

## HOMOTOPÍA Y CONTINUACIÓN NUMÉRICA EN SISTEMAS NO LINEALES

Martín Carlos<sup>1</sup>

**Resumen.** Este artículo presenta la idea general de un método numérico para resolver sistemas no lineales que es distinto a los métodos numéricos iterativos tradicionales y que está basado en el concepto de homotopía y en la continuación numérica. Se demuestra que resolver un sistema no lineal de ecuaciones es equivalente a resolver un problema de valor inicial de primer orden. Se utiliza el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden para encontrar numéricamente la solución del problema de valor inicial. Finalmente, se incluyen algunos resultados sobre la ejecución del método numérico propuesto.

**Palabras Clave:** Sistema de ecuaciones no lineales, homotopía, continuación numérica, problema de valor inicial, métodos de Runge-Kutta.

**Abstract.** This article presents the general idea of a numerical method for solving nonlinear systems which is different from the traditional iterative numerical methods and is based on the concept of homotopy and numerical continuation. We prove that solving a nonlinear system of equations is equivalent to solve an initial value problem of the first order. We use the classic fourth order Runge-Kutta method to numerically solve the initial value problem. Finally, we include some results on the implementation of the proposed numerical method.

**Key Words:** System of nonlinear equations, homotopy, numerical continuation, initial value problem, Runge-Kutta methods.

Recibido: Febrero 2013

Aceptado: Marzo 2013

### 1. INTRODUCCIÓN

Existen muchos métodos numéricos iterativos convencionales para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, entre los que destacan los métodos de punto fijo y los métodos de Newton y sus variantes. Usualmente los métodos iterativos clásicos utilizan fórmulas recursivas que producen una sucesión vectorial que, dadas ciertas condiciones, converge a una solución del sistema no lineal. Para garantizar la convergencia de la sucesión construida, normalmente se necesita, entre otras cosas, que el dato inicial se encuentre “cerca” de una solución del sistema no lineal, además de que las funciones de varias variables que componen el sistema cumplan ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad. Otra técnica consiste en trabajar sobre un problema equivalente de optimización. Sobre este nuevo problema se pueden aplicar métodos de optimización numérica conocidos, como el método del gradiente o el método BFGS, sin embargo, desde hace menos de una década, se están usando algoritmos metaheurísticos que hacen uso de la computación evolutiva, como los “algoritmos genéticos” y la “búsqueda dispersa”, para resolver el problema equivalente de optimización, con bastante éxito en cuanto al consumo de recursos computacionales y a los resultados obtenidos. En [4] se propone un algoritmo evolutivo para resolver sistemas no lineales.

Lo que se propone en este documento es resolver un sistema no lineal planteando otro tipo de problema equivalente: un problema de valor inicial de primer orden. Esta idea la propuso D. F. Davidenko alrededor de 1960 y actualmente tiene un sinnúmero de aplicaciones. Para esta forma diferente de resolver un sistema no lineal hacemos uso del concepto de homotopía y de la continuación numérica. Se demostrará más adelante que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con el dato inicial es equivalente a resolver el sistema no lineal de ecuaciones. Se hará uso del método de cuarto orden de Runge-Kutta clásico para resolver numéricamente el problema de valor inicial. Por lo tanto, se tomará como una solución del sistema no lineal la solución obtenida en el problema de valor inicial. Se concluye este artículo compartiendo algunos experimentos computacionales.

### 2. CONCEPTOS Y FUNDAMENTOS

**Definición 1.-** Un sistema no lineal de ecuaciones con incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

O en presentación vectorial  $F(\vec{X}) = \vec{0}$ , donde:

<sup>1</sup> Martín Carlos, M.Sc., Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).  
(e\_mail: cmmartin@espol.edu.ec).

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{pmatrix} \text{ y } \vec{0} \text{ es el}$$

vector nulo de  $R^n$ .

Las  $n$  funciones  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  son, en general, funciones no lineales de  $n$  variables reales independientes y que tienen un dominio en común el cual se va a denotar como  $\Omega \subseteq R^n$ . Es decir, para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$f_i : \Omega \mapsto R$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \rightarrow f_i(X)$$

**Definición 2.-** Suponga que las funciones  $F, G : \Omega \subseteq R^n \rightarrow R^n$  son continuas. Se dice que  $F$  y  $G$  son homotópicas, si existe una función continua  $H : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R^n$  tal que para toda  $X \in \Omega$  ocurre que  $H(X, 0) = G(X)$  y  $H(X, 1) = F(X)$ . Si tal es el caso, llamaremos a la función  $H$  una homotopía de  $G$  hacia  $F$ .

La idea del concepto de homotopía es que una función continua  $G$  se pueda “deformar continuamente” hasta convertirse en la función continua  $F$ . La función que permite esta transformación es la función continua  $H$  mediante el parámetro  $\lambda \in [0, 1]$ . Se podría definir  $H$  de muchas maneras, pero es muy común trabajar con homotopías convexas y definir  $H$  mediante la expresión:

$$H(X, \lambda) = \lambda F(X) + (1 - \lambda)G(X)$$

De esta manera, conforme  $\lambda$  varía continuamente de 0 hasta 1, la función  $H$  permite que  $G$  se deforme de manera continua hasta convertirse en  $F$ .

¿Cómo este concepto nos puede ayudar para resolver el sistema no lineal  $F(X) = \vec{0}$ ? La idea es la siguiente: debemos partir de un sistema no lineal  $H(X, 0) = G(X) = \vec{0}$  del cual se conozca una solución  $\tilde{X}$ . A medida que “movemos continuamente”  $\lambda$  desde el valor 0 hasta el valor 1, y tomando como base de partida

la solución  $\tilde{X}$ , vamos resolviendo toda la familia de sistemas no lineales  $H(X, \lambda) = \vec{0}$  hasta encontrar finalmente la solución deseada  $X^*$  del sistema no lineal  $H(X, 1) = F(X) = \vec{0}$ .

¿Qué sistema  $G(X) = \vec{0}$  utilizar? Tenemos también muchas respuestas a esta pregunta, pero es típico definir para algún  $\tilde{X} \in \Omega$ :

$$G(X) = F(X) - F(\tilde{X})$$

Obviamente, debido a la manera en que se construyó la función  $G$ , es de observar que  $\tilde{X}$  es una solución del sistema  $G(X) = \vec{0}$ . Note

que el sistema  $H(X, \lambda) = \vec{0}$  define, bajo ciertas condiciones, una curva continua y diferenciable  $X = \psi(\lambda)$  en  $R^n$  con punto inicial en  $\tilde{X}$  cuando  $\lambda = 0$  y punto final en  $X^*$  cuando  $\lambda = 1$ . Es decir, se tiene la función:

$$\psi : [0, 1] \rightarrow R^n$$

$$\lambda \rightarrow X = \psi(\lambda)$$

La continuidad y la diferenciability son condiciones deseadas sobre la función  $X = \psi(\lambda)$  en todo su dominio. Consideremos las siguientes preguntas: ¿Cómo se puede garantizar que la curva  $X = \psi(\lambda)$  existe, es única y es de clase  $C^1$ ? ¿Cómo obtener la curva  $X = \psi(\lambda)$  numéricamente? ¿Qué garantía existe para que podamos afirmar que  $X^* = \psi(1)$  es una solución del sistema no

lineal  $H(X, 1) = F(X) = \vec{0}$ ? Para responder a estas preguntas necesitamos algunas definiciones y teoremas que se presentan a continuación.

**Definición 3.-** Sea  $H : U \subseteq R^n \times R \rightarrow R^n$  una función con  $U$  conjunto abierto. Suponga que existe un punto  $(X_0, \lambda_0) \in U$  tal que  $H(X_0, \lambda_0) = \vec{0}$ . Se dice que  $H(X, \lambda) = \vec{0}$  define a  $X$  como una función implícita de  $\lambda$  en un entorno de  $(X_0, \lambda_0)$  si existe un conjunto abierto  $V \subset R^n$  tal que  $X_0 \in V$ , un intervalo

abierto  $(\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho)$  con  $\rho > 0$  como radio tal que  $V \times (\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho) \subset U$ , y una única función  $\psi : (\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho) \rightarrow V$  tal que para todo  $\lambda \in (\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho)$  la función  $X = \psi(\lambda)$  es solución del problema  $H(X, \lambda) = \vec{0}$  (Es decir que  $H(\psi(\lambda), \lambda) = \vec{0}$ )

Según el concepto anterior, si se cumplen ciertas condiciones, se puede garantizar la existencia de la función  $X = \psi(\lambda)$  que define una curva en

$R^n$  con extremos en  $\tilde{X}$  con  $\lambda = 0$  y  $X^*$  con  $\lambda = 1$ . Si ahora enunciamos el conocido teorema de la función implícita aplicado a nuestra función  $H$ , dicho enunciado quedaría como se detalla a continuación.

**Teorema 1.-** Sea  $H : U \subset R^n \times R \rightarrow R^n$  una función de clase  $C^1(U)$  con  $U$  conjunto abierto. Si se tiene el punto  $(X_0, \lambda_0) \in U$  tal que  $H(X_0, \lambda_0) = \vec{0}$ , y además  $H_X(X_0, \lambda_0)$  es una matriz inversible, entonces la ecuación  $H(X, \lambda) = \vec{0}$  define implícitamente la función  $X = \psi(\lambda)$  en un entorno abierto del punto  $(X_0, \lambda_0)$ . Además,  $\psi$  es también una función de clase  $C^1$  en algún intervalo alrededor de  $\lambda_0$  y es única.

Este teorema es muy importante porque proporciona condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la curva  $X = \psi(\lambda)$  en el intervalo  $\lambda \in [0, 1]$ . No sólo eso, también garantiza que  $X = \psi(\lambda)$  es de clase  $C^1[0, 1]$ . Dependiendo del problema a resolver, puede ocurrir que  $U = R^n \times R$ . Lo importante es que el dominio de la función  $H$  de donde se considera la existencia, unicidad, continuidad y diferenciabilidad continua de  $X = \psi(\lambda)$  contenga al conjunto  $\Omega \times [0, 1]$  de nuestro interés. Dependiendo del problema, podría no ocurrir esto. Es importante entonces estudiar cómo se comporta la curva para el problema en particular que se desea resolver. La curva podría no llegar a alcanzar el punto para el cual  $\lambda = 1$  o podría recorrer una distancia

“infinita” desde  $\lambda = 0$  hasta  $\lambda = 1$  debido a su longitud no finita.

Procedemos ahora a enunciar el teorema de la función inversa para funciones de un subconjunto de  $R^n$  en  $R^n$ . Este teorema es de gran utilidad para discutir una proposición que se enunciará y demostrará más adelante.

**Teorema 2.-** Sea  $F : U \subseteq R^n \rightarrow R^n$  una función de clase  $C^1$ . Sea  $X_0 \in U$  tal que  $F'(X_0)$  es inversible y  $F(X_0) = Y_0$ . Entonces, existen conjuntos abiertos  $V$  y  $W$  tales que  $X_0 \in V$ ,  $Y_0 \in W$  y  $F : V \rightarrow W$  es una función biyectiva. Por lo tanto la función inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$  existe y es también de clase  $C^1$ . Además, ocurre que:  $(F^{-1})'(Y_0) = [F'(X_0)]^{-1}$

**Definición 4.-** Se dice que la función  $F : R^n \rightarrow R^n$  es un homeomorfismo si se cumple que  $F$  es una función biyectiva continua con función inversa  $F^{-1}$  también continua.

### 3. EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

A continuación se va a enunciar y a demostrar formalmente un teorema que justifica el plantear, como problema equivalente de un sistema no lineal de ecuaciones, un problema de valor inicial. Este teorema nos permite tomar la solución del problema de valor inicial como una solución del sistema de ecuaciones no lineales.

**Teorema 3.-** Sea  $H(X, \lambda)$  una función de clase  $C^1$  y la matriz Jacobiana  $H_X(X, \lambda)$  inversible. Suponga también que  $X = \psi(\lambda)$  es una función de clase  $C^1[0, 1]$ . La función  $X = \psi(\lambda)$  es una solución de la ecuación  $H(X, \lambda) = \vec{0}$  para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ , si y sólo si,  $X = \psi(\lambda)$  es una solución del problema de valor inicial  $X'(λ) = -[H_X(X, λ)]^{-1} H_λ(X, λ)$  con  $H(X(0), 0) = \vec{0}$  y además  $\lambda \in [0, 1]$

**Demo**  
Primera Parte: Supongamos que la función  $X = \psi(\lambda)$  satisface la ecuación

$H(X, \lambda) = \vec{0}$  para todo  $\lambda \in [0,1]$  y defínase la función  $\phi(\lambda) = H(X = \psi(\lambda), \lambda)$ . Podemos derivar entonces aplicando la regla de la cadena, respecto de la variable  $\lambda$ , ambos lados de la ecuación:  $\phi(\lambda) = H(X = \psi(\lambda), \lambda) = \vec{0}$

Entonces:

$$\phi'(\lambda) = H_X(X = \psi(\lambda), \lambda) \psi'(\lambda) + H_\lambda(X = \psi(\lambda), \lambda) = \vec{0}$$

Al despejar  $\psi'(\lambda)$  de la ecuación anterior, suponiendo que  $H_X(X, \lambda)$  tiene inversa, tenemos:

$$\psi'(\lambda) = -[H_X(X = \psi(\lambda), \lambda)]^{-1} H_\lambda(X = \psi(\lambda), \lambda)$$

El  $X$  que satisface la condición inicial

$$H(X(0), 0) = \vec{0}$$

$$H(X(0), 0) = G(X) = \vec{0}, \quad \text{es decir,}$$

$$\tilde{X} = \psi(0)$$

Segunda Parte: Lo que debemos probar ahora es que  $X = \psi(\lambda)$  satisface la ecuación

$$H(X, \lambda) = \vec{0} \quad \text{para todo } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \text{suponiendo que se cumple}$$

$$\psi'(\lambda) = -[H_X(\psi(\lambda), \lambda)]^{-1} H_\lambda(\psi(\lambda), \lambda)$$

$$\text{con } \psi(0) = \tilde{X} \text{ y } \lambda \in [0,1].$$

Entonces:

$$[H_X(\psi(\lambda), \lambda)] \psi'(\lambda) = -H_\lambda(\psi(\lambda), \lambda)$$

Luego:

$$[H_X(\psi(\lambda), \lambda)] \psi'(\lambda) + H_\lambda(\psi(\lambda), \lambda) = \vec{0}$$

$$\text{Después: } \frac{d}{d\lambda} [H(X = \psi(\lambda), \lambda)] = \vec{0}$$

Se concluye entonces que

$$H(X = \psi(\lambda), \lambda) = \vec{C} \quad \text{donde } \vec{C} \text{ es un vector constante de } R^n \text{ para todo } 0 \leq \lambda \leq 1. \text{ Pero por}$$

la condición inicial  $H(X(0), 0) = \vec{0}$ , el vector

constante  $\vec{C}$  es el vector nulo  $\vec{0}$ . Por lo tanto

$$H(X = \psi(\lambda), \lambda) = \vec{0} \quad \text{para todo } \lambda \in [0,1].$$

Otra demostración para esta segunda parte de la prueba es la siguiente: Apliquemos el teorema del valor medio a la función vectorial  $\phi(\lambda) = H(X = \psi(\lambda), \lambda)$ . Debido a que  $\phi$  es

una función vectorial de clase  $C^1$  en el intervalo  $[0,1]$ , se procede a fijar un  $\lambda$  en el intervalo  $(0,1]$  y aplicamos el teorema del valor medio para

funciones vectoriales en el intervalo  $[0, \lambda]$  donde obviamente la función vectorial  $\phi$  es también de clase  $C^1$ . Entonces, tendríamos

$$\|\phi(\lambda) - \phi(0)\| \leq (\lambda - 0) \|\phi'(t)\|$$

para algún  $t$  entre 0 y  $\lambda$ . Pero por la hipótesis que  $X = \psi(\lambda)$  satisface la ecuación diferencial para todo  $\lambda$  entre 0 y 1 se tiene que

$$\phi'(t) = H_X(X = \psi(t), t) \psi'(t) + H_\lambda(X = \psi(t), t) = \vec{0}$$

para cualquier  $t$  entre 0 y  $\lambda$ . Además, de la condición inicial tenemos

$$H(X = \psi(0), 0) = \vec{0} = \phi(0). \quad \text{Entonces:}$$

$$\|\phi(\lambda)\| \leq (\lambda - 0) \|\phi'(t)\| = 0$$

Se puede concluir de la última expresión que

$$\phi(\lambda) = \vec{0}, \quad \text{pero } \phi(\lambda) = H(X = \psi(\lambda), \lambda).$$

Por lo tanto  $H(X = \psi(\lambda), \lambda) = \vec{0}$  para  $\lambda \in [0,1]$ .

Con la definición de

$$G(X) = F(X) - F(\tilde{X}), \quad \text{la ecuación para la}$$

función  $H(X, \lambda)$  es la siguiente:

$$H(X, \lambda) = \lambda F(X) + (1 - \lambda) G(X) = \vec{0}$$

$$H(X, \lambda) = \lambda F(X) + (1 - \lambda) \left[ F(X) - F(\tilde{X}) \right] = \vec{0}$$

$$H(X, \lambda) = F(X) + (\lambda - 1) F(\tilde{X}) = \vec{0}$$

Entonces, la ecuación que define implícitamente a la curva  $X = \psi(\lambda)$  es:

$$F(X) = (1 - \lambda) F(\tilde{X})$$

Al derivar ambos lados de la ecuación anterior respecto de  $\lambda$ , aplicando regla de la cadena y suponiendo que el Jacobiano de  $F(X)$  es no singular, para obtener el problema de valor inicial equivalente al sistema no lineal, tenemos

$F'(X)X'(\lambda) = -F\left(\tilde{X}\right)$ , de donde la ecuación diferencial es  $X'(\lambda) = -[F'(X)]^{-1}F\left(\tilde{X}\right)$  con dato inicial  $X(0) = \tilde{X}$ .

*Teorema 4.-* Sea  $F: R^n \rightarrow R^n$  una función de clase  $C^1$ . Suponga que el Jacobiano  $F'$  es no singular para todo  $X \in R^n$  y que  $F$  es un homeomorfismo. Entonces, para cualquier  $\tilde{X} \in R^n$  existe una única función  $X(\lambda): [0,1] \rightarrow R^n$  de clase  $C^1[0,1]$  tal que  $F(X) = (1-\lambda)F\left(\tilde{X}\right)$ . Además, ocurre que  $X'(\lambda) = -[F'(X)]^{-1}F\left(\tilde{X}\right)$  para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  y  $X(0) = \tilde{X}$ .

#### Demostración

Recordar que de la ecuación  $H(X, \lambda) = \lambda F(X) + (1-\lambda) \left[ F(X) - F\left(\tilde{X}\right) \right] = 0$  se obtiene que  $F(X) = (1-\lambda)F\left(\tilde{X}\right)$ . Pero por hipótesis  $F$  es un homeomorfismo y por ende  $F^{-1}$  existe y es continua. Además, por el teorema de la función inversa  $F^{-1}$  es también de clase  $C^1$  ya que  $F$  es de clase  $C^1$  y  $F'$  es no singular para todo  $X \in R^n$ . Entonces, para cada  $\lambda \in [0,1]$  se tiene la solución única:

$$X(\lambda) = F^{-1} \left[ (1-\lambda)F\left(\tilde{X}\right) \right]$$

$$\text{Note que } X(0) = F^{-1} \left[ F\left(\tilde{X}\right) \right] = \tilde{X}$$

Finalmente, derivando ambos lados de la ecuación anterior respecto de  $\lambda$ , aplicando la regla de la cadena y haciendo uso también del teorema de la función inversa, tenemos:

$$\begin{aligned} X'(\lambda) &= D_\lambda F^{-1} \left[ (1-\lambda)F\left(\tilde{X}\right) \right] \\ &= (F^{-1})' \left[ (1-\lambda)F\left(\tilde{X}\right) \right] D_\lambda \left[ (1-\lambda)F\left(\tilde{X}\right) \right] \end{aligned}$$

$$X'(\lambda) = [F'(X)]^{-1} \left[ -F\left(\tilde{X}\right) \right]$$

$$X'(\lambda) = -[F'(X)]^{-1}F\left(\tilde{X}\right)$$

Por tanto se tiene la ecuación diferencial  $X'(\lambda) = -[F'(X)]^{-1}F\left(\tilde{X}\right)$  para todo

$0 \leq \lambda \leq 1$  con dato inicial  $X(0) = \tilde{X}$  con solución única de clase  $C^1[0,1]$

#### 4. EL MÉTODO NUMÉRICO

Existen muchos métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial, pero los métodos de Runge-Kutta son muy populares por su facilidad de implementación y por el orden de error local y global que presentan. Se usará entonces el método clásico de cuarto orden de Runge-Kutta para resolver el problema de valor inicial antes mencionado.

Sin embargo, suponga por un momento que se desea implementar el método de Euler que presenta un error local  $O(h^2)$  y un error global  $O(h)$ . La ecuación recursiva que resuelve el problema de valor inicial es:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i - h [F'(X_i)]^{-1} F(X_0); \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Recuerde que el método numérico discretiza el problema y la variable  $h = 1/n$  representa el tamaño de paso. El número de subintervalos en el cual es particionado el intervalo  $[0,1]$  es representado por la variable  $n$ . Además

$X_0 = X(0) = \tilde{X}$  y el valor de  $X_n$  es la estimación numérica de  $X(1) = X^*$ .

Si ahora introducimos una nueva variable independiente  $t$  y la relacionamos con la variable independiente  $\lambda$  de la ecuación diferencial

$$X'(\lambda) = -[F'(X)]^{-1}F\left(\tilde{X}\right)$$
 mediante la

ecuación  $t = -\ln(1-\lambda)$ , al hacer el cambio de variable tendríamos:

$$X'(\lambda) = X'(t) \cdot \frac{dt}{d\lambda} = X'(t) \cdot \frac{1}{1-\lambda} = -[F'(X)]^{-1}F\left(\tilde{X}\right)$$

Finalmente:

$$X'(t) = -(1-\lambda)[F'(X)]^{-1} F(\tilde{X})$$

Pero antes vimos que:  $F(X) = (1-\lambda)F(\tilde{X})$

Por lo tanto, la nueva ecuación diferencial ahora con  $t$  como variable independiente es:

$$X'(t) = -[F'(X)]^{-1} F(X)$$

Observe que si  $\lambda = 0$ , entonces  $t = 0$ . Además, si  $\lambda \rightarrow 1^-$ , entonces  $t \rightarrow +\infty$ . Por lo tanto, el nuevo problema de valor inicial equivalente a nuestro problema de valor inicial original es  $X'(t) = -[F'(X)]^{-1} F(X)$  para

$t \in [0, +\infty]$  con  $X(0) = \tilde{X}$ . Si ahora aplicamos el método de Euler con tamaño de paso  $h = 1$  tenemos la ecuación recursiva:

$$X_{i+1} = X_i - [F'(X_i)]^{-1} F(X_i);$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

Note que lo que se ha obtenido por tanto es el método iterativo convencional de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales que, bajo ciertas condiciones, converge a la solución deseada  $X^*$ . Es de observar que si vemos al método de Newton desde esta última perspectiva, se ha tomado un tamaño de paso que no es bueno, junto con el método de Euler cuya aproximación es pobre en comparación con la diversidad de métodos numéricos existentes para resolver ecuaciones diferenciales que presentan mejores estimaciones de los valores exactos.

El método de Runge-Kutta que usaremos presenta un error local  $O(h^5)$  y un error global  $O(h^4)$ . Al discretizar el problema con un tamaño de paso  $h = 1/n$ , donde  $n$  es el número de subintervalos, tenemos la ecuación recursiva:

$$X_{i+1} = X_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4);$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Las funciones  $K_i$  son:

$$K_1 = -[F'(X_i)]^{-1} F(\tilde{X})$$

$$K_2 = -\left[F'(X_i + \frac{h}{2}K_1)\right]^{-1} F(\tilde{X})$$

$$K_3 = -\left[F'(X_i + \frac{h}{2}K_2)\right]^{-1} F(\tilde{X})$$

$$K_4 = -[F'(X_i + hK_3)]^{-1} F(\tilde{X})$$

La estimación de  $X(1) = X^*$  es el valor de  $X_n$ . Se hicieron pruebas con sistemas no lineales de hasta 5 ecuaciones con 5 incógnitas con excelentes resultados que se muestran en la siguiente sección de este documento. Cabe indicar que la precisión obtenida además del tamaño de paso  $h$ , depende del valor inicial  $X(0) = X_0 = \tilde{X}$ .

### 5. SOLUCIÓN DE ALGUNOS SISTEMAS NO LINEALES

Como un primer ejemplo tomemos la función de variable real  $f(x) = x^3 - e^x \text{sen}(x)$  con derivada

$$f'(x) = 3x^2 - e^x [\text{sen}(x) + \cos(x)].$$

Luego tenemos  $H(x, \lambda) = x^3 - e^x \text{sen}(x) + (\lambda - 1)(x_0^3 - e^{x_0} \text{sen}(x_0))$  que

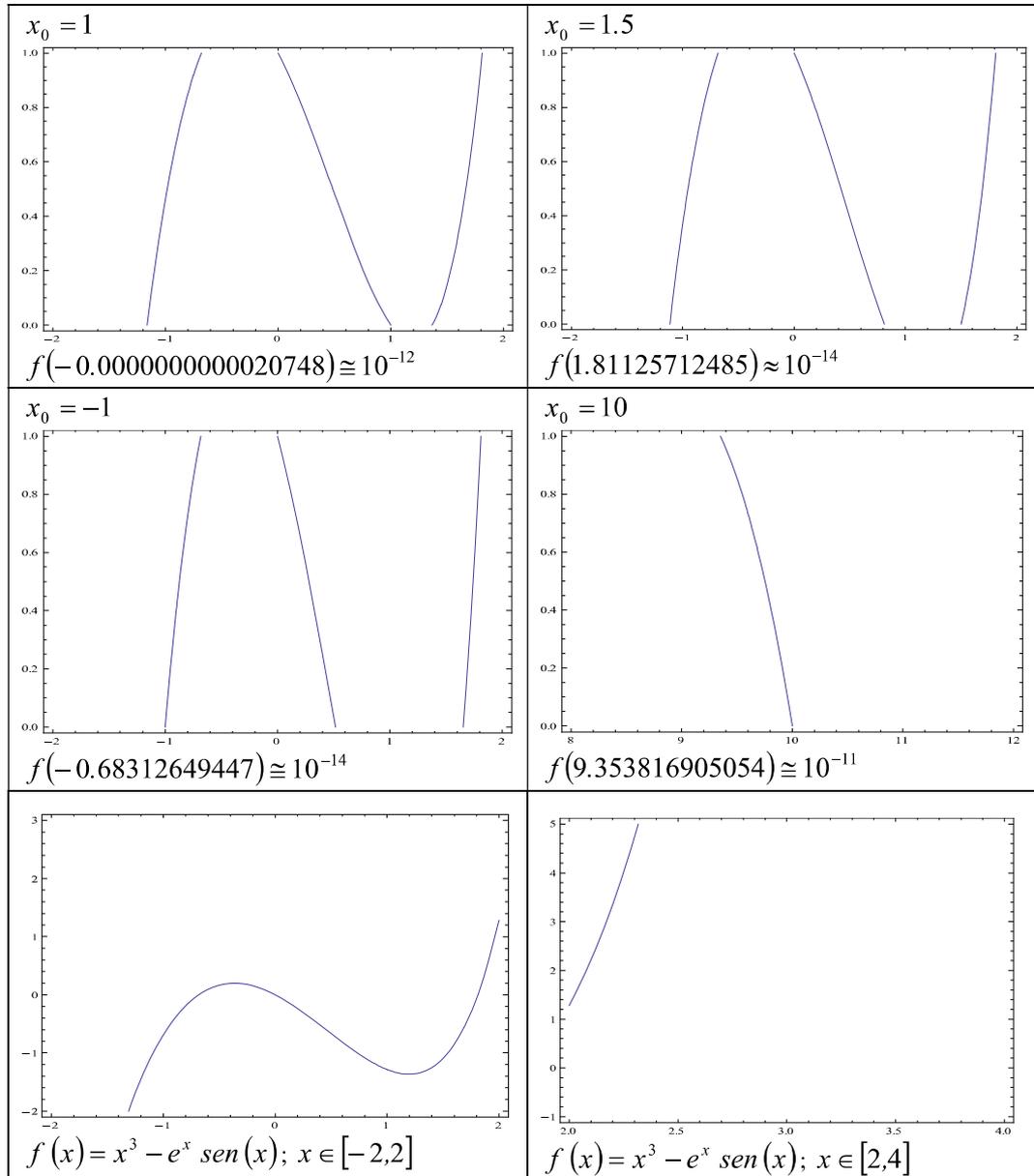
con  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Finalmente, el problema de valor inicial correspondiente es:

$$x'(\lambda) = \frac{e^{x_0} \text{sen}(x_0) - x_0^3}{3x^2 - e^x [\text{sen}(x) + \cos(x)]}$$
 para

todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  y  $x(0) = x_0$ .

A continuación, en la figura # 1, se muestra la curva de nivel  $H(x, \lambda) = 0$  en  $\mathbb{R}^2$  con distintos valores para  $x_0$ . Se incluyen los resultados obtenidos al ejecutar el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden en cada caso. También se incluye la gráfica de la función  $f(x) = x^3 - e^x \text{sen}(x)$  en distintos intervalos. El tamaño de paso  $h = 0.001$  se utilizó en todas las ejecuciones. En el eje horizontal hemos ubicado los valores que toma la variable  $x$ , mientras que los valores de la variable  $\lambda \in [0, 1]$  se encuentran en el eje vertical. Note que  $f$  tiene muchos "ceros".

**FIGURA 1**  
*Curvas de nivel de  $H$  y Gráfico de  $f$*   
**Homotopía y continuación numérica en sistemas no lineales**



Como un segundo ejemplo, veamos lo que ocurre con el sistema no lineal:

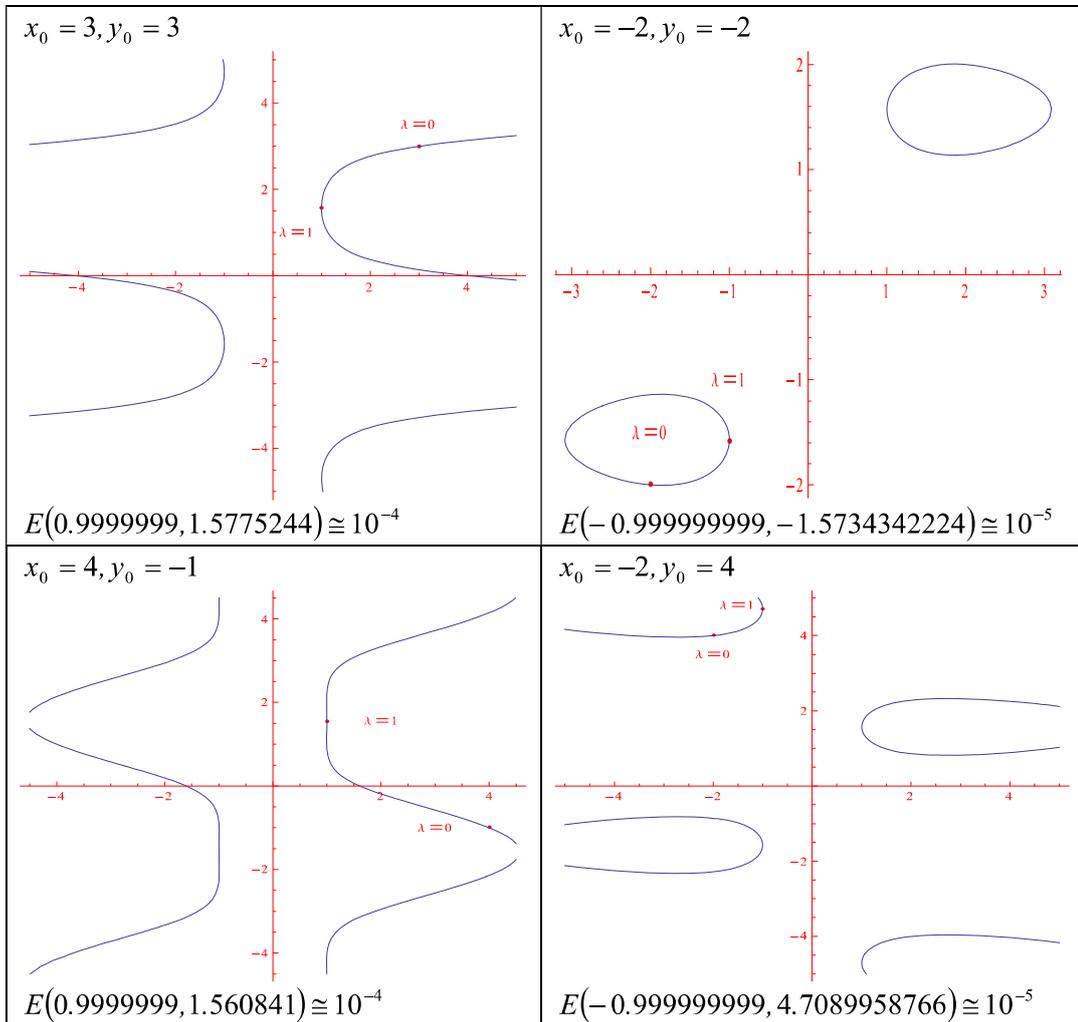
$$\begin{cases} x \text{sen}(y) - 1 = 0 \\ x^2 + \cos(2y) = 0 \end{cases}$$

Recuerde que el valor de  $X_n$  que entrega el método de Runge-Kutta es la estimación del valor exacto  $X^*$ . De aquí en adelante usaremos la siguiente expresión para calcular el error:

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n |f_i(X_n)| \text{ donde las } f_i \text{ son las}$$

funciones componentes del sistema no lineal. Los valores de la variable  $x$  se encuentran en el eje horizontal, los valores de la variable  $y$  en el eje vertical. Se utilizó  $h = 0.001$  como tamaño de paso. En la figura # 2 se muestra, para cada corrida, la trayectoria homotópica de las soluciones.

**FIGURA 2**  
*Trayectoria de las Soluciones Segundo Ejemplo*  
**Homotopía y continuación numérica en sistemas no lineales**



Otro ejemplo es el siguiente sistema no lineal:

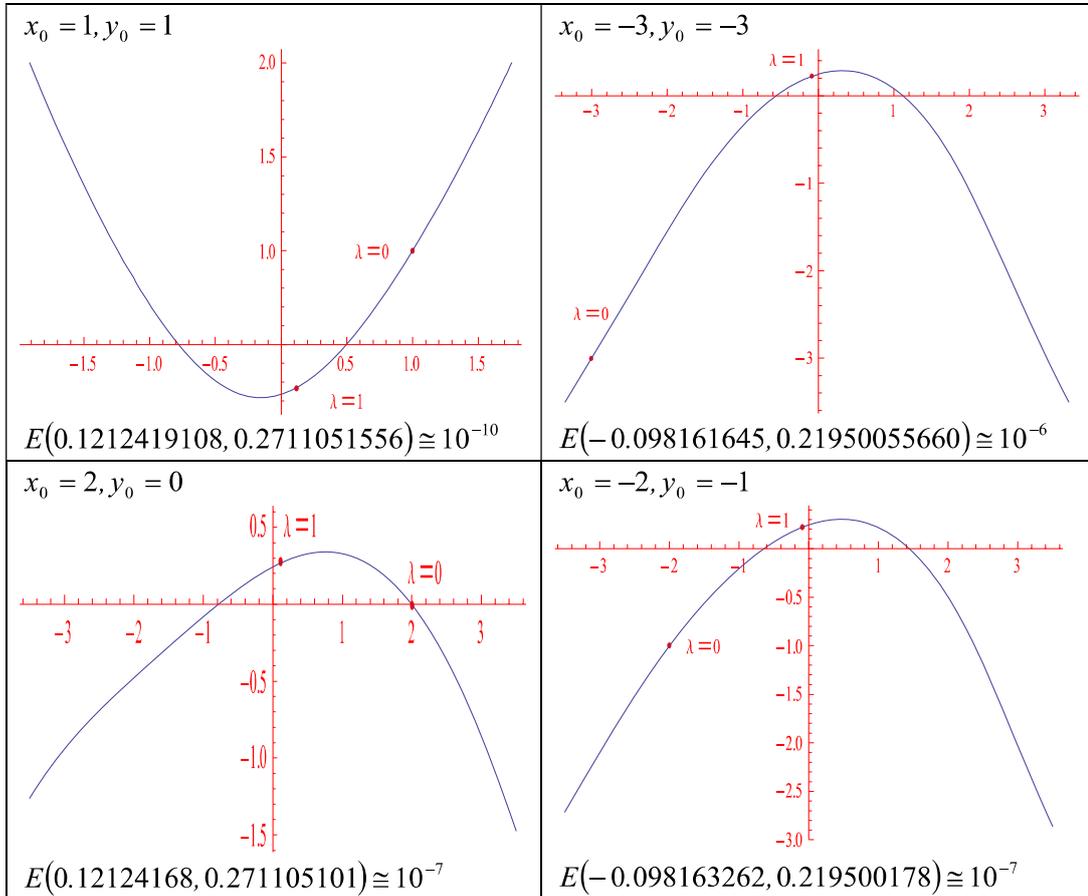
$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 0 \\ 4y - \text{sen}(x) - \cos(y) = 0 \end{cases}$$

También con  $h = 0.001$  como tamaño de paso, se ejecutó el método numérico con distintos

valores iniciales  $(x_0, y_0)$ . En la figura # 3 se muestra, para cada ejecución, la trayectoria homotópica de las soluciones de cada uno de los sistemas no lineales que se van resolviendo desde

$\lambda = 0$  hasta  $\lambda = 1$ .

**FIGURA 3**  
*Trayectoria de las Soluciones Tercer Ejemplo*  
**Homotopía y continuación numérica en sistemas no lineales**



Consideremos ahora el sistema no lineal:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + x y - 3 = 0 \\ x e^{x+y} + y z - 3 = 0 \\ \text{sen}(x+z) + x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Con el mismo tamaño de paso  $h = 0.001$  usado en los ejemplos anteriores, se muestran los resultados de dos ejecuciones del método numérico para este cuarto ejemplo.

**TABLA I**  
*Resultado de dos ejecuciones del método numérico con  $h = 0.001$*   
**Homotopía y continuación numérica en sistemas no lineales**

$x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ $x_n = 0.3885222610700$ $y_n = 1.0345501950139$ $z_n = 1.341346675089$ $E(x_n, y_n, z_n) \cong 10^{-13}$	$x_0 = 4, y_0 = -2, z_0 = 7$ $x_n = 3.039247388237$ $y_n = -1.610482827797$ $z_n = 6.013364389595$ $E(x_n, y_n, z_n) \cong 10^{-13}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Finalmente, tenemos el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + \cos(z) - w^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 + \sin^2(z) - w^2 = 0 \\ -2x^2 - y^2 - \cos(z) + w^2 = 0 \\ -x^2 - y^2 - 2\cos^2(z) + w^2 = 0 \end{cases}$$

Se muestran también un par de ejecuciones de este sistema con  $h = 0.00001$  como tamaño de paso.

**TABLA II**

*Resultado de dos ejecuciones del método numérico con  $h = 0.00001$*

**Homotopía y continuación numérica en sistemas no lineales**

$x_0 = 3, y_0 = 3, z_0 = 3, w_0 = 3$	$x_0 = -2, y_0 = -2, z_0 = -2, w_0 = -2$
$x_n = 0.998525959$	$x_n = -0.9989511610$
$y_n = 0.998525959$	$y_n = -0.9989511610$
$z_n = 0.0456785223$	$z_n = -0.0385347375$
$w_n = 1.9975435860$	$w_n = -1.9982520966$
$E(x_n, y_n, z_n) \cong 10^{-4}$	$E(x_n, y_n, z_n) \cong 10^{-4}$

Cabe mencionar que todos los ejemplos que se mencionan en este documento fueron tomados de [4]. Se realizaron pruebas con sistemas de hasta cinco ecuaciones con cinco incógnitas y con otros sistemas no lineales de menor tamaño, que no se muestran en este documento. En todos ellos se trabajó con  $h = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  como tamaño de paso.

**6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

Los métodos numéricos iterativos convencionales, como los métodos de Newton, para resolver sistemas no lineales, siempre deben ser la primera opción cuando se tiene algún tipo de sospecha de dónde se encuentra alguna solución, por su precisión y rápida convergencia, siempre que las funciones que componen el sistema cumplan con las hipótesis de algún teorema de convergencia. Caso contrario, el método de la homotopía y la continuación numérica es una opción válida para resolver sistemas no lineales. Algo positivo de este método es que permite ampliar el intervalo de convergencia, tal como lo hacen los algoritmos metaheurísticos para resolver sistemas no lineales. Si la solución encontrada al resolver la ecuación

diferencial no cumple con algún criterio de precisión requerido, podría tomarse la salida del método homotópico como el “dato inicial” que se necesita en algún método iterativo convencional para tener una mejor estimación de la solución del sistema no lineal. Es decir, ambos tipos de métodos pueden trabajar de forma conjunta para finalmente resolver el sistema no lineal. Cuando se plantea el problema de valor inicial equivalente al sistema no lineal se debe tener cuidado con el

valor  $\tilde{X}$  con el que se desea iniciar el trabajo iterativo porque no necesariamente se va a tener convergencia. Es importante, dependiendo del problema, analizar la curva  $X = \psi(\lambda)$  para, según el dato inicial escogido, estudiar si existe  $\psi(1)$  y si efectivamente este valor está estimando bien alguna solución del sistema no lineal. En [5] se dan sugerencias de cómo escoger el dato inicial analizando regiones de convergencia. El método numérico usado para resolver el problema de valor inicial es de un paso, podrían implementarse métodos mutipaso y hacer un estudio comparativo de los resultados.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS**

- [1]. **ORTEGA Y RHEINBOLDT** (2001). “*Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*”, SIAM’s Classics in Applied Mathematics, Chapters 5, 7, 10
- [2]. **ALLGOWER Y GEORG** (1990). “*Introduction to Numerical Continuation Methods*”, Colorado State University
- [3]. **HAIRER, NORSETT Y WANNER** (2008). “*Solving Ordinary Differential Equations I*”, Springer Series in Computational Mathematics Chapters 1, 2.
- [4]. **MARTÍN** (2013). “*Sistemas No Lineales y la Metaheurística Scatter Search*”, Revista Matemática Volumen 11, Número 1 Páginas 24 – 33. ESPOL, Guayaquil – Ecuador.
- [5]. **LEE Y CHIANG** (2001). “*Convergent Regions of the Newton Homotopy Method for Nonlinear Systems: Theory and Computational Applications*”, IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 48, No. 1.