

INCORPORANDO BROUSSEAU EN DOS TEOREMAS FUNDAMENTALES: PROBABILIDAD TOTAL Y BAYES

Petakos Kyriakos¹

Resumen. El presente artículo intenta presentar la popular teoría de las situaciones didácticas TDS (theory of didactical situations), establecida por Brousseau (Brousseau, 1997) y refinada por Chavarría (Chavarría, 2006), usando la llamada voz del aula en dos momentos críticos para el aprendizaje de la probabilidad del nivel universitario. Vemos la formación de un milieu, sobre el entendimiento de dos teoremas de probabilidad, la Probabilidad Total y Bayes.

Palabras Clave: Probabilidad total, Bayes, Teoría de las Situaciones Didácticas TDS.

Abstract. The present article presents the popular theory of the didactical situations (TDS), as established by Brousseau (Brousseau, 1997) and refined by Chavarría (Chavarría, 2006), employing the so-called voices of the classroom in two critical points for the learning of probability on the university level. We will see the formation of teaching environment that concerns understanding two probability theorems, Total probability law and Bay's theorem

Key Words: Total probability, Bayes, Theory of Didactical Situations TDS.

Recibido: Octubre 2012

Aceptado: Enero 2013

1. INTRODUCCIÓN

En los primeros años universitarios la Teoría de la Probabilidad, habitualmente como seguidora de un curso de análisis combinatorio (Sanabria, 2006), se considera fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático en muchas disciplinas diferentes. Forma un paso imprescindible para organizar un programa de estudios, que se puede justificar como terciario y para preparar a los estudiantes para que piensen de una manera más eficaz en sus carreras de futuro. Un curso como el descrito arriba contiene necesariamente las reglas y las leyes básicas de la probabilidad con el objetivo de familiarizar a los estudiantes con una forma de pensar tanto práctica como teórica, la que les pueda parecer útil en su futuro próximo y lejano. Aquí vamos a destacar dos, el teorema de la Probabilidad Total y la ley de Bayes, (Feller, 1968).

Teorema de Probabilidad Total. Si Ω simboliza el espacio total de un experimento y A_i es una secuencia de eventos mutuamente excluyentes, cuya unión forma el conjunto Ω , entonces por cada posible evento B

$$P(B) = \sum_i P(B / A_i) P(A_i)$$

Teorema de Bayes Bajo las mismas condiciones de arriba, se concluye

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) P(A_i)}{\sum_i P(B / A_i) P(A_i)}$$

2. METODOLOGÍA

Nuestra muestra consiste de 16 estudiantes de la Universidad de Pireas, divididos por 4 grupos. La división de los grupos se basa principalmente a las relaciones ya desarrolladas entre ellos en un sentido asertivo (Cadoche, 2009, Pérez, 2006). Los encuentros realizados con ellos son 2 veces a la semana que duran 2-3 horas cada vez. Se presenta por parte del profesor el material didáctico con sus pruebas apropiadas, sus consecuencias y un número predefinido de ejemplos adecuadamente elegidos. Al final se pone para resolución un problema, lo diríamos especie de instrumento para poder formar una imagen de lo entendido, cuyo desarrollo tendrá lugar en el segundo encuentro.

Ejercicio

En una carrera de caballos la probabilidad de victoria de un caballo es 0,3 si el tiempo está bueno y 0,5 si el tiempo está malo. El evento de llover pasa con probabilidad 0,4.

- 1) ¿Cuál es la probabilidad de victoria?
- 2) En el caso de que el caballo perdiera la carrera, ¿cuál es la probabilidad que el tiempo estaba bueno el día de la carrera?

Solución

(según el modo de Sanabria, (Sanabria, 2010))

Etapas

Definición de los eventos

V victoria del caballo, D derrota del caballo, M el tiempo está malo, B el tiempo está bueno. Entonces

¹Petakos Kyriakos, Dr., Academia Turística Rodos Grecia.
(e_mail: kyriakospetakos66@gmail.com).

$$P(V/B) = 0,3, \quad P(V/M) = 0,5, \\ P(M) = 0,4$$

Etapla 2

Aplicación de Probabilidad total

$$P(V) = P(V \cap B) + P(V \cap M)$$

y más detalladamente

$$P(V) = P(V/B)P(B) + P(V/M)P(M).$$

Sustituyendo los números

$$P(V) = 0,3 * 0,6 + 0,5 * 0,4 = 0,38$$

Etapla 3

Aplicación de Bayes

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/B)P(B)}{P(D)}$$

Pero

$$P(D) = 1 - P(V) = 1 - 0,38 = 0,62$$

Por otro lado

$$P(D/B) = 1 - P(V/B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Combinando las tres últimas relaciones,

$$P(B/D) = \frac{0,7 * 0,6}{0,62} = 0,68.$$

3. PRESENTACIÓN

Los cuatro grupos han escrito correctamente y detalladamente la primera etapa del ejercicio, es decir, la definición de los eventos en la manera apropiada, pero los dos tienen dudas sobre las probabilidades condicionales involucradas en el problema

$$P(V/B) = 0,3$$

$$P(V/M) = 0,5$$

Podemos ver unas ideas que tuvieron los estudiantes:

$$P(V/M) = 1 - P(V/B)$$

$$P(V/B) = 1 - P(V/M)$$

Cuando son entrevistados, obtenemos el diálogo siguiente. P simboliza desde ahora en adelante el profesor y A, B, C, D los grupos designados con

índices diferentes para cada estudiante -miembro del grupo-separadamente.

A_1 Así que el tiempo malo es el complemento del tiempo bueno, ¿no se concluye consecuentemente a la relación de abajo?

$$P(V/M) = 1 - P(V/B)$$

B_1 Naturalmente en el contenido del ejercicio vemos dos números que no suman 1. Pero quizás esconde alguna interpretación difícil de los teoremas.

P Si tenemos en cuenta que la ley probabilística del complemento se aplica cuando la negación está en el numerador, i.e.

$$P(A'/B) = 1 - P(A/B)$$

entonces se puede evadir un error así.

A_1 al menos de ahora en adelante nos queda en la memoria. Los números verdaderamente no sostienen algo así.

El último comentario pone mucha importancia en el concepto del ejemplo, de paradigma y del papel que desempeña entre las dos partes involucradas, el profesor y el estudiante. Diríamos que atañe a la tercera parte de Brousseau (Chavarría, 2006), al medio didáctico. Elegir un ejemplo como nuestro ejercicio inicial sirve a un doble objetivo: ayudar a aclarar la relación de arriba de forma práctica, sólo a través de una comparación de números, por parte del estudiante y facilitar la tarea del profesor para diagnosticar errores eventuales.

Secunda etapa

Aplicación del Teorema de Probabilidad total. Una vez subsanada la situación de la probabilidad condicional, escribir la fórmula del teorema probabilidad total viene casi naturalmente

$$P(V) = P(V/B)P(B) + P(V/M)P(M)$$

El adverbio *casi* refiere a la realidad de que los libros están abiertos y así mientras un solo grupo escribe la relación con velocidad, los otros la reproducen paso a paso consultando el texto.

P ¿Era verdaderamente fácil entender que el Teorema de la Probabilidad total estaba escondido?

A_1 Seguro que no. Nos ha ocupado muchas veces desde el principio de semestre. Y al menos, en ese concepto los ejemplos ya resueltos estaban escritos muy detalladamente. No quedó espacio de duda.

B_1 (y C_1 a la vez) Una vez definidas las probabilidades condicionales, los componentes de este teorema y su aplicación parece como la resolución de una fórmula sencilla, a la que estamos acostumbrados desde hace muchos años.

Tercera etapa

La aplicación de Bayes, un teorema cuya comprensión a lo mejor formó para nosotros el obstáculo más grande durante el desarrollo de la resolución. Verdaderamente lo que pasa, lo que se observa es una incapacidad por parte de los grupos para representar lo que se pregunta. La frase ¿cuál es la probabilidad de un tiempo bueno, dada la derrota del caballo? no se puede interpretar probabilísticamente. En un esfuerzo de evadir el efecto Topaze (Chavarría, 2006) como lo caracteriza la teoría de Brousseau, tenemos que profundizar en las razones, para las que nuestra muestra encuentra tanta dificultad de adelantarse. A la vez combinamos de grado permitido lo que sostiene la zona de desarrollo próximo (Radford, 2008). Un proceso de equilibrar dos especies de capacidades, la capacidad personal independiente y la que se cultiva junto a una persona con mayor experiencia.

C_1 Lo que personalmente me causa no sólo dificultad, sino también una falta del contacto, es este tipo de inversión de la realidad. Digamos mejor la inversión de la lógica. La lógica implica preguntar ¿cuál es la probabilidad de la derrota, así que el tiempo está bueno?

D_1 Para mí, usando la primera etapa, creo que se escribe algo probabilístico. Pero me da miedo expresarlo. Me da la impresión de que todo viene al revés.

P (viendo que el resto de los grupos comparte estas preocupaciones) Entonces ¿por qué no emplear esta violación de la lógica, como ustedes la caracterizan para asociarla con la aplicación de Bayes?

A_2 Si ocurre nuevamente otra situación para nosotros paradoja, que no está resuelta por Bayes, ¿entonces qué haremos?

El comentario de arriba nos ofrece la oportunidad de redefinir nuestro papel en la enseñanza de hoy. Somos partidarios de la doctrina que no estamos en el aula simplemente para transmitir el conocimiento, sino para poder contribuir a su construcción (Vrasidas, 2000). Así que no otorgamos una receta para cada instante difícil en el proceso enseñanza-aprendizaje. Provocamos la resolución de un problema, como el anterior, en etapas. En cada etapa observamos los varios tipos de malentendidos y malas interpretaciones que surgen y basándonos a ellos, nos esforzamos en preparar un espacio en su sentido amplio, donde la participación del estudiante sea la mayor posible.

P Cada caso en la matemática tiene su propio tratamiento. La satisfacción de nuestro trabajo viene muchas veces de la diversidad de las maneras, con las que podemos afrontar un problema específico. El refinamiento de las exigencias del problema, nos conduce a lo que se

debe hacer. En este caso, escriben sencillamente lo que demanda la lógica, según su propio vocabulario.

$$P(D/B)$$

Y luego inviertanlo como si fuera una fracción sencilla

$$P(B/D)$$

Creo que después, siguiendo la fórmula del libro, pueden desarrollarlo.

Observando lo que pasa en sus cuadernos, veremos que el Teorema de Bayes se aplica correctamente, un poco de manera dudosa y sólo en uno de los grupos, aparece la fórmula siguiente:

$$= \frac{P(D/B)P(B)}{P(D)} \quad (1)$$

Sin otro lado en la igualdad. Tenemos que comunicarnos más intensamente con ese grupo para que ponga al lado izquierdo en (1), empleando una cadena de comentarios y propuestas, sostenidos también por la ayuda de los otros.

Al haber conseguido un cierto grado de movilidad hacia la compleción del ejercicio, generamos un diálogo entre los participantes según el que:

P ¿Y ahora hemos completado la resolución?

B_2 Otra aplicación de la probabilidad total en el horizonte, calcular $P(D)$

C_3 Para mí, sería más fácil interpolar una pregunta, que requería el cálculo de $P(D)$, es decir una segunda aplicación de la probabilidad total. Y después pasar a Bayes.

A_4 No hace gran diferencia, si se introduce una pregunta semejante. Lo que a mí me alerta adelantar es escribir lo que pienses, analizarlo según alguna norma establecida y finalmente si era o no una violación de la lógica.

B_2 En general, escribe lo que pasa por la mente, aunque parezca extraordinario y haz todos los comentarios al final. Al menos, obtienes una solución, algo concreto, un número, que pueda alejar de algún modo el miedo de moverse.

4. CONCLUSIONES

Lo que nos esforzamos presentar en este artículo era la resolución de un ejercicio, que atañe dos teoremas fundamentales en cada asignatura introductiva a la Probabilidad: El teorema de la probabilidad total y el Teorema de Bayes. Estamos bajo la influencia didáctica de Brousseau y su tipología de situaciones didácticas, especialmente la situación de la formulación y la de validación. La primera se expresa con la división de nuestra muestra en grupos, donde el desarrollo de un diálogo productivo, en el sentido

platónico (Theodorakopulos, 2002) es una tarea fácil a causa de las buenas relaciones ya establecidas entre ellos. Seguro en este punto se podría sostener que quizás esa interacción de los grupos pudiera limitar la autonomía, que forma un principio fundamental tanto de los constructivistas como los de Brousseau. Por eso diríamos que el abordar sociocultural, cuyo resultado se considera la autonomía estudiantil, se puede combinar (Radford, 2008) para que se lleve a cabo nuestro objetivo.

La segunda se realiza con la intervención del profesor en un momento oportuno para arreglar una mal interpretación o para alentar una actividad, que genera dudas entre los estudiantes. ¿Y que pasa con la situación adidáctica definida por Brousseau? Para conseguir esta situación según el fundador del concepto, tenemos que asemejar una situación real, donde los estudiantes utilizarán su propia experiencia y conocimiento previo y serán capaces de articular conjeturas destinadas al revolucionar la pregunta puesta.

El concepto moderno de la enseñanza requiere que el docente provoque la adaptación esperada eligiendo adecuadamente los problemas puestos. Dichos problemas, elegidos de modo que facilite su recibo por parte de los estudiantes, tiene que inducirlos a actuar, articular, pensar, y evolucionarse a través de su propia motivación. (Brousseau, 1997, Radford, 2008).

En nuestro caso esa semejanza a la realidad no es algo fácil, ni sabemos si sea posible ejecutarla.

En el ejercicio dado, hemos incluido bastante vocabulario de la vida cotidiana, como el estado de tiempo, bueno, malo, un juego de azar etc. Pero todavía está bastante distanciado que bosqueje una situación verdadera reproducida.

Pero si interpretamos el espacio de las situaciones reales para que se incluya todo lo que pasa en el aula, lo que llaman los norteamericanos en sus revistas voces del aula, entonces todo lo que los estudiantes escriben y dicen, cada detalle de su comportamiento es una componente de la realidad didáctica. En ese sentido, enfatizando en las dificultades afrontadas, en sus comentarios, insistimos en profundizar en su realidad de recibir el nuevo conocimiento. Además el proceso seguido está inscrito tanto en las situaciones de formulación como en las situaciones de validación.

Generalmente, el estudio probabilístico, basado y desarrollado a juegos de azar, esconde una especie de actualidad, que surge en muchas versiones durante su presentación en el aula. Depende de la disposición del profesor, de su esfuerzo para poder ampliar el medio didáctico Brousseano, emplear la realidad estudiantil. Una realidad, que contiene sus miedos, sus preocupaciones, sus contribuciones positivas y negativas hacia el aprendizaje de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1]. **BROUSSEAU, G.** (1997). *"Theory of Didactical situations in Mathematics"*. Kluwer Academic publishers.
- [2]. **FELLER, W.** (1968). *"An Introduction to Probability Theory and its Application"*, Wiley.
- [3]. **CADOCHÉ, L.** (2009). *"Asertividad en alumnos universitarios"*. Universidad Nacional de Litoral, Santa Fe, Argentina. Preprint.
- [4]. **CHAVARRÍA, J.** (2006). *"Teoría de las Situaciones Didácticas"*. Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática, 1(2).
- [5]. **PÉREZ, P.R.** (2006). *"Asertividad Laboral"*. Ediciones de ASIMET. Chile.
- [6]. **RADFORD, L.** (2008). *"Theories in Mathematics Education: A Brief Inquiry into their Conceptual Differences"*. Proposed for the ICMI Survey Team 7, The Notion and role of theory in mathematics education research.
- [7]. **SANABRIA, G.** (2006). *"Tópicos precedentes al estudio de las probabilidades"*. Publicaciones Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [8]. **SANABRIA, G.** (2010). *"Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio"*. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 10(2).
- [9]. **THEODORAKOPOULOS, I.** (2002). *"Introducción a Plato"*. Estia, Atenas.
- [10]. **VRASIDAS, C.** (2000). *"Constructivism vs. Objectivism: Implications of Interaction, Course design and Evaluation in Distance Education"*. International Journal of educational Technologies, 6(4), 339.