matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

SOLUCIÓN EN $\mathbb{R}^n$ DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Medina Jorge[1]

Resumen. *La ecuación de ondas es uno de los temas de mucha importancia en el estudio de las ecuaciones de la Física Matemática; este artículo pretende inicialmente explicar la obtención de la solución a la ecuación de onda unidimensional con el método de D'Albert. En la segunda parte se resuelve la ecuación de onda tridimensional apoyado en teorías como es la Integral de Fourier, Convolución de funciones y en la teoría de funciones generalizadas desarrolladas en gran parte por el Matemático Ruso Sergei Sobolev.*

Palabras claves: Función Generalizada, Teoría de Distribución, Convolución, Sobolev, Ecuación de Onda, Ecuación Hiperbólica, Problema de Cauchy

Abstract. *The wave equation is a topic of great importance in the study of equations of Mathematical Physics, this article aims to explain initially obtaining the solution to the one-dimensional wave equation with the method of D'Almbert. In the second part of the three-dimensional wave equation supported theories such as the Fourier Integral, Convolution of functions and the theory of generalized functions developed in large part by the Russian mathematician Sergei Sovalev resolved.*

Keywords: Generalized Function, Distribution Theory, Convolution, Sobolev, wave equation, hyperbolic equation, Cauchy problem.

Recibido: Enero2014
Aceptado: Febrero2014

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales tiene una gran historia. En ella han contribuido para su desarrollo grandes matemáticos alrededor del mundo.
Para la solución de este tipo de ecuaciones se ha desarrollado nuevas líneas matemáticas, tales como el análisis funcional, teoría de funciones generalizadas y teorías de nuevos espacios funcionales. Investigaciones en teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, van en dos direcciones:

1. Para la generalidad de ecuaciones con condiciones de borde, se estudió la existencia de soluciones, de su unicidad, de su estabilidad y otros.
2. Por otro lado existen muchas ecuaciones en derivadas parciales que describen procesos físicos, biológicos y otros. Por ejemplo: de conducción de calor y vibración de ondas, ecuación en hidrodinámica, la ecuación de Schrodinger en la mecánica cuántica, entre otros.

2. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

<u>Elíptica</u> si:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} > 0$$

<u>Parabólica</u> si:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0$$

<u>Hiperbólica</u> si:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} < 0$$

TABLA 1
Solución en $\mathbb{R}^n$ de la ecuación de onda
Ecuación por su nombre y tipo

ECUACIÓN	NOMBRE	TIPO
$\nabla^2 u = 0$	Laplace	Elíptico
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \nabla^2 u$	Onda	Hiperbólica
$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$	Difusión	Parabólica

[1] *Medina Jorge, M.Sc., Profesor, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). (e_mail: jmedina@espol.edu.ec).*

3. LA ECUACIÓN DE ONDAS

En dimensiones Espaciales:
El problema de CAUCHY

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = F(x,t); en\ \mathbb{R}^N x(0,t) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

3.1. ECUACIÓN DE ONDAS PARA N=1

$$\begin{cases} u_{tt} - cu_{xx} = 0, \quad x \in R_x R \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in R \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in R \end{cases}$$

Método:

I. Mediante un cambio de variables se obtienen todas las soluciones de la ecuación.
II. Se determina una solución que satisfaga los datos.

$$u_{tt} \cdot u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) u$$

Se considera las nuevas variables de $\bar{x}$, $\bar{t}$ y se verifique que:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases}$$
$$\rightarrow u_{tt} - u_{xx} = u_{\bar{x}\bar{t}}$$

Es suficiente considerar

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x+t) \\ \bar{t} = \frac{1}{2}(x-t) \end{cases}$$

O bien

$$\begin{cases} x = (\bar{x} + c\bar{t}) \\ t = (\bar{x} - c\bar{t}) \end{cases}$$

$\rightarrow u_{tt} - u_{xx} = 0$ Se convierte en $u_{\bar{x}\bar{t}} = 0$, por lo que $u_{\bar{t}} = \emptyset(t)$ ó,

$$\mathrm{u}(\bar{x},\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \emptyset(s)ds + w_1(\bar{x})$$

Es decir que: $\quad \mathrm{u}(\bar{x},\bar{t}) = w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{t})$
W_1 y W_2 funciones arbitrarias

$$\rightarrow u(x,t) = w_1(x+ct) + w_2(x-ct)$$

son soluciones de la ecuación de onda y esto es una suma de ondas planas.
Para determinar la solución

$$\begin{cases} u(x,0) = w_1(x) + w_2(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = w'_1(x) - w'_2(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\rightarrow w_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \int^x g(s)ds + C\right]$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int^x g(s)ds - C\right]$$

de donde se obtiene la **FÓRMULA DE D'ALAMBERT**

La fórmula

$$u(x,\ t) = w_1(x+ct) + w_2(x-ct) =$$

$$\frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) - \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\right]$$

significa que el desplazamiento de la cuerda vibrante en la superposición de dos ondas, cuyos perfiles están dadas por las funciones $w_1(x)$ y $w_2(x)$ viajando en sentidos opuestos.

3.2 ECUACIÓN DE ONDAS PARA N=3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C\Delta u = 0$$

Para la ecuación diferencial cuando C=1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \ (1)$$
$$con\ condiciones\ iniciales$$

$$u(0,x) \quad = \varphi(x); \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(\mathrm{x}) \ (2)$$

Donde $u(t,x)$, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones del espacio *S*, que se definen como el espacio compuesto por funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y decrecen junto con sus derivadas de cualquier orden cuando $|x| \rightarrow \infty$, más rápido que cualquier función de la forma $\frac{1}{1+|x|^\beta}$, $\forall \beta > 0$.

Para las funciones de *S* la transformada de Fourier siempre existen, y sus transformadas nuevamente son del espacio *S*. Es decir, si $u(x) \in S \rightarrow \hat{u}(\zeta) \in S$.

Representamos la transformada de Fourier de u, de la siguiente forma:

$$\widehat{u}(\mathrm{t},\zeta) = \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)e^{-i(x,s)}dx = F_{x\rightarrow\zeta}u(t,x)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (1) y a (2) se transforma en

$$\text{Con}\begin{cases}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}(t,\zeta)+(\zeta)^2\hat{u}(t,\zeta)=0 \quad (3)\\ \hat{u}(0,\zeta)=F_{x\to\zeta}u(0,x)=\hat{\varphi}(\zeta) \quad (4)\\ \frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(0,\zeta)=F_{x\to\zeta}\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\hat{\psi}(\zeta)\end{cases}$$

de esta forma (1) y (2) se forma en (3) y (4)
La solución (3) y (4) está dada por

$$(5)\ \hat{u}(t,\zeta)=\hat{\varphi}(\zeta)\,Cos(|\zeta|t)+\hat{\psi}(\zeta)\frac{Sen(|\zeta|t)}{|\zeta|}$$

donde $|\zeta|=\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2}$ tomando la transformada inversa se obtiene que $\mathrm{u}(t,x)=F^{-1}_{\zeta\to x}\hat{u}(t,\zeta)=$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\hat{\varphi}(\zeta)Cos\big((\zeta)t\big)+\hat{\psi}(\zeta)\frac{Sen\big((\zeta)t\big)}{|\zeta|}\right]e^{i(\zeta,t)}d\zeta \quad (6)$$

lo que representa la solución general de (1) y (2).
En los cursos de análisis funcional, se da la definición de función generalizada *f*, como un funcional lineal continuo $T_f=(f,\varphi)$ dado en algún espacio lineal de funciones elementales $\boldsymbol{\varphi}$.
Este concepto aparece como la generalización de las funciones clásicas, esto se da por la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales de física matemática.
Esta generalización de conceptos clásicos de física da la posibilidad de expresar de una forma matemática correcta como es "la densidad de un punto material, la densidad de una carga puntual, la intensidad de una fuerza instantánea en un punto dado, etc."
Ahora introducimos un nuevo concepto como es el de las Funciones con Soporte Compacto $\varphi(x)$, las que se entienden como

$$Supp\varphi=\overline{\{x/\varphi(x)\neq 0\}}.$$

Función generalizada de (crecimiento lento) se denomina al **Funcional Lineal Contínuo sobre el Espacio *S***. A este espacio lo representamos como *S'*.
Para funciones *f(x)* de clase $L_1(\mathbb{R}^n)$ definimos como:

$$(f(x),\varphi(x))=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx\,;\ \forall\varphi(x)\in S$$

Y la transformada de Fourier de $(Ff)(\zeta)=\int_{\mathbb{R}^n_x}f(x)e^{-i(x,\zeta)}\,dx$

Y para cualquier $\varphi(x)\in S$:

$$\big(Ff(\xi),\ \varphi(\zeta)\big)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n_\zeta}\left(\int_{\mathbb{R}^n_x}f(x)e^{-i(x,\zeta)}dx\right)\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n_x}f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n_\zeta}\varphi(\zeta)e^{-i(x,\zeta)}d\zeta\right)dx$$

$$=(f(x),(\mathrm{F}\varphi)(\mathrm{x}))$$

Convolución: Sean $f(x)\epsilon\, S',\ g(x)\,\epsilon\, C_b$
C_b *Espacio de funciones acotadas continuas en* $\mathbb{R}^n$

$$f*g=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy$$

Su transformada está dada por

$$F_{x\to\zeta}\big(f(x)*g(x)\big)=\hat{g}(\zeta).\hat{f}(\zeta)$$

Y su antitransformada

$$F^{-1}_{\zeta\to x}\left(\hat{g}(\zeta).\hat{f}(\zeta)\right)=(f*g)(x)$$

Con ayuda de la convolución. Para eso regresamos al problema inicial de CAUCHY y observamos cómo caso particular, cuando $\varphi(x)=0$, $\psi(x)\neq O$ es decir:

$$\frac{\partial^2u_1}{dt^2}-\Delta u_1=0,\quad x\in\mathbb{R}^3,\ t>0 \quad (7)$$

$$u_1(x,0)\quad=0,\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,o)=\psi(x)$$

entonces de acuerdo a (6) tenemos

$$u_1(x,t)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\psi(\zeta)\frac{Sen\big((\zeta)t\big)}{|\zeta|}e^{i(\zeta,x)}d\zeta$$

$$=F^{-1}_{\zeta\to x}\left(\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\,\hat{\psi}(\zeta)\right) \quad (8)$$

Nuestro objetivo ahora es simplificar (8), para esto se introduce un nuevo concepto que es la δ-función, definida de manera puntual en la esfera.

Con ayuda de la transformada de Fourier de δ_{S_R}, $n = 3$

$\left(S_R = S_R(0) = \left\{x\colon |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = R\right\}\right)$es una esfera en $\mathbb{R}^3$

Definición: δ- función, punto a punto en la esfera se denomina a la función generalizada, es decir un funcional lineal contínuo de la forma:

$$\left(\delta_{S_{\mathbb{R}}}(x),\ \varphi(x)\right) = \int_{S_R} \varphi(x) d\sigma_x,\ \forall\, \varphi \in S'$$

ver [2]

Donde $d\sigma_x$ es un elemento de la superficie de la superficie de la esfera S_R

Determinamos la transformada de Fourier de δ_{S_R}

$$\left(\left(F\delta_{S_R}\right),\ \varphi\right) = \left(\delta_{S_R},\ F\varphi\right)$$
$$= \left(\delta_{S_R};\ \int_{\mathbb{R}^n_\zeta} \varphi(\zeta) e^{-i(x,\zeta)} d\zeta\right)$$
$$= \int_{S_R}\left(\int_{R^\zeta_n} \varphi(\zeta) e^{-i(x,\zeta)} d\zeta\right) d\sigma_x$$
$$= \int_{R^\zeta_n}\left(\int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x\right) \varphi(\zeta) d\zeta$$

$\rightarrow F\delta_{S_R} = \int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x$, ver [2]

Para n=3

$$\int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x = 4\pi R \frac{Sen(|\zeta| R)}{|\zeta|}$$

Esto se lo obtiene con ayuda de coordenadas esféricas.

$$\begin{cases} x = Rcos\varphi sen\psi \\ y = Rsen\varphi sen\psi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \psi \le \pi \\ z = Rcos\psi \end{cases}$$

De esta forma la transformada de Fourier de la función generalizada S_R está dado por:

$$(F\delta_{S_R},\varphi) = \int_{R^\zeta_n}\left(4\pi R \frac{Sen(|\zeta| R)}{|\zeta|}\right)\varphi(\zeta) d\zeta$$
$$= \left(4\pi R \frac{Sen(|\zeta| R)}{|\zeta|}, \varphi\right)$$

$\rightarrow F\delta_{S_R} = \left(4\pi R \frac{Sen(|\zeta| R)}{|\zeta|}\right) = \int_{S_R} e^{-i(x,\zeta)} d\sigma_x$ (9), Ver [2].

Y con ayuda de la transformación de Fourier y la Convolución se obtiene que

$$F(\delta_{S_R} * \varphi)(\zeta) = F(\delta_{S_R})(\zeta)(F(\varphi)(\zeta))$$

Aquí se está tomando que $f = \delta_{S_R}$.

Se tiene que $F_{x\to\zeta}\left(\delta_{S_t}\right) = 4\pi t \frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}$

$$F_{x\to\zeta}\left[\frac{1}{4\pi}\delta_{S_t}\right] = \frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|} \quad (10)$$

Y por el teorema de lo Convolución de Funciones generalizados tenemos

$$\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\hat{\psi}(\zeta) = F_{x\to\zeta}\left[\frac{1}{4\pi}\delta_{S_t}\right] F_{x\to\zeta}\psi(x)$$
$$= F\left[\frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t} * \psi\right] \quad (11)$$

de (8) y (11) obtenemos

$$u_1(x,t) = F^{-1}_{\zeta\to x}\left(\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\hat{\psi}(\zeta)\right)\text{'}7$$
$$= F^{-1}_{\zeta\to x}\left(\frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\right) * F^{-1}_{\zeta\to x}\hat{\psi}(\zeta)$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\left(\delta_{S_t} * \psi\right)(x) = \frac{1}{4\pi t}\left(\delta_{S_t}(y),\ \psi(x-y)\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(0)} \psi(x-y) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} \psi(z) d\sigma_z$$

donde $x - y = z, \quad d\sigma_y = d\sigma_z$

$$S_t(0) = \{|y| = t\}, \qquad S_t(x) = \{|x - z| = t\}$$

Se obtiene

$$u_1(t,x) = t\frac{1}{4\pi t^2}\int_{S_t(x)} \psi(z) d\sigma_z = tM_t\psi(x)$$

donde$M_t\psi$ se representa como el VALOR MEDIO de la función ψ en la esfera

$$S_t(x) = \{z\colon |z - x| = t\}$$

$$M_t\psi(x) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S_t(x)} \psi(z) d\sigma_z$$

De la misma forma resolvemos poner

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^3,\ \ t > 0$$

$$u_2(x,0) = \varphi(x),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = 0,$$
$$\varphi(x) \in S$$

De (6) tomamos

$$u_2(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} Cos((\zeta)t)\hat{\varphi}(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{Sen((\zeta)t)}{|\zeta|}\ \hat{\varphi}(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(tM_t\varphi(x))$$

La solución general de (1) y (2) es la suma de $u_1(t,x)\ y\ u_2(t,x)$, es decir

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) =$$
$$= tM_t\psi + \frac{\partial}{\partial t}(tM_t\varphi)$$

Donde

$$M_t\psi = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{(S_t(x))}\psi(z)dz \quad (12)$$

Esta fórmula se denomina Kirchhoff.
Esta integral está tomado en la esfera con centro en el punto "x" con radio "t", al punto $(t,\ x)$ en el cual se tiene la solución.

4. CONCLUSIÓN

La búsqueda de la solución de la ecuación en derivadas parciales que describe el movimiento de onda en tres dimensiones, se la realizo en el espacio S', de funciones de decrecimiento lento, su convergencia en el cálculo clásico es conocido como convergencia débil, la cual en el cálculo moderno es convergencia de funciones generalizadas.

Se observa que en una sola dimensión la búsqueda solo depende del espacio de las funciones elementales dadas en las condiciones de frontera del problema de Cauchy.

Para la compresión de esta búsqueda se requiere un profundo conocimiento de los espacios de Fourier, su transformada, la propiedad de Convolución y Teoría de Distribución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **KREYSZIG, E.** (2000). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. México: LIMUSA, S.A.

[2]. **B.MASLENIKOVA** (1997) "*Ecuaciones diferenciales en Derivadas Parciales*". Moscú.- Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos.

[3]. **B.C. BLADIMIROV,** (1976). "*Ecuaciones de la Física Matemática*". Moscú.- Editorial Ciencia

[4]. **WALTER RUDIN,** (1980). "*Principios de Análisis Matemático*", México Editorial Mc Graw-Hill