Matemática: Una publicación del FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 2

SOBRE LA PARADOJA DE EINSTEIN – PODOLSKY – ROSEN

Rivadeneira Eduardo[1], **Iza Peter**[2]

Resumen. *En este trabajo se analiza brevemente el artículo presentado por Einstein, Podolsky y Rosen en 1935, a partir del cual se generó una serie de discusiones científicas, posteriormente en esa época. Se utiliza un lenguaje común para describir el artículo original.*

Palabras Claves: Realidad Física, Operador, Función de Estado.

Abstract. *Einstein, Podolsky and Rosen's paper presented in 1935 is briefly discusses in this work, from which a series of scientific discussions were generated subsequently at that time. A simple language is used to describe the original paper.*

Keywords: Physical Reality, Operator, Statefunction.

Recibido: Agosto2014.
Aceptado: Septiembre 2014.

1. INTRODUCCIÓN

Einstein, Podolsky y Rosen redactaron el artículo "Can Quantum – Mechanical description of physical reality be considered complete?"[1], el cual fue publicado en mayo de 1935. Para esta fecha, la 'Interpretación de Copenhague' era aceptada en la comunidad científica; la misma fue objetada por Einstein en la conferencia de Solvay de 1927. A Einstein le incomodaba el carácter estadístico de esta teoría, además que no era capaz de describir la realidad física, independientemente de que se use un recurso experimental o no. Finalmente, esta teoría era indeterminista, lo cual iba en contra de la escuela clásica. Einstein la venía madurando esta idea desde la conferencia de Solvay de 1930 y tenía como objetivo evidenciar que la descripción mecánico - cuántica de la realidad física no era completa y por tanto inadecuada como teoría "final" de la Física teórica. En el artículo se reconoce implícitamente la corrección de la mecánica cuántica como teoría física. Los autores de una manera astuta, utilizan el aparato matemático de la mecánica cuántica para probar su afirmación.
En la mecánica clásica, las variables observables como la posición o velocidad de partículas en un sistema se pueden determinar utilizando la segunda Ley de Newton o la función de Hamilton, estas variables tienen valores precisos, bien definidos en cada instante; y además, siempre es posible medir dichos valores sin perturbar apreciablemente el sistema.
En 1925 Werner Heisenberg basado fundamentalmente en una mecánica de matrices; resuelve algunos de los inconvenientes que presentó el modelo atómico de Bohr y gracias a esto estableció el "Principio de Incertidumbre de Heisenberg", el cual menciona que no se puede determinar con exactitud la posición y la cantidad de movimiento de una partícula en un determinado instante [2].

2. FUNCIÓN DE ESTADO Y OPERADORES

La función ψ representa el estado de un sistema cuántico, mientras que el operador A representa a una magnitud física medible que puede ser la energía, momento o momento angular orbital.
Si ψ es una función propia del operador A [3],

$$A\psi = a\psi \qquad (1)$$

entonces el operador A tiene con certeza el valor a siempre que la partícula, con un solo grado de libertad, esté en el estado dado por ψ. En este caso a es un número real o imaginario.

[1] *Rivadeneira Molina Eduardo, M.Sc., Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: erivaden@espol.edu.ec).*
[2] *Iza Peter, Ph.D., Director y Profesor, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: piza@espol.edu.ec).*

Consideremos la función de estado

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x} \qquad (2)$$

donde h representa a la constante de Planck, p_0 es un número constante y x es la variable independiente. El operador momento de la partícula es

$$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x \quad (3)$$

Aplicando el operador (3) a la función de estado (2) se tiene:

$$p\psi = (h/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi \qquad (4)$$

Así es como el momento tiene con certeza el valor propio p_0. Entonces tiene sentido decir que el momento de la partícula, en un estado dado por la ecuación (2), es real. Por el contrario, si la ecuación (1) no es válida, ya no se puede decir que la magnitud física A tiene un valor concreto. Este es el caso, por ejemplo, de la coordenada x de la partícula, en donde el operador correspondiente a esta coordenada es q, así:

$$q\psi = x\psi \neq a\psi \qquad (5)$$

Basados en la teoría clásica de la mecánica cuántica, la probabilidad relativa de que una medida de la coordenada dé un resultado comprendido entre a y b es:

$$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\,\psi dx = \int_a^b dx = b - a \qquad (6)$$

Puesto que la probabilidad es independiente de a, y solo depende de la diferencia $b - a$, vemos que todos los valores de la coordenada son igualmente probables.

Para una partícula en el estado dado por la ecuación (2) no es predecible un valor definido de la coordenada, que solo puede obtenerse por medida directa. Sin embargo, dicha medida perturba a la partícula y con ello altera su estado. Una vez que la coordenada haya sido determinada, la partícula ya no estará en el estado dado por la ecuación (2). La conclusión habitual de esto en mecánica cuántica es que cuando el momento de una partícula es conocido, su coordenada no tiene realidad física.

Considerando la no conmutación de operadores o de las magnitudes físicas A y B, ($AB \neq BA$) se concluye lo siguiente: o bien (i) la descripción mecánico-cuántica de la realidad dada por la función de onda no es completa, o bien (ii) cuando los operadores correspondientes a dos magnitudes físicas no conmutan, las dos magnitudes no pueden tener realidad simultánea.

3. EL EXPERIMENTO PENSADO

Los autores ponen en consideración dos sistemas, I y II, a los que se les permite interaccionar desde el instante $t = 0$ hasta $t = T$, después de lo cual se supone que ya no hay ninguna interacción entre las dos partes. Suponen además, que los estados de los dos sistemas antes de $t = 0$ eran conocidos. Con la ayuda de la ecuación de Schrödinger se puede calcular el estado del sistema combinado I + II en cualquier instante posterior; en particular, para cualquier $t > T$.

Reducción del paquete de ondas. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots$ los valores propios de cierta magnitud física A perteneciente al sistema I y sean $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \ldots$ las correspondientes funciones propias, donde x_1 representa las variables utilizadas para describir el primer sistema. Sea Ψ una función de x_1, puede expresarse como:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)u_n(x_1) \qquad (7)$$

donde x_2 representa las variables utilizadas para describir el segundo sistema y $\psi_n(x_2)$ son los coeficientes del desarrollo de Ψ en serie de las funciones ortogonales $u_n(x_1)$. Se supone que se mide la magnitud A y se encuentra que tiene el valor a_k, entonces se concluye que después de la medida, el primer sistema ha quedado en el estado dado por la función de onda $u_k(x_1)$ y que el segundo sistema ha quedado en el estado dado por la función de onda $\psi_k(x_2)$. El paquete de ondas dado por la serie infinita (7) se reduce a un único término $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$ y el conjunto de funciones $u_n(x_1)$ está determinado por la elección de la magnitud física A.

Si, en lugar de esto, se hubiera escogido otra magnitud, por ejemplo: B, que tiene los valores propios $b_1, b_2, b_3, \ldots$ y funciones propias $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \ldots$ se debería obtener, en lugar de (7),

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1) \qquad (8)$$

Donde los φ_s son los nuevos coeficientes. Si ahora se mide la magnitud B y se encuentra que tiene el valor b_r, se concluye que después de la medida, el primer sistema ha quedado en el estado dado por $v_r(x_1)$ y el segundo sistema ha quedado en el estado dado por $\varphi_r(x_2)$.

ASÍ PUES, ES POSIBLE ASIGNAR DOS FUNCIONES DE ONDA DIFERENTES (EN ESTE EJEMPLO ψ_k Y φ_r) A LA MISMA REALIDAD.
Ahora bien, puede suceder que las dos funciones de onda, ψ_k y φ_r, sean funciones propias de dos operadores no conmutantes correspondientes a ciertas magnitudes físicas *P* y *Q*, respectivamente. Los autores proponen un ejemplo para mostrar esto. Suponen que dos sistemas son dos partículas, y que

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \qquad (9)$$

donde x_0 es una constante. Sea *A* el momento de la primera partícula; entonces, como hemos visto en (4), sus funciones propias serán:

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1} \qquad (10)$$

correspondientes al valor propio *p*. Considerando que tenemos aquí el caso de un espectro continuo, la ecuación (7) se escribirá ahora

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp \qquad (11)$$

Donde, $\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}$ (12)

Esta función ψ_p, sin embargo, es la función propia del operador

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2 \qquad (13)$$

Que corresponde al valor propio $-p$ del momento de la segunda partícula. Por otra parte, si *B* es la coordenada de la primera partícula, tiene como funciones propias

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \qquad (14)$$

Correspondiente al valor propio *x*.

En este caso la ecuación (8) se convierte en:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1)\, dx \qquad (15)$$

Donde

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp$$

$$= h\delta(x - x_2 + x_0) \qquad (16)$$

(Aquí se ha usado: $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk$)

Esta φ_x, sin embargo, es la función propia del operador

$$Q = x_2 \qquad (17)$$

Que corresponde al valor propio $x + x_0$ de la coordenada de la segunda partícula.

Puesto que: $PQ - QP = h/2\pi i$ (18)

se demuestra que es posible, en general, que ψ_k y φ_r sean funciones propias de dos operadores no conmutables, correspondientes a magnitudes físicas.
Niels Bohr decía en su trabajo [4], refiriéndose al argumento de la EPR, lo siguiente: sin embargo, semejante argumentación difícilmente parecería adecuada para poner en duda la validez de la descripción mecánico-cuántica, que está basada en un formalismo matemático coherente que cubre automáticamente cualquier procedimiento de medida como el indicado.

4. LAS CONSECUENCIAS DE LA EPR

1. La formulación y desarrollo de la Teoría de Variables Ocultas de la Mecánica Cuántica por David Bohm, que hace posible la puesta en práctica una prueba experimental para determinar la veracidad de la EPR [5, 6].
2. La incorporación del concepto Einsteniano de interacción local, en oposición al de acción a distancia, como uno de los pilares fundamentales en la exitosa Teoría Cuántica del Campo [7, 8].
3. Poner en evidencia que un Modelo Matemático de la naturaleza, siempre puede ser mejorado, si se hacen los cuestionamientos correctos.

5. CONCLUSIÓN

Por lo tanto, para dos funciones de onda distintas se demuestra que es posible, en general, encontrar dos funciones propias de dos operadores no conmutables, correspondientes a magnitudes físicas. Así es como los autores llegan a esta importante conclusión de que la descripción mecánico-cuántica de la realidad física no es completa. El historiador de la ciencia, Helge Kragh, cuenta en su libro Generaciones Cuánticas, que este documento fue recibido con indiferencia por los físicos contemporáneos. Salvo Niels Bohr, nadie estaba interesado en estas cuestiones epistemológicas. Einstein muere en el año 1955. Las personas mueren, las ideas no. La EPR será retomada por físicos brillantes que harán posible que se convierta en uno de los referentes cuando se trata de cuestionar lo que todos aceptan como una verdad consagrada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. Einstein, A., Podolsky, B, Rosen, N. (1935) Physical Review, volumen 47, pag. 777-780.

[2]. Espinoza, M., Iza, P. (2011) Revista Investigación y Desarrollo, número 18, pág. 11-16.

[3]. Iza, P. (2012) Revista Matemática, Vol. 10, No. 1, ESPOL.

[4]. Los sueños de los que está hecha la materia, Stephen Hawking, Pág. 583-595, ¿Puede considerarse completa la descrcripción Mecánico-Cuantica de la realidad Física?, Niels Bohr, Editorial Crítica, Barcelona, 2011.

[5]. David Bohm A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II Phys. Rev. 85, 180 – Published 15 January 1952.

[6]. Bell, John. On the Einstein–Poldolsky–Rosen paradox, Physics 1 3, 195-200, Nov. 1964.

[7]. David Tong, Quantum Field Theory, University of Cambrige, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html.

[8]. Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.