INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE VALORES INICIALES Y DE FRONTERA DE LA ECUACION DE NAVIER - STOKES

Bustamante Johni¹

Resumen. En este artículo se presenta el siguiente contenido: los 7 problemas del milenio, estructura de la ecuación de Navier – Stokes, planteamiento del Problema Fundamental (PF) de Navier – Stokes, las funciones generalizadas, definición del PF según Leray – Hopf, solución débil del PF.

Palabras Claves: Movimiento de fluidos, Ecuación de Navier – Stokes, proceso isocórico, Funciones Generalizadas, Espacios de Sobolev, Solución generalizada, funciones finitas, solución débil, definición de solución débil según Leray – Hopf.

Abstract. This article presents the following content: 7 millennium problems, structure of the Navier - Stokes, Fundamental Problem approach (PF) Navier - Stokes, the generalized functions, definition of PF according Leray - Hopf weak solution.

Keywords: Fluid motion, Navier - Stokes, isochoric process, Generalized Functions, Sobolev spaces, generalized solution, finite functions, weak solution, defined as Leray weak solution - Hopf.

Recibido: Febrero 2014

Aceptado: Marzo 2014

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo clásico o cálculo de Newton - Leibnitz, está imposibilitado de trabajar formalmente con elementos abstractos como la “función Delta de Dirac” o función impulso, la misma que es muy necesaria en los procesos físicos, entonces aparece en escena, la teoría de Distribuciones de Swartz basada en definiciones y espacios de Sergei Sobolev y solo así se tiene unos nuevos elementos abstractos llamados funciones generalizadas que permiten ampliar el conjunto de búsqueda de soluciones a problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Esta nueva visión, permite calcular soluciones en los espacios de funciones generalizadas, llamadas soluciones débiles, para esto se debe tener un conocimiento de Análisis funcional, es decir conocer muy bien los espacios funcionales, sus definiciones y sus propiedades.

El problema fundamental de Navier – Stokes, es abordado desde esta nueva visión, es decir su búsqueda se realiza en espacios funcionales tales como los espacios de Sobolev. En este trabajo presentaré la solución de Leray Hopf en un espacio funcional con ciertas propiedades y también la definición de la solución débil según Leray – Hopf, y seguido su solución detallada.

Este problema tiene mucha relevancia en el mundo científico por cuanto es uno de los 7 problemas del milenio, y en la actualidad existe una gran comunidad científica trabajando entorno a estas ecuaciones.

2. LOS 7 PROBLEMAS DEL MILENIO

2.1 P versus NP

Inclusión en clases de complejidad, problemas que convergen en tiempo polinomial y problemas que no convergen en tiempo polinomial.

2.2. La conjetura de Hodge

Dice que: Para variedades algebraicas proyectivas los ciclos de Hodge son una combinación lineal racional de ciclos algebraicos.

2.3. La hipótesis de Riemann

Esta hipótesis dice que todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen una parte real de $\frac{1}{2}$.

2.4. Existencia de Yang – Mills y del salto de masa

En física la teoría cuántica de Yang-Mills describe partículas con masa positiva que poseen ondas clásicas que viajan a la velocidad de la luz. (Este es el salto de masa) El problema consiste en establecer la existencia de la teoría de Yang-Mills y un salto de masa.

¹ Bustamante Johni, Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL).
(e_mail: jobustam@espol.edu.ec).

2.5. Las ecuaciones de Navier – Stokes

En adelante detallaremos este problema, siendo el objetivo de este trabajo.

2.6. La conjetura de Birch y Swinnerton – Dyer

La conjetura trata sobre cierto tipo de ecuación que define curvas elípticas sobre los racionales. La conjetura dice que existe una forma sencilla de saber si estas ecuaciones tienen un número finito o infinito de soluciones racionales.

2.7. La conjetura de Poincare

Esta hipótesis fue resuelta por el ruso Gregori Perelman, por lo cual 6 problemas permanecen aún abiertos.

3. PROBLEMA FUNDAMENTAL (PF) DE NAVIER – STOKES

Las ecuaciones de Navier – Stokes describen el movimiento de un fluido newtoniano incompresible, fueron propuestas en 1822 por el ingeniero francés **Claude Louis Navier** (1785 - 1836) sobre la base de un modelo molecular adecuado, es interesante observar que la ley de la interacción entre las moléculas postulada por Navier fue poco reconocida por ser totalmente inconsistente desde el punto de vista físico de varios materiales en particular para los líquidos. No fue hasta más de veinte años después que las mismas ecuaciones se volvieron a deducir por **George Gabriel Stokes** (Irlanda 1819 - 1913) de 26 años de edad (1845) de una manera bastante general, por medio de la ecuación de continuidad.

El caso en el que el fluido es sometido a la acción de una fuerza f , las ecuaciones de Navier – Stokes se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \vartheta \Delta v + \nabla p + f \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \quad (0.1)$$

Donde $v = v(x, t)$ es el campo de velocidad evaluada en el punto $x \in \Omega$ y en el tiempo $t \in [0, T]$, p es el campo de presión, ρ es la densidad del fluido constante, y $\vartheta > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática. Finalmente, Ω denota el correspondiente dominio geométrico donde las variables espaciales se están extendiendo. Por lo tanto, coincidirá con la región de flujo para movimientos tridimensionales ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) mientras coincidirá con una región de dos dimensiones, en el caso de los flujos de avión ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$)

Para las ecuaciones (0.1) añadimos la **condición inicial**: *(Sin pérdida de generalidad, podemos tomar 0 como tiempo inicial)*

$$v(x, 0) = v_0, \quad x \in \Omega$$

Y la relación de frontera o condición de no deslizamiento.

$$v(y, t) = 0, \quad y \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (0.3)$$

El problema de Navier – Stokes consiste en determinar las soluciones v, p de las ecuaciones (sistema) que gobiernan el movimiento de un fluido newtoniano.

$$\text{PF: } \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \vartheta \Delta v + \nabla p + f & (0.1) \\ \operatorname{div} v = 0 & \\ v(x, 0) = v_0, \quad x \in \Omega & (0.2) \\ v(y, t) = 0, \quad y \in \partial\Omega, \quad t > 0 & (0.3) \end{cases}$$

4. ESTRUCTURA DE LA ECUACION DE NAVIER – STOKES

La dificultad de este problema radica en la falta de "simetría" en el mencionado sistema (0.1)

Esta ecuación no cae en ninguna de las categorías clásicas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, a pesar de que, en cierto sentido, se podría considerar cerca de un sistema cuasi-lineal parabólico. Sin embargo, la dificultad básica relacionada al problema (0.1) - (0.3) se debe al efecto acoplado de la falta de simetría y de la presencia del término no lineal.

De hecho la formulación del problema sin la parte no lineal (0.1'):

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \nabla p + f & (0.1') \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

O sin la condición **isocórico** $\operatorname{div}(v) = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \vartheta \Delta v + f \quad (0.1'')$$

Pueden ser completamente resueltos.

4.1. ¿Cómo abordar el problema PF de Navier – Stokes?

La comunidad científica ha presentado trabajos relacionados usando el cálculo no clásico, es decir desde el punto de vista de funciones generalizadas o funcionales lineales (también llamadas "funcionales").

4.2. ¿Por qué usar las funciones generalizadas y soluciones generalizadas?

Las soluciones generalizadas son también llamadas soluciones débiles.

Los funcionales se definen sobre espacios de funciones con producto interno y completo (conocidos como espacios de Hilbert H), y por tanto esto permite determinar el espacio de funciones en el cual se encuentra la solución.

Gracias al teorema de representación de Riesz, se sabe que: "A un funcional se le puede asociar en

forma única una función”, y por tanto dicha función es la solución débil.

4.3.- ¿Por qué se llama solución débil?

Un funcional se define sobre un espacio de funciones (Espacio de Hilbert H) y es igual al producto interno:

$$\mathcal{L}_{u_k}(\varphi) = \langle u_k, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}_{u_k}(\varphi) \rightarrow \mathcal{L}_u(\varphi) \text{ si y solo si } \langle u_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle,$$

$$\text{Esto significa que } \int_{\Omega} u_k \cdot \varphi \rightarrow \int_{\Omega} u \cdot \varphi dx,$$

Observamos que el funcional converge, pero la convergencia de la función la realiza a través de la integral y por eso se la llama convergencia débil.

5. DEFINICIONES NECESARIAS PRELIMINARES

5.1. Definición. Derivada material o sustancial.

Sea $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, campo de la velocidad, donde

$v = v(x, y, z, t)$, es decir:

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases}, \text{ escribimos en forma lineal}$$

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

Operador $\frac{D(*)}{Dt} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + (v \cdot \nabla)(*)$, donde v es la velocidad del fluido. El primer término representa la variación de la propiedad en el punto fijo del espacio y por ello se la denomina derivada local, mientras que el segundo representa la variación de la propiedad asociado al cambio de posición de la partícula fluida, y se la denomina derivada conectiva. Aplicado al campo de velocidad tenemos:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$$

5.2. Definición de “Función Generalizada”.

Llamaremos Funcional (Función generalizada) a la aplicación $L: H \rightarrow \mathbb{R}$ donde H es un espacio Vectorial Normado de funciones (Espacio de Banach). En este punto es claro tener en cuenta que: Si un funcional es lineal y continuo entonces existe una función $f \in L_1(G)$ tal que $L(\varphi) = (f, \varphi)$, se expresa como producto interno. A este teorema se lo conoce como teorema de representación de Riesz.

También debemos tener claro que una función generalizada es un funcional lineal y continuo (Acotado). Y en adelante denotaremos a las funciones generalizadas por el nombre de la función

en su representación como producto interno, es decir si $L(\varphi) = (f, \varphi)$, la denotamos $f = L(\varphi)$, Debemos tener cuidado, a veces podemos confundir la función clásica con el funcional.

5.3. Definición de “Derivada generalizada”.

Sea f, g funciones localmente integrables según Lebesgue, esto es $f, g \in L_1(G)$ definidas en un subconjunto abierto $G \in \mathbb{R}^n$, y α multi-índice, La función g se llama derivada generalizada de orden α de la función f en el sentido de Sóbólev y la denotamos $D^\alpha f$ si para cualquier función $\varphi \in H$ se verifica:

$$(g, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi), \quad \text{es decir } (D^\alpha f, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi)$$

5.4. Definición de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Conjunto de las funciones infinitamente derivables en el dominio $\mathbb{R}^n$.

5.5. Definición de $C^{0,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Conjunto de las funciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto, $Supp[\varphi(x)] = \{x, \varphi(x) \neq 0\}$

5.6. Definición del espacio de funciones D .

Denotaremos D al conjunto de funciones $u = u(x)$ que cumplen las siguientes condiciones:

- 1.- $u \in C^{0,\infty}(\mathbb{R})$
- 2.- $\forall \{u_k\} \in C^{0,\infty}(\mathbb{R})$, existe un $R > 0$, $Supp(u_k) \subset B_R$, tal que: $u_k \rightarrow u \in D$
- 3.- $D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u$

A estas funciones las llamaremos funciones finitas, otros autores la llaman funciones test, bajo condiciones más relajadas.

5.7.- Definición de “Espacios de Lebesgue”.

A estos espacios los denotamos $L^q(\Omega)$, y es el conjunto de funciones integrables en el sentido de Lebesgue en Ω y norma:

$$\|f\|_q = \left(\int_{\Omega} |f|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

5.8. Definición de “Espacios de Sóbólev $W^{m,q}(\Omega)$ ”.

A estos espacios los denotamos $W^{m,q}(\Omega)$ y es el conjunto de todas las funciones $f, D^\alpha f$ del espacio $L^q(\Omega)$, $\alpha \leq q$, debemos tener en cuenta que $D^\alpha f$ es la derivada en el sentido de Sóbólev, y en este espacio se define la norma:

$$\|f\|_{W^{m,q}(\Omega)} = \|f\|_q + \sum_{i=1}^m \|D^{\alpha_i} f\|_q$$

5.9. Definición de “Campo Solenoidal”.

Es un campo vectorial continuo en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, talque para cualquier región acotada $B \subset \Omega$ con frontera $\partial B \subset \Omega$ suave a trozos, y el flujo que atraviesa esta frontera es nulo.

Teorema 1.- Un campo vectorial continuo en una región es solenoidal si y solo si la divergencia en cada punto de esta región es cero.

$$\operatorname{div}(u) = 0,$$

Sabemos

que

$$\operatorname{div}(u) = (\nabla \cdot u) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

, donde $u = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$.

5.10. Definición de “Campo potencial”.

Se dice que el campo $u = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, es un campo potencial si y solo si existe una función f , talque

$$\nabla f = u, \text{ es decir } \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix},$$

a la función f , la llamaremos “función potencial”

Teorema 2.- Para que un campo continuo vectorial $u = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ en la región Ω sea campo potencial es necesario y suficiente que para cualquier contorno cerrado suave a trozos $\Gamma \subset \Omega$ su rotacional sea cero.

$$\operatorname{Rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

5.11. Definición “Proceso Isocórico”.

Un proceso isocórico, también llamado proceso isométrico o isovolumétrico, es un proceso termodinámico en el cual el volumen permanece constante; $\Delta V = 0$ (variación de volumen).

Esto implica que el proceso isocórico no realiza trabajo presión – volumen, ya que este se define como:

$$\Delta W = P \cdot \Delta V = 0$$

6. SOLUCIÓN DÉBIL SEGÚN LERAY – HOPF

Sea Ω cualquier dominio en $\mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$ Entonces, para cualquier $v_0 \in H(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$, existe al menos una solución débil de (0.1)- (0.3) en Ω_T .

$$v \in H(\Omega) \quad \text{y} \quad p(t) \in L^2(\omega), \quad \forall t \in [0, T], \quad \omega \subset \Omega.$$

Esta solución verifica, además, las siguientes propiedades:

i) La desigualdad de la energía:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_2^2 d\tau \\ \leq 2 \int_0^t [(v(\tau), f(\tau))] d\tau \\ + \|v_0\|_2^2, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|v(t) - v_0\|_2 = 0$.

6.1. Notación necesaria

- $L^q(\Omega)$ para este espacio su norma la denotaremos $\|\cdot\|_q$, $1 \leq q \leq \infty$
- $W^{m,q}(\Omega)$ para este espacio su norma la denotaremos $\|\cdot\|_{m,q}$
- $W^{0,q} \equiv L^q$,
- $W_0^{m,q}(\Omega)$, este espacio se define sobre el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ y su norma $\|\cdot\|_{m,q\Omega}$
- $D(\Omega) = \{\psi \in C_0^\infty(\Omega): \operatorname{div}(\psi) = 0 \text{ en } \Omega\}$
- $D(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T): \operatorname{div}(\varphi) = 0 \text{ en } \Omega_T\}$
- $H_q = H_q(\Omega)$
- Debemos aclarar que el espacio H_q es la completitud de $D(\Omega)$
- $H_q(\Omega) = \{u \in L^q(\Omega): \operatorname{div}(u) = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$
- $H_q^1(\Omega) = \{u \in W^{1,q}(\Omega): \operatorname{div}(u) = 0, u|_{\partial\Omega} = 0\}$

6.2. Definición de una solución débil

Asumiendo que v , y p son soluciones clásicas de (0.1) – (0.3) y con suficientes características tales que: multiplicar (0.1) por $\varphi \in D_T$ e integrando por partes sobre Ω_∞ obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\{ \left(v, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nu (\nabla v, \nabla \varphi) - (v, \nabla v, \varphi) \right\} dt = \\ - \int_0^\infty (f, \varphi) dt - (v_0, \varphi(0)), \quad \forall \varphi \in D_T \end{aligned} \quad (1)$$

Y por otro lado, si $v(x, t)$ es un campo vectorial que satisface (1) y teniendo suficiente suavidad como para permitir la integración por partes sobre Ω_∞ en cierto sentido. (Por ejemplo, en el sentido de la diferenciación generalizada) obtenemos fácilmente:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v - f, h(t)\psi \right) dt = 0$$

Para todo $h \in C_0^\infty(0, T)$ y $\psi \in D(\Omega)$ y por consiguiente para cada ψ

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v - f, h(t)\psi \right) = 0$$

Y por resultado bien conocido de Hopf (1950/1951), se concluye la validez de (0.1) por algún campo de presión $p(x, t)$. Sin embargo, está claro que $v(x, t)$ es un campo vectorial solenoidal

que satisface (1), pero no es lo suficientemente diferenciable, no podemos de (1) concluir (0.1) y es precisamente en este sentido que (1) tiene que ser considerada como la formulación débil.

Luego esta definición se puede ir redefiniendo en regiones y espacios requeridos.

TABLA I

Introducción al problema de valores iniciales y de frontera de la ecuación de Navier - Stokes

Solución Débil según Leray – Hopf

Solución débil según Leray – Hopf
<p>Sea Ω cualquier dominio en $\mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$ Entonces, para cualquier $v_0 \in H(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$, existe al menos una solución débil de (0.1)- (0.3) en Ω_T.</p> <p>$v \in H(\Omega)$ y $p(t) \in L^2(\omega) \forall t \in [0, T]$, $\omega \subset \subset \Omega$.</p> <p>Esta solución verifica, además, las siguientes propiedades:</p> <p>i) La desigualdad de la energía:</p> $\ v(t)\ _2^2 + 2\nu \int_0^t \ \nabla v(\tau)\ _2^2 d\tau \leq 2 \int_0^t [(v(\tau), f(\tau))] d\tau + \ v_0\ _2^2, \quad t \in [0, T]$ <p>ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \ v(t) - v_0\ _2 = 0$.</p>

7. SOLUCIÓN

Buscamos la solución usando el método de Faedo – Galeorkin $\{\psi_r\} \subset D(\Omega)$ base de $H(\Omega)$ y buscamos la solución como una aproximación de v_k

$$v_k(x, t) = \sum_{r=1}^k C_{kr}(t) \psi_r(x), \quad k \in \mathbb{N}$$

Donde los coeficientes $C_{kr}(t)$ se determinan del siguiente sistema ordinario de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \frac{dC_{kr}}{dt} + \sum_{i=1}^k a_{ir} C_{ki} + \sum_{i=1}^k a_{isr} C_{ki} C_{ks} = f_r, & r = 1, \dots, k \\ C_{kr}(0) = C_{0r} & r = 1, \dots, k \end{cases}$$

Donde

$$a_{ir} = \nu(\nabla \psi_i, \nabla \psi_i) \quad a_{isr} = (\psi_i \cdot \nabla \psi_s, \nabla \psi_r),$$

$$f_r = (f, \psi_r) \quad C_{0r} = (v_0, \psi_r)$$

Y $f_r \in L^2(0, T)$ para todo $r = 1, \dots, k$.

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias existe solución única y $C_{kr} \in W^{1,2}(0, T_k)$, $r = 1, \dots, k$.

Donde $T_k \leq T$.

8. CONCLUSIONES

La ecuación de Navier – Stokes describe el movimiento de los fluidos (Newtonianos) y su plena solución todavía no existe, se tiene grandes avances en casos particulares y en aproximaciones numéricas.

Este artículo pretendía dar una introducción a estas ecuaciones y presentar uno de los resultados dado por Leray – Hopf. También se pretendía y en efecto así se hizo, describir las funcione generalizadas y soluciones generalizadas (débiles), en fin dar un enfoque desde el punto de vista de espacios funcionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1].GALDI G. “*An Introduction to the Navier – Stokes Initial – Bondary Value Problem*”, University of Pittsburgh USA.
- [2].GEISSERT, M., HECK H., HIEBBER M., “*On the Equation $\operatorname{div} u = g$ an Bogovskii’s Operator in Sobolev spaces of negative order*”.
- [3].GALDI G. “*An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier – Stokes Equations*”, University of Pittsburgh USA, Second Edition.
- [4].SOHR HERMANN, (2001). “*The Navier – Stokes Equations An Elementay Funtional Analitic Approach*”, Universitat Paderborn, Zurich University, Basel – Boston – Berlin.
- [5].LADYZHENSKAYA O. A., (1987). “*The Mathematical Theory of viscous Incompressible Flow*”, Second Edition, Ed. Nauka.