journal of Operational Research*(197), 59 - 67.

[12]. **MARTI, R., SANDOYA, F.,** (2011). GRASP and PR for the Equitable Dispersion Problem, Valencia, Technical.

[13]. **SANTINI, S., & JAIN, R.** (1999). Similarity Measures. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.

[14]. **SANTOS, F., SANTOS, M., & PACHECO, J.** (2008). Social diversity promotes the emergence of cooperation in public good games. *Nature, 454*, 213-216.

[15]. **RESENDE M. Y RIBEIRO C.** (2001). Greedy Randomized Adaptative Search Procedures [Sección de libro] // State of-the-art Handbook in Metaheuristics / ed. Kochenberg F. Glover and G.. - Boston : Kluwer Academic Publishers.

[16]. **RESENDE M. Y WERNECK R.** (2004). A hybrid heuristic for the p-median problem [Publicación periódica] // Journal of heuristics. – 2004 1 : Vol. 10. - págs. 59-88.