matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2014, Vol. 12, No. 1

DEFINICIÓN DE DERIVADAS DE ORDEN FRACCIONARIO

Bustamante Johni[1]

Resumen. *Definición en forma general de la derivada en cualquier orden entero y su generalización a orden fraccionario, comparación de esta definición con la definición en la forma de Fourier, algunas aplicaciones de esta definición y el espacio de funciones en los cuales ésta se aplica.*

Palabras Claves: Derivada, orden de la derivada, orden fraccionario, derivada según Fourier, binomio de Newton, coeficientes del binomio de Newton, derivada de orden fraccionario.

Abstract. *General definition of the derivative at any integer order and fractional order generalization, comparison of this definition with the definition in the form of Fourier, some applications of this definition and the space of functions in which it is applied.*

Keywords: Derivative, derivative order, fractional order, derived in accordance Fourier, binomial Newton, and Newton's binomial coefficients derived fractional order.

Recibido: Febrero 2014
Aceptado: Marzo 2014

1. DEFINICIÓN DE DERIVADA (TRADICIONAL)

La derivada se define en un punto así:

$$f'(x)_{|x=a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ahora consideramos la derivada para todo punto "*a*" del dominio donde este límite existe, entonces tenemos la derivada como función, por tanto:

$$(1.1)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Observamos que la función derivada, se define en el dominio de existencia de f', entonces el espacio de funciones en las que podemos aplicar esta definición en este trabajo es: $C^1(\Omega)$.
A continuación una pequeña manipulación algebraica de la definición, cambiamos *h* por (-*h*), esto es posible por cuanto el dominio de definición Ω consideramos abierto,

$$(1.2)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Con esta última, determinamos la función derivada de f', obtenemos:

$$(1.3)\quad (f')'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-t)}{t}$$

La denotamos f'':

$$f''(x) = \lim_{t=0}\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x-h-t)}{h}}{t}$$

(1.4)

Sin entrar en mucha formalidad, y asumiendo que existe la f'' es decir $f \in C^2(\Omega)$. Podemos hacer $t = h$, por tanto tenemos:

$$(1.5)\quad f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$

Continuamos con el mismo procedimiento, tenemos que para las funciones de $f \in C^3(\Omega)$:

$$f^{(3)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-3f(x-h)+3f(x-2h)-f(x-3h)}{h^3}$$

(1.6)

2. GENERALIZACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE ORDEN N

Si continuamos con este proceso es fácil deducir que los coeficientes son binomiales y generalizando tenemos:
Para $f \in C^n(\Omega)$, donde n = 1, 2, 3,…
(2.1)

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{C_0^n f(x) - C_1^n f(x-h) + C_2^n f(x-2h) - \cdots + (-1)^n C_n^n f(x-nh)}{h^n}$$

Escribimos esta fórmula en forma más compacta:

$$(2.2)\quad f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(x-kh)}{h^n}$$

[1] *Bustamante Johni, Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).*
(e_mail: jobustam@espol.edu.ec).

La forma general del coeficiente binomial es:

$$C_k^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$$

Ahora, recurrimos a algunas propiedades de los coeficientes binomiales C_k^n,

1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n = 0$,
2. $C_n^{n+j} = 0, \forall j = 1,2,3,...$
3. $C_k^0 = 1, \forall k = 1,2,3,...$

Gracias a esta última propiedad podemos decir que: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^n = 0$, con esta generalización tenemos:

$$(2.3) \quad f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^n f(x-kh)}{h^n}$$

3. DEFINICIÓN DE *p*-DERIVADA O DERIVADA DE ORDEN FRACCIONARIO

Continuando, recordamos que $C_k^n = \frac{(n)}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\frac{(n-3)}{4}...\frac{[n-(k-1)]}{k}$ y también se define para valores fraccionarios, obteniendo que para $p \in \mathbb{Q}$ el coeficiente binomiales es: $C_k^p = \frac{(p)}{1}\frac{(p-1)}{2}\frac{(p-2)}{3}\frac{(p-3)}{4}...\frac{[p-(k-1)]}{k}$ se podía generalizar estos coeficientes usando la función Gamma, el resultado es el mismo.

Forma general del coeficiente binomial es:

$$C_k^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p-k+1)}, p \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}$$

Por tanto finalmente obtenemos la generalización de la derivada de orden fraccionario p:

$$(3.1) \quad f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p f(x-kh)}{h^p}$$

Es fácil verificar casos triviales, tales como $f(x) = constante$, para esta función el numerador es igual a cero, y por tanto su derivada de orden p es siempre cero. A pesar que el orden, puede ser cualquier valor fraccionario, en este trabajo nos interesa los valores enteros positivos, lo interesante de este planteamiento es, que podemos calcular la derivada de cualquier orden sin necesidad de haber calculado las anteriores, por ejemplo.

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$, calcular la función derivada de orden 5: aplicamos la fórmula de la definición: $f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p f(x-kh)}{h^p}$, obtenemos:

$$f^{(5)}(x) = \frac{120(-1+12x+15x^2-40x^3-15x^4+12x^6+x^6)}{(1+x^2)^6}$$

Probemos el cálculo de la función derivada de orden 15, obtenemos:

$$f^{(15)}(x) = \frac{1307674368000}{(1+x^2)^{16}}(1-32x-120x^2+1120x^3 \\ +1820x^4-8736x^5-8008x^6+22880x^7 \\ +12870x^8-22880x^9-8008x^{10}+8736x^{11} \\ +1820x^{12}-1120x^{13}-120x^{14}+32x^{15}+x^{16})$$

Obviamente este cálculo fue realizado con ayuda del software *Mathematica*. Un interesante ejercicio resulta el cálculo de la derivada de orden p de la función $f(x) = e^{ax}$, donde *a* es una constante real.

Desarrollo:

$$f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p e^{a(x-kh)}}{h^p},$$

$$f^{(p)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p e^{a.x}.e^{-a.k.h}}{h^p},$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^p e^{-a.k.h}}{h^p}\right],$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^p (-e^{-a.h})^k}{h^p}\right],$$

usamos la fórmula del binomio:

$(1-x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^p (-x)^k$

Entonces obtenemos:

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\frac{(1-e^{-a.h})^p}{h^p}\right],$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-e^{-a.h}}{h}\right)\right]^p,$$

$$f^{(p)}(x) = e^{a.x}[a]^p,$$

$$(3.2) \qquad f^{(p)}(x) = a^p.e^{a.x},$$

Este resultado sirve para el cálculo de las derivadas de orden p de otras funciones, es decir, si $f(x)$ se puede presentar en la forma: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k).e^{(\beta_k).x}$, donde α_k , β_k constantes. Entonces la derivada de orden p sería: $f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k).(\beta_k)^p.e^{(\beta_k).x}$, la existencia de esta función solo depende de la convergencia de la serie.

Un resultado parecido lo obtiene J. Liouville a partir de una definición diferente de derivada de orden fraccionario.[2]

Estos resultados son aplicables para el campo de los números complejos. Ahora aplicaremos estos conceptos para el cálculo de algunas derivadas de orden fraccionario.

Ejemplo 1.-

$Sin(x) = \frac{1}{2.i}e^{i.x} - \frac{1}{2.i}e^{-i.x}$, usando esta forma de presentar la función seno podemos calcular la $\frac{1}{2}$-Derivada,

$$[Sin(x)]^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{i^{\frac{1}{2}}}{2.i}e^{i.x} - \frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{2.i}e^{-i.x},$$

[2] *Ver pag. 10 del libro de Samko, Kilbas Marichiev, más datos en la referencia.*

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{i^{\frac{3}{2}}}{2.i.i}e^{i.x} - \frac{(-i)^{\frac{3}{2}}}{2.i.(-i)}e^{-i.x},$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{i^{\frac{3}{2}}}{2.(-1)}e^{i.x} - \frac{(-i)^{\frac{3}{2}}}{2.(1)}e^{-i.x},$$

$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{i.x} - \frac{(-1)^{\frac{3}{2}}}{2}e^{-i.x}\right]$, además $(-1)^{\frac{3}{2}} = (-1)(-1)^{\frac{1}{2}} = -i$, entonces tenemos

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-e^{i.x} + ie^{-i.x}]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-Cos(x) - iSin(x) + i(Cos\,(-x) + iSin(-x))]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-Cos(x) - iSin(x) + i(Cos\,(x) - iSin(x))]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-Cos(x) - iSin(x) + iCos\,(x) + Sin(x)]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[(-1+i)Cos(x) + (1-i)Sin(x)]$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)[-(1-i)Cos(x) + (1-i)Sin(x)]$$

$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)(1-i)[-Cos(x) + Sin(x)]$, donde

$$i^{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1-i)(1-i)[Sin(x) - Cos(x)],$$

$$[Sin(x)]^{\frac{1}{2}} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(-2i)[Sin(x) - Cos(x)],$$

obtenemos una función n el plano complejo, detallado:

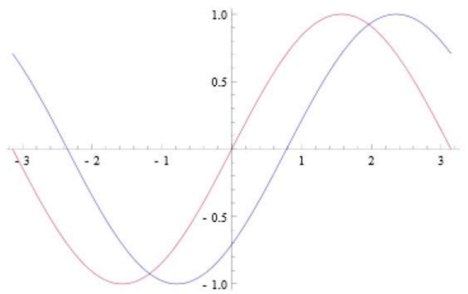
$[Sin(x)]^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[Sin(x) + Cos(x)]$, graficamos el modulo de la función derivada de orden $\frac{1}{2}$,

Graficando las funciones: f, f':

FIGURA 1

Definición de derivadas de orden fraccionario

Funciones: f, f'



Ahora calculamos la *p*-derivada (función derivada de orden *p*) de la función Seno y luego la graficaremos solo la parte real, para denotar los cambio existentes.

$$Sin(x) = \frac{1}{2.i}e^{i.x} - \frac{1}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = \frac{i^p}{2.i}e^{i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = \frac{i^p}{2.i}e^{i.x} - \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^p\left(\frac{1}{2.i}e^{i.x} - \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}\right) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^pSin(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[1-(-1)^p] \quad (*)$$

Agrupando de otra forma

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^p\left(\frac{1}{2.i}e^{i.x} + \frac{1}{2.i}e^{-i.x}\right) - \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x} - \frac{(-i)^p}{2.i}e^{-i.x}$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = \frac{i^p}{i}\left(\frac{1}{2}e^{i.x} + \frac{1}{2}e^{-i.x}\right) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1-(-1)^p]$$

$$[Sin(x)]^{(p)} = i^{p-1}Cos(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1-(-1)^p] \quad (**)$$

Estas dos últimas presentaciones de la *p*-derivada nos ayuda a verificar dos casos triviales:

1. La primera: $[Sin(x)]^{(p)} = i^pSin(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1-(-1)^p]$, verificamos que, para $p = 0$, $[Sin(x)]^{(0)} = Sin(x)$
2. La segunda: $[Sin(x)]^{(p)} = i^{p-1}Cos(x) + \frac{i^p}{2.i}e^{-i.x}[-1-(-1)^p]$, verificamos que, para $p = 1$; $[Sin(x)]^{(1)} = Cos(x)$

4. DERIVADA DE ORDEN *p* SEGÚN FOURIER

Existen varias definiciones de la derivada de orden fraccionario incluye la integración de orden fraccionario, esto lo podemos verificar en la bibliografía dada en este documento.

La generalización de la derivada de orden *p* según Fourier, de la forma más sencilla en el siguiente análisis.

Tomamos una función del conjunto $C^1_{per\Omega}$, aplicamos la serie de Fourier:

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i.n.x}$, sabemos que la serie converge absoluta uniformemente, por tanto tomamos la p-derivada de cada término según la fórmula 3.2 $f^{(p)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (e^{i.n.x})^{(p)}$, entonces $f^{(p)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (i.n)^{(p)}. e^{(p)i.n.x}$. Siendo esta última la generalización de la derivada de orden p según Fourier. Podemos decir que la demostración de la equivalencia se reduce al cálculo de la fórmula 3.2. Además su equivalencia se da solamente en la intersección de los espacios donde estas dos definiciones de derivada son definidas.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se presenta la definición de orden entero y su generalización en orden fraccionario, además se realiza la compatibilidad con la definición de la derivada según Fourier, se describe también algunos ejemplos en los cuales se evidencia su correctitud. Definiciones similares son dadas por algunos autores, uno de ellos se cita en el libro de SAMKO, existen otras definiciones desde otra perspectiva con el uso de funciones integrales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1].**SAMKO, KILBAS & MIRICHEV (1987).** "*Integrales y derivadas de orden fraccionario y otras propuestas*". Minsk - ex.URRS, Ed. Ciencia y Técnica, Editorial Nauka.

[2].**MALGORZATA KLIMEK (2008)**. "*Meijer g-functions series as solutions for some euler – lagrange equations of fractional mechanics*", Enoc-2008, Saint Petersburg, Russia, june, 30-july.