

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS DE ORDEN FRACCIONARIO

Bustamante Johni¹

Resumen. Avanzando con la investigación, ahora presento nuevos resultados de las propiedades principales que satisfacen las derivadas de orden fraccionario. La generalización es tal que existen funciones en las cuales se puede generalizar incluso para ordenes negativos los mismos que tiene un carácter de integración. A este trabajo se incorpora cálculos realizados con el software << Mathematica >>, por cuanto estos cálculos manuales no resultan sencillos, aquí incluyo solo calculo manuales para casos no muy complejos.

Palabras Claves: Derivada, orden de la derivada, orden fraccionario, orden negativo, binomio de Newton, coeficientes del binomio de Newton, p-derivada, derivada del producto de funciones.

Abstract: Advancing research, now present new results that satisfy the main properties of fractional order derivative. Generalization is such that there are functions which can be generalized even order negatives thereof having character integration. Calculations are performed in this work with the software << Mathematica >>, because these are not simple hand calculations, here included not only manual calculation incorporates complex cases.

Keyword: Derivative, the derivative order, fractional order, negative order, binomial Newton binomial coefficients Newton, p-derived, product derived functions.

Recibido: Agosto 2014.

Aceptado: Septiembre 2014.

1. INTRODUCCIÓN

En artículos anteriores [1] hemos revisado la derivada de orden fraccionario, y en este trabajo nos enfocaremos específicamente en propiedades que presentan dichas derivadas y la forma de calcularlas, con mayor énfasis a la propiedad "Derivada del producto de funciones". En este trabajo se realiza el cálculo manual de la derivada de orden p y también se verifica usando el cálculo computacional con el software Wolfram.

2. DEFINICIÓN DE P-DERIVADA (DERIVADA DE ORDEN FRACCIONARIO P)

Recordaremos que la derivada de orden fraccionario se definió en artículos anteriores. Ahora solo la recordaremos:

Definición.- Sea $f(x)$, una función definida en $\mathbb{R}$ tales que existe el límite (1) y dicho límite lo llamamos "derivada p -orden de f ".

$$f(x)^{(p)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} f(x - hk)}{h^p}$$

3. PROPIEDAD DE ADICIÓN DE ORDEN DE P-DERIVADA

1.- Se define para cualquier valor $p \in \mathbb{Q}^+$ principalmente para valores p tales que $0 \leq p \leq 1$,

2.- Si $1 \leq p \leq 2$, entonces p se puede expresar como $p=1+q$ donde $0 \leq q \leq 1$, por tanto:

$$f(x)^{(p)} = f(x)^{(q+1)} = (f(x)^{(1)})^{(q)}, *$$

* Los exponentes entre paréntesis representan orden de la derivada.

3.- La propiedad (2) viene de la siguiente propiedad general:

Para $\forall n \in \mathbb{N}$, Si $n \leq p \leq n+1$, entonces p se puede expresar como $p=n+q$ donde $0 \leq q \leq 1$, por tanto:

$$f(x)^{(p)} = f(x)^{(n+q)} = (f(x)^{(n)})^{(q)},$$

4.- Una propiedad más general aun es:

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}^+, f(x)^{(p+q)} = (f(x)^{(p)})^{(q)} *$$

* Para ciertas funciones el orden de la derivada puede ser negativo.

5.- Observamos que $(f(x)^{(p)})^{(q)}$ significa que: Primero se obtiene la derivada de orden p , esto es: $f(x)^{(p)}$, y luego de este resultado se obtiene la derivada de orden q .

Ahora calcularemos algunas derivadas de orden fraccionario:

1	2	3	4	5
$f(x)$ $= \sin(x)$	$f(x)$ $= \cos(x)$	$f(x)$ $= x\sin(x)$	$f(x)$ $= x\cos(x)$	$f(x)$ $= x^2\sin(x)$

¹ Bustamante Johni, Ph.D. (c), Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). (Email: jobustam@espol.edu.ec).

Figura 1
Algunas propiedades de las derivadas de orden fraccionario
Cálculo de la función $x\cos(x)$

En el recuadro anterior podemos escoger la función la derivada de orden fraccionario (desde el archivo en formato de documento computable CDF), los cálculos manuales son un poco complejos, pero con el utilitario <<Wolfram-Mathematica>> estos cálculos se realizan en forma rápida.

Podemos hacer por ejemplo las siguientes manipulaciones:

Escoger $f(x)=\cos(x)$ y calcular su derivada de orden $3/4$ obtenemos:

$f(x) =$	$\cos[x]$
$p =$	$\frac{3}{4}$
$Df[x, p] =$	$\sin\left[\frac{1}{8}(\pi - 8x)\right]$

Luego podemos calcular la derivada de $f(x)=\sin(x)$ de orden $(7/4)$ y por la propiedad (2)

$$f(x)^{(7/4)} = f(x)^{(1+3/4)} = (f(x)^{(1)})^{(3/4)}$$

$$\begin{aligned}\sin(x)^{(7/4)} &= \sin(x)^{(1+3/4)} = (\sin(x)^{(1)})^{(3/4)} \\ &= (\cos(x))^{(3/4)} \\ &= \sin\left[\frac{1}{8}(\pi - 8x)\right]\end{aligned}$$

En efecto al verificar este resultado obtuvimos:

$f(x) =$	$\sin[x]$
$p =$	$\frac{7}{4}$
$Df[x, p] =$	$\sin\left[\frac{1}{8}(\pi - 8x)\right]$

4. PROPIEDAD DE LA P-DERIVADA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES

1. - La propiedad más importante y muy conocida es el comportamiento de la derivada del producto de funciones similar al binomio de Newton, esto es:

Sea u, v funciones tales que existen sus derivadas entonces:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

2. - Podemos generalizar esta propiedad para las derivadas de orden p -fraccionario.

$$(u \cdot v)^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} u^{(p-k)} v^{(k)}, \forall p \in \mathbb{Q}^+$$

En efecto, esta propiedad la verificaremos solo para casos en los cuales una de las funciones del producto sea un polinomio y de orden $1/2$, pero usted puede verificar para otros ordenes de derivación.

$$(e^x x)^{(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (e^x)^{(1/2-k)} x^{(k)}$$

$$\begin{aligned}(e^x x)^{(1/2)} &= \binom{1/2}{0} (e^x)^{(1/2+0)} x^{(0)} \\ &\quad + \binom{1/2}{1} (e^x)^{(1/2-1)} x^{(1)} + 0\end{aligned}$$

$$(e^x x)^{(1/2)} = 1 \cdot e^x \cdot x + \frac{e^x \cdot 1}{2} + 0$$

$$(e^x x)^{(1/2)} = e^x \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$(e^x x)^{(1/2)} = \frac{1}{2} e^x (2x + 1)$$

Ahora introduciremos en <<Wolfram-Mathematica>> este ejemplo y varios más para que se pueda verificar esta propiedad.

1	2	3	4	5
$f(x) = xe^x$	$f(x) = x^2 e^x$	$f(x) = x^3 e^x$	$f(x) = x^4 e^x$	$f(x) = x^5 e^x$

Figura 2
Algunas propiedades de las derivadas de orden fraccionario
Cálculo de la función $x^3 e^x$

4. CONCLUSIÓN

El cálculo de derivadas de orden fraccionario para funciones tales como los polinomios pueden resultar series no convergentes, el desafío está en determinarlas con el uso de convergencias débiles, o lo mismo determinarlas con derivadas generalizadas. (Esto lo estaré presentando en el siguiente artículo).

Resulta fácil calcular la p -derivada de funciones polinómicas expresadas en series de Fourier.

También podemos hacer la observación que una condición suficiente para que exista la p -derivada es que: la función sea acotada en todo el dominio de los Reales.

También podemos observar en este trabajo que las propiedades solo se han verificado su cumplimiento, más no se ha demostrado formalmente.

Y por último debemos observar que las derivas de orden negativo, se pueden calcular y fácil se demostró para la función

e^x en el artículo anterior y su sentido es el de integración, eso se puede verificar, dando valores negativos en las derivadas dadas al inicio de este trabajo.

$f(x) =$	$x\sin[x]$
$p =$	-1
$Df[x, p] =$	$-x\cos[x] + \sin[x]$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1]. **BUSTAMANTE, JOHN I (2014).** *"Definición de derivada de orden fraccionario"*, Una publicación de FCNM - ESPOL 2014, Vol. 12, No. 1, Revista Matemática, ESPOL.
- [2]. **SAMKO, KILBAS & MIRICHEV (1987).** *"Integrales y derivadas de orden fraccionario y otras propuestas"*. Minsk ex.URRS, Ed. Ciencia y Técnica, Editorial Nauka.
- [3]. **MALGORZATA KLIMEK (2008).** *"Meijer g-functions series as solutions for some Euler \[Dash\]Lagrange equations of fractional mechanics"*, Enoc, Saint Petersburg, Russia, June, 30-July.