Matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2015, Vol. 13, No. 2

MEDIDAS PERFECTAS Y TEOREMA DE REPRESENTACIÓN

SOLÍS SORAYA[1]

Resumen. *Diversas topologías han sido estudiadas sobre el espacio $C_b(X,E)$, de las funciones continuas y acotadas de X en E, con X espacio Hausdorff completamente regular y E un espacio normado, a fin de que su dual pueda identificarse con algún espacio de medidas.*
En el presente artículo se describe la topología perfecta definida sobre $C_b(X,E)$ e inducida por conjuntos distinguidos, así como el espacio de medidas perfectas de Ba(X) en E', donde Ba*(X) denota el álgebra de Baire generada por los zero sets de X y E' es el espacio dual de $(E,\|.\|)$. La relación dual subyacente es utilizada para la representación de un operador lineal continuo definido del espacio $(C_b(X,E)\,;\,\beta_p)$ a un espacio de Banach.*

Palabras Claves: Topología perfecta, medida perfecta, Álgebra de Baire, Conjunto Distinguido, Representación de operadores lineales continuos.

Resumen. *Diverse topologies have been studied on the $C_b(X,E)$ space, of the continuous and bounded functions from X into E, with X completely regular Hausdorff space and E a normed space, for the purpose of identifying their dual with some measure' space.*
In this article the perfect topology is described, being defined over $C_b(X,E)$ and induced by distinguished sets, such as the perfect measure' space from Ba(X) into E', where Ba*(X) denotes the algebra of Baire generated by the zero sets of X and E' is the dual space of $(E,\|.\|)$. The dual underlying relation is used for the representation of a linear continuous operator defined from the space $(C_b(X,E)\,;\,\beta_p)$ to a Banach space.*

Palabras Claves: Perfect Topology, Perfect Measure, Algebra of Baire, Distinguished Set, Representation of Continuous Linear Operators.
Recibido: Abril 2015.
Aceptado: Junio 2015.

1. INTRODUCCIÓN

Para X conjunto no vacío sobre el cual se ha definido una topología τ, se denota esto por (X, τ) y se dice que X es un espacio topológico. Si la topología está sobreentendida, simplemente se denota a X como un espacio topológico.

Para E espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, provisto de una topología Hausdorff τ que hace continuas las operaciones de suma y multiplicación por escalar, se dice que E es un espacio vectorial topológico. En este caso se define su espacio dual topológico como $(E, \tau)'$, o simplemente E', dado por:
$E'=\{\phi{:}E\to \mathbb{K}\ /\phi$ es funcional lineal y continuo$\}$.

Si un espacio vectorial topológico E posee una base local de vecindades de 0 formada por conjuntos convexos, se dice que E es localmente convexo. Vecindad de un punto es un conjunto que contiene un abierto tal que el punto pertenece a dicho abierto.

Puesto que en un espacio vectorial topológico es suficiente contar con una base local en 0, de aquí en adelante sólo se hará referencia a vecindades de 0.

Además, todo espacio localmente convexo posee una base de vecindades en 0 formada por conjuntos cerrados, equilibrados y convexos (Swartz, [10 p. 170 Teorema 5]).

También es conocido que una familia $\mathcal{P}$, de seminormas que separa puntos sobre un espacio vectorial E, induce una topología localmente convexa en E. Una subbase local de vecindades está dada por conjuntos de la forma
$V=\{x \in E{:}\, p(x)\leq\varepsilon\}$, con $\varepsilon>0$ y $p \in \mathcal{P}$ (Rudin, [6 p. 24 Teorema 1.37]).

Para X espacio Hausdorff completamente regular, βX denota la compactificación de Stone-Cech de X, dada por la completitud de X respecto a la $C_b(X)$-uniformidad.
βX es el espacio compacto más pequeño en el cual X es denso y $C_b(X)$ −embebido.

$C_{rc}(X,E)$ denota los elementos de $C_b(X,E)$ cuya imagen es relativamente compacta en E y $C_b(X)$ denota el espacio de funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$; $C_b(X)\otimes E$ es el producto tensor estándar entre $C_b(X)$ y E. Es conocido que $C_b(X)\otimes E\subseteq C_{rc}(X,E)$.

Para $f \in C_b(X,E)$, $\|f\|$ denota su función norma de X en $\mathbb{R}$, dada por $\|f\|(x) = \|f(x)\|$, mientras que la norma de f es denotada por $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\|f(x)\|$.

Definición 1.1 Sea X un espacio Hausdorff completamente regular y sea $Z \subseteq X$. Se dice que Z es zero set si existe $f \in C_b(X)$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$.

[1]*Solis Soraya, Magister en Matemática., Profesora, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: ssolis@espol.edu.ec).*

Definición 1.2 Sea X un espacio Hausdorff completamente regular y sea Y un espacio métrico separable. Sea $D \subseteq X$. Se dice que D es distinguido si existe una función continua f de X en Y tal que $D = f^{-1}(f(D))$.

Definición 1.3 Se dice que $V \subseteq C_b(X, E)$ es localmente sólido si para cada $f \in V$ y $g \in C_b(X, E)$ tal que $\|g\| \leq \|f\|$, se tiene que $g \in$ V.

El álgebra de Baire (Borel) denotada por $Ba^*(X)$ $(Bo^*(X))$, es el álgebra más pequeña que contiene los zero sets (abiertos) de X.
Similar definición es para la σ-álgebra denotada por $Ba(X)$ $(Bo(X))$.

A los elementos de estas σ-álgebras se los conoce como conjuntos de Baire y conjuntos de Borel, respectivamente.

Puesto que todo zero set es cerrado, se verifica que $Ba(X) \subseteq Bo(X)$. Similar relación cumplen las álgebras respectivas. La igualdad se da si X es un espacio métrico.

Una medida positiva de Baire sobre un espacio completamente regular X, es una función conjunto $\mu: Ba^*(X) \to \mathbb{R}$, no negativa, finita y finitamente aditiva, la cual es zero set regular, es decir:

$$\forall A \in Ba^*(X), \mu(A) = sup\{\mu(Z): Z \subseteq A, Z\ zero\ set\}$$

Similar definición para una medida positiva de Borel y en este caso

$$\forall E \in Bo^*(X), \mu(E) = sup\{\mu(C): C \subseteq E, C\ closed\ set\}$$

De esta definición se deduce que estas funciones son monótonas: si $A \subseteq B, \mu(A) \leq \mu(B)$.

Una medida de Baire (Borel) es la diferencia de dos medidas positivas de Baire (Borel) y debido a esta definición, estas medidas también son conocidas como medidas signadas.

Al espacio de todas las medidas de Baire se lo denota por $M(X)$ y al de las medidas positivas de Baire por $M^+(X)$.

En $M(X)$ se estudiarán tres subespacios de medidas en particular, denotados por $M_t(X), M_\sigma(X)$ y $M_p(X)$, denominados medidas: tight, σ -aditivas y perfectas, respectivamente.
Es conocido que $M_t(X) \subseteq M_p(X) \subseteq M_\sigma(X)$

Para definir estas medidas se requiere definir la variación total de una medida de Baire.
Sea $\mu \in M(X)$ y sea $A \in Ba^*(X)$. Las funciones μ^+ y μ^- son miembros de $M^+(X)$ y están dadas por:

$$\mu^+(A) = sup\{\mu(B): B \in Ba^*(X) \wedge B \subseteq A\}$$
$$\mu^-(A) = -inf\{\mu(B): B \in Ba^*(X) \wedge B \subseteq A\}$$

La variación total de μ se define por $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.
Es un hecho conocido que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y que para cada $A \in Ba^*(X)$

$$|\mu|(A) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(B_i)|: B_i \in Ba^*(X), A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} B_i\right\}.$$

De estas definiciones se deduce que para toda $\mu \in M(X)$, se tiene que $\mu \leq |\mu|$. También es conocido que $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ constituye una norma sobre $M(X)$.

Definición 1.4 Sea $\mu \in M(X)$. Se dice que μ es una medida:

- tight, si dado δ>0 existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $|\mu|(X - K) < \delta$.
- σ-aditiva, si para toda sucesión $Z_n \downarrow \phi$ de zero sets, $|\mu|(Z_n) \to 0$. Esto equivale a ser contablemente aditiva sobre $Ba^*(X)$.
- Perfecta, si para toda función Baire medible $g: X \to \mathbb{R}$, existe un boreliano B tal que $B \subseteq g(X)$ y $|\mu|(g^{-1}(B)) = |\mu|(X)$.

Ahora se introduce otro concepto de medida para definir el espacio de medidas $M(X, E')$.

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de X, sean E y F espacios Hausdorff localmente convexos, sea $L(E, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de E en F. Sea $S(X, \mathcal{A}, E)$ el conjunto de las funciones simples E-valuadas sobre X.

Una función conjunto finitamente aditiva μ : $\mathcal{A} \to L(E, F)$ se dice que es una medida, si la correspondiente aplicación lineal $\lambda_\mu: S(X, \mathcal{A}, E) \to F$, es continua con la topología de la convergencia uniforme sobre $S(X, \mathcal{A}, E)$. (Schuchat, [7 p. 375]).

Esta aplicación está definida por $\lambda_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$; donde $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i$ es una función simple en su forma canónica, con $A_i \in \mathcal{A}, e_i \in E$. La norma de φ es la del supremo que en este caso es

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X}\|\varphi(x)\| = \max_{1 \leq i \leq n}\|e_i\|$$

Se denota por $B(X, \mathcal{A}, E)$ la clausura de $S(X, \mathcal{A}, E)$ en el espacio de las funciones acotadas de X en E provisto de la topología de la convergencia uniforme. Es conocido que la aplicación λ_μ puede ser extendida de manera única a una aplicación lineal continua $\overline{\lambda_\mu}: B(X, \mathcal{A}, E) \to \bar{F}$, donde $\bar{F}$ es la completitud de F.

Los elementos de $B(X, \mathcal{A}, E)$ son denominados funciones totalmente integrables y se verifica que $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X, E) \subseteq B(X, \mathcal{A}, E)$ (Khurana, [4 p.196]).

En el presente artículo se considera E como espacio normado, $F = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = Ba^*(X)$.
Así, para que $\mu : Ba^*(X) \to E'$ sea una medida es necesario que su correspondiente aplicación $\lambda_\mu: S(X, Ba^*(X), E) \to \mathbb{R}$ sea continua.

En este caso, esto equivale a $sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| < \infty$, donde el supremo recorre todas las $Ba^*(X)$ –particiones finitas $\{A_i\}$ de X (Schuchat, [7 p. 375-6]).

Es conocido que toda $f \in C_b(\mathrm{X})$ es Baire-medible (Wheeler, [12 p. 108]) y es alcanzada por una sucesión de funciones simples (Berberian, [1 p. 49 Teorema 3]). Por tanto
$C_b(\mathrm{X}) \subseteq B(X, Ba^*(X), \mathbb{R})$. En este caso, si $\mu \in M(X)$, entonces λ_μ está definida para toda $f \in C_b(\mathrm{X})$.

Con lo expuesto, se define el espacio de medidas
$M(X, E') = \{\mu: Ba^*(X) \to E', \mu\ medida\ / \forall e \in E[\mu_e \in M(X)]\}$, donde $\mu_e(B) = \langle \mu(B), e\rangle = \mu(B)(e)$. En este artículo es de especial interés el subespacio
$M_p(X, E') = \{\mu: Ba^*(X) \to E', \mu\ medida/$
$\forall e \in E[\mu_e \in M_p(X)]\}$.

Similares definiciones se dan para los casos $M_t(X, E')$ y $M_\sigma(X, E')$.
Para cada $\mu \in M(X, E')$, se define su variación en $A \in Ba^*(X)$ por:
$|\mu|(A) = sup|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)|$, donde el supremo es tomado sobre todas las Ba^* –particiones finitas $\{A_i\}$ de A y sobre todos los $e_i \in E$ tales que $\|e_i\| \leq 1$.
Si E es normado,
$|\mu|(A) = sup\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| : A_i \in Ba^*(X),$
$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\}$.

2. ESPACIO DE FUNCIONES INTEGRABLES

En esta sección se describe como se origina el espacio de las funciones integrables, de X en E, respecto a una medida $\mu \in M_\sigma(X, E')$.
De lo expuesto en la sección anterior, se tiene que μ induce la aplicación lineal y continua $\lambda_\mu: S(X, Ba^*(X), E) \to \mathbb{R}$.

Por (Fontenot, [2 Proposición 3.9]), $|\mu| \in M_\sigma(X)$. Por lo tanto $|\mu|$ también induce una aplicación continua $\lambda_{|\mu|}: S(X, Ba^*(X), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Se afirma que $|\lambda_\mu(f)| \leq \lambda_{|\mu|}(\|f\|)$ para toda $f \in S(X, Ba^*(X), E)$.
En efecto sea $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i: A_i \in Ba^*(X), e_i \in E$. Por definición, $\lambda_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$. Sea $x_i = \frac{e}{\|e_i\|}; 1 \leq i \leq n$.

$$|\lambda_\mu(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)(e_i)|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\mu(A_i)\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)\right| \|e_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\mu_{x_i}(A_i)| \|e_i\|$$

Puesto que $|\mu_{x_i}(A_i)| = |\mu_{x_i}|(A_i)$ y $|\mu_{x_i}| \leq |\mu|$ cuando $\|x_i\| \leq 1$, se obtiene $|\lambda_\mu(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu|(A_i)\|e_i\| = \lambda_{|\mu|}(\|\varphi\|)$.

Esta última igualdad se da puesto que la función norma de φ tiene la forma de una función simple de X en $\mathbb{R}$, dada por $\|\varphi\| = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \chi_{A_i}$.
Sea $G = \{g: X \to [0, +\infty]: g = sup(g_n), g_n$ sucesión en $C_b(X);\ g_n \geq 0, \forall n\}$.
Para $g \in G$, sea $\widehat{|\mu|}(g) = sup\{\overline{\lambda_{|\mu|}}(h): 0 \leq h \leq g; h \in C_b(X)\}$.
Para una función $\delta: X \to [0, +\infty]$ se define $|\mu|^*(\delta) = inf\{\widehat{|\mu|}(g): g \in G, g \geq \delta\}$.
Por (Sondermann, [9 p. 58]), esta última función verifica las siguientes propiedades.
Sean $\delta_j: X \to [0, +\infty]; j = 1{,}2$. Entonces:

1. $|\mu|^*(\delta_1 + \delta_2) \leq |\mu|^*(\delta_1) + |\mu|^*(\delta_2)$.
2. $Si\ \delta_1 \leq \delta_2, entonces\ |\mu|^*(\delta_1) \leq |\mu|^*(\delta_2)$.
3. $Si\ \delta_1 \in G, entonces\ \widehat{|u|}(\delta_1) = |\mu|^*(\delta_1)$.
4. $Si\ \alpha \geq 0, entonces\ |\mu|^*(\alpha\delta_1) = \alpha|\mu|^*(\delta_1)$.

Se define $P = \{f: X \to E / |\mu|^*(\|f\|) < \infty\}$ y en P la seminorma $p(f) = |\mu|^*(\|f\|)$. Con las propiedades de $|\mu|^*$ se puede verificar que (P, p) es un espacio vectorial seminormado.

Es de observar que $S(X, Ba^*(X), E) \subseteq P$ por lo que se define $\mathcal{L}_1$ como la clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$ en (P, p).

Si $f \in S(X, Ba^*(X), E)$ entonces $\|f\|: X \to [0, +\infty]$ es función simple de X en $\mathbb{R}$ y por tanto es alcanzada por una sucesión en $C_b(X)$. Así $\|f\| \in G$ y en este caso $|\mu|^*(\|f\|) = \overline{\lambda_{|\mu|}}(\|f\|) = \lambda_{|\mu|}(\|f\|)$.

De aquí y dado que se mostró que para toda $f \in S(X, Ba^*(X), E)$ se tiene que $|\lambda_\mu(f)| \leq \lambda_{|\mu|}(\|f\|)$, se concluye que $|\lambda_\mu(f)| \leq p(f)$.

Por la densidad de $S(X, Ba^*(X), E)$ en $\mathcal{L}_1$, se extiende de manera única λ_μ sobre $\mathcal{L}_1$.

A este funcional se lo denota por $\widetilde{\lambda_\mu}: \mathcal{L}_1 \to E$ y verifica $|\widetilde{\lambda_\mu}(f)| \leq p(f)$, para toda $f \in \mathcal{L}_1$.

Si $f \in \mathcal{L}_1$ entonces $\|f\| \in \mathcal{L}_1(|\mu|)$. Además $B(X, Ba^*(X), E)$ y $C_b(X) \otimes E$ son subconjuntos de $\mathcal{L}_1$(Khurana, [4 p. 197]).

Para el caso de una función simple $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i;\ A_i \in Ba^*(X), e_i \in E$, es conocido que $\widetilde{\lambda_\mu}(\varphi) = \lambda_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$ lo cual representa la integral de φ sobre X respecto a la medida μ.

En este caso, se define $\int_X \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$.

De lo observado anteriormente, siempre que $f \in \mathcal{L}_1$ se tiene que $\|f\| \in \mathcal{L}_1(|\mu|)$.

Si definimos la seminorma en $\mathcal{L}_1$ dada por $f \mapsto |\mu|(\|f\|)$ se cumple que $\mathcal{L}_1$ contiene a $C_b(X) \otimes E$ y a $S(X, Ba^*(X), E)$ como subespacios densos (Khurana, [4 p. 197]).

Definición 2.1. Sea $\mu \in M(X, E')$ y sea f una función de X en E. Se dice que la integral de f respecto a μ, denotada por $\int_X f\, d\mu$, es el número real r si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de X en elementos de $Ba^*(X)$ tal que si $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq Ba^*(X)$ es un refinamiento de P_ε y $\{x_i\}_{i=1}^n$es una selección arbitraria de puntos $x_i \in A_i$, se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\big(f(x_i)\big) - r\right| < \varepsilon.$$

Es decir $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} \sum \mu(P_i)\big(f(x_i)\big) = r$, donde $\mu(P)$ denota la medida de una partición P de X, dada por $\mu(P) = \max\limits_{1\le i\le n} |\mu|(P_i)$.

Lema 2.1 si $\mu \in M(X, E')$ y $f \in C_{rc}(X, E)$ entonces $\int_X f\, d\mu$ existe y

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \le \int_X \|f\|\, d|\mu|.$$

Demostración:

- La existencia de $\int_X f\, d\mu$ está garantizada por (Katsaras, [3 p. 14-15]).
- Cota para $\left|\int_X f\, d\mu\right|$:

Como $\int_X f\, d\mu$ existe, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_{\frac{\varepsilon}{2}}$ y $\{x_i\}_{i=1}^n$ una selección arbitraria de $x_i \in A_i$, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\big(f(x_i)\big) - \int_X f\, d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Además, $\int_X \|f\|\, d|\mu|$ existe (Wheeler, [12 Teorema 5.1]). Similar a lo anterior,

$$\left|\sum_{i=1}^n |\mu|(A_i)(\|f(x_i)\|) - \int_X \|f\|\, d|\mu|\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Por lo tanto, se toma P_ε como un refinamiento de las particiones correspondientes a (1) y (2).

Para $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ un refinamiento de P_ε y $x_i \in P_i$ arbitrarios, se tiene:

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu(P_i)\big(f(x_i)\big)\right| \le \sum_{i=1}^n \left|\mu(P_i)\big(f(x_i)\big)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^n \left|\mu(P_i)\left(\frac{f(x_i)}{\|f(x_i)\|}\right)\right| \|f(x_i)\|$$

Denominando $e_i = \frac{f(x_i)}{\|f(x_i)\|}$, sigue que:

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu(P_i)\big(f(x_i)\big)\right| \le \sum_{i=1}^n \left|\mu_{e_i}(P_i)\right| \|f(x_i)\| \le \sum_{i=1}^n |\mu|(P_i)\|f(x_i)\| \qquad (3)$$

Esta última suma corresponde a una aproximación de $\int_X \|f\|\, d|\mu|$.

Empleado desigualdad triangular en (1) y (2) y luego usando (3), se obtiene

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| < \varepsilon + \int_X \|f\|\, d|\mu|.$$

Como ε fue arbitrario se concluye que $\left|\int_X f\, d\mu\right| \le \int_X \|f\|\, d|\mu|$. □

3. LA TOPOLOGÍA PERFECTA β_p

En esta sección se define una topología localmente convexa sobre $C_b(X, E)$, conocida como la topología perfecta, siendo X un espacio Hausdorff completamente regular y E un espacio vectorial real normado.

Sea D un conjunto distinguido de $\beta X - X$. Sea $\mathcal{D}(\beta X)$ la colección de estos conjuntos.

Por cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$, se genera una topología localmente convexa β_D sobre $C_b(X, E)$, inducida por la familia de seminormas:

$$f \mapsto \|f\|_h = \sup_{x\in\beta X}\big(|h(x)|\|\widetilde{f}\|(x)\big),$$

donde $\|\widetilde{f}\|$ denota la única extensión de $\|f\|$ a la compactificación de Stone-Cech de X y h recorre el conjunto $B_D(X)$, de todas las funciones escalares acotadas sobre βX, que se anulan en D y se desvanecen en el infinito, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subseteq \beta X - D$ tal que $\{x: |h(x)| \ge \varepsilon\} \subseteq K$.

Se define la topología perfecta β_p, como la topología límite inductivo de las topologías β_D. Por esta razón, $\beta_p = ind(C_b(X, E), \beta_D, Id_D) = \cap\, \beta_D;\ D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Tiene una base local de vecindades dada por los conjuntos absolutamente convexos W de $C_b(X, E)$, tales que W es una β_D −vecindad, para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ (Solís, [8 Apéndice B]).

De (Wheeler, [12 Teorema 11.6]), se deduce que estos conjuntos tienen la forma explícita dada por:

$$W = \mathbf{abco}\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} \left\{f \in C_b(X, E): \sup_{x\in\beta X}(\|\widetilde{f}\|(x)|h_D(x)|) \le 1\right\}\right); \quad \text{con } h_D \in B_D(X).$$

El siguiente teorema será de utilidad para demostrar algunos resultados.

Teorema 3.1 Sea $\{f_\alpha\}$ una red en $C_b(X, E)$. $f_\alpha \to 0$ en β_p de $C_b(X, E)$ si y sólo si $\|f_\alpha\| \to 0$ en β_p de $C_b(X)$.

Demostración:

- Sea la red $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X, E), \beta_p)$. Hay que demostrar que $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$.

  Sea W una β_p-vecindad absolutamente convexa y sólida en $C_b(X)$. De lo mostrado al inicio de la sección, para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ existe una $h_D \in B_D(X)$ tal que

$W =$
$\textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in D(\beta X)}\left\{g \in C_b(X) \sup_{x\in\beta X}(|\widetilde{g}|(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right).$

Con cada una de las h_D se construyen los conjuntos

$$V_D = \left\{g \in C_b(X,E): \sup_{x\in\beta X}(\|\widetilde{g}\|(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$$

Lo cual permite definir la β_p-vecindad absolutamente convexa en $C_b(X,E)$ dada por:

$$V = \textbf{abco} \bigcup_{D\in D(\beta X)} V_D$$
$$= \textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in D(\beta X)}\left\{g \in C_b(X,E): \sup_{x\in\beta X}(\|\widetilde{g}\|(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right)$$

Se afirma que si $f \in V$, entonces $\|f\| \in W$.

En efecto, si $f \in V$ existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $g_i \in \left\{g \in C_b(X,E): \sup_{x\in\beta X}\left(\|\widetilde{g}\|(x)|h_{D_i}(x)|\right) \leq 1\right\}$, $1 \leq i \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ y $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$.

Además $\sup_{x\in\beta X}\left(\|\widetilde{g}\|_i(x)|h_{D_i}(x)|\right) \leq 1$.

Esto implica que $\|g_i\| \in \left\{g \in C_b(X): \sup_{x\in\beta X}\left(\|\widetilde{g}\|(x)|h_{D_i}(x)|\right) \leq 1\right\}$; para $1 \leq i \leq n$.

Por lo tanto $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|\|g_i\| \in$
$$\textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in D(\beta X)}\left\{g \in C_b(X): \sup_{x\in\beta X}(|\widetilde{g}|(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right)$$

Es de observar que ese último conjunto es sólido (12 [Wheeler Teorema 11.6]).

De lo expuesto, $\|f\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|\|g_i\|$ y por la observación precedente,
$$\|f\| \in \textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in D(\beta X)}\left\{g \in C_b(X): \sup_{x\in\beta X}(|\widetilde{g}|(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right)$$

Por lo tanto $\|f\| \in W$.

Como consecuencia de esto se tiene que dada la β_p −vecindad W en $C_b(X)$, se construye la β_p −vecindad V en $C_b(X,E)$ y por la hipótesis, para V existe un índice α_0 tal que $f_\alpha \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo tanto $\|f_\alpha\| \in W$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Esto prueba que $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X),\beta_p)$.

Recíprocamente, sea V una β_p −vecindad absolutamente convexa y sólida en $C_b(X,E)$.

Para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ existe $h_D \in B_D(X)$ tal que

$$V = \textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in D(\beta X)}\left\{g \in C_b(X,E) \sup_{x\in\beta X}(\|\widetilde{g}\|(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right)$$

Similar al procedimiento anterior, con estas h_D se construyen los conjuntos

$$W_D = \left\{g \in C_b(X): \sup_{x\in\beta X}\left(|\widetilde{g}|(x)|h_D(x)|\right) \leq 1\right\}$$

Con los cuales se define la β_p −vecindad abolutamente convexa y sólida en $C_b(X)$ dada por

$$W = \textbf{abco} \bigcup_{D\in D(\beta X)} W_D.$$

A continuación se muestra que si $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X),\beta_p)$, entonces $\|f_\alpha\| \otimes e \to 0$ en $(C_b(X,E),\beta_p)$, con $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$.

Se afirma que si $\|f\| \in W$ entonces $\|f\| \otimes e \in V$.

En efecto, $\|f\| \in W$ implica que existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y
$g_i \in \left\{g \in C_b(X): \sup_{x\in\beta X}\left(|\widetilde{g}|(x)|h_{D_i}(x)|\right) \leq 1\right\}$; $1 \leq i \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que $\|f\| = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ y $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$.

Es decir, $\|f\| \otimes e = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\right) \otimes e = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \otimes e$.

Esto implica $\|f\| \otimes e$ es una combinación absolutamente convexa de las funciones $g_i \otimes e$, tales que $\|g_i \otimes e\| = |g_i|$, por tanto ellas pertenecen a
$$\left\{g \in C_b(X,E): \sup_{x\in\beta X}\left(\|\widetilde{g}\|(x)|h_{D_i}(x)|\right) \leq 1\right\}.$$

Así, $\|f\| \otimes e \in$
$$\textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in D(\beta X)}\left\{g \in C_b(X,E) \sup_{x\in\beta X}\left(\|\widetilde{g}\|(x)|h_D(x)|\right) \leq 1\right\}\right)$$
y por tanto pertenece a V.

Como consecuencia de esto dada la β_p-vecindad V en $C_b(X,E)$, se ha construido la β_p-vecindad W en $C_b(X)$ y por la hipótesis, para W existe un índice α_0 tal que $\|f_\alpha\| \epsilon W$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por tanto $\|f_\alpha\| \otimes e \epsilon V$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Ahora es de notar que $\|f_\alpha\| \leq \left\|\|f_\alpha\| \otimes e\right\|$ y como V es sólida, $f_\alpha \in V$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. □

Lema 3.1 Si $e \epsilon E$, entonces la aplicación $T: (C_b(X), \beta_p) \to (C_b(X,E), \beta_p)$ definida por $T(f) = f \otimes e$, es continua.

Demostración:

Por definición $f \otimes e: \underset{x \mapsto f(x)e}{X \mapsto E}$

Si $e = 0$ tenemos que $f \otimes e$ es la función nula para toda $f \in C_b(X)$. Por tanto T es continua.

Supongamos $e \neq 0$. Sea f_α una red en $C_b(X)$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\beta_p} 0$. Ahora mostramos que $T(f_\alpha) \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.

Sea Ω una β_p-vecindad en $(C_b(X,E), \beta_p)$. Para algún $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ y alguna $h_D \in B_D$ se tiene que el conjunto $W_D = \left\{ g \in C_b(X,E): \sup_{x \in \beta X} \left(\|\widetilde{g}\|(x) |h_D(x)| \right) \leq 1 \right\} \subseteq \Omega$.

Con estas h_D definimos una β_p-vecindad Ω_0 en $C_b(X)$, dada por:

$$\Omega_0 = \mathbf{abco}\left(\bigcup_{D \in \mathrm{D}(\beta X)} \left\{ g \in C_b(X): \sup_{x \in \beta X} \left(|\widetilde{g}|(x) |h_D(x)| \right) \leq \frac{1}{\|e\|} \right\} \right)$$

Como $f_\alpha \xrightarrow{\beta_p} 0$, dada Ω_0 existe α_0 tal que $f_\alpha \in \Omega_0$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Es decir $\sup_{x \in \beta X} \left(|\widetilde{f_\alpha}|(x) |h_D(x)| \right) \leq \frac{1}{\|e\|}$ ó $\sup_{x \in \beta X} \left(|\widetilde{f_\alpha}|(x) \|e\| |h_D(x)| \right) \leq 1$.

Esto último implica que $f_\alpha \otimes e \in \Omega$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Luego $T(f_\alpha) \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$. $\square$

Teorema 3.2 Si $C_b(X) \otimes E$ es denso en $(C_b(X,E), \beta_p)$, entonces:

1. Para toda $\mu \in M_p(X,E'), \mathcal{L}_1(\mu, X, E) \supseteq C_b(X,E)$.
2. $\left(C_b(X,E), \beta_p\right)' = M_p(X,E')$.
3. Para $F \in (C_b(X,E), \beta_p)'$ relacionado con su correspondiente $\mu \in M_p(X,E')$, se tiene que $F(f) = \mu(f)$, para toda $f \in C_b(X,E)$.

Demostración:

1. Sea $\mu \in M_p(X,E')$. Por (Vielma,[11 Teorema 2.8]) se tiene que $|\mu| \in M_p(X)$. De la sección 1, $M_p(X) \subseteq M_\sigma(X)$ y por tanto $|\mu|$ induce el espacio seminormado $(\mathcal{L}_1, |\mu|(\|f\|))$.
   Sea $f \in C_b(X,E)$. Por hipótesis existe una red $f_\alpha \in C_b(\mathrm{X}) \otimes E$ tal que $f_\alpha \to f$ en $\left(C_b(X,E), \beta_p\right)$, con lo cual $f_\alpha - f \to 0$ en $\left(C_b(X,E), \beta_p\right)$.
   Del Teorema 3.1 $\|f_\alpha - f\| \to 0$ en $\left(C_b(X), \beta_p\right)$ y por tanto $|\mu|(\|f_\alpha - f\|) \to 0$. Esto implica que $f_\alpha \to f$ en el espacio seminormado $\left(\mathcal{L}_1, |\mu|(\|f\|)\right)$ y de lo expuesto en la Sección 2, $C_b(X) \otimes E$ es denso en este espacio. De esto se tiene que $f \in \mathcal{L}_1$.
2. Sea $\mu \in M_p(X,E')$. Por la parte (1) se tiene que $\widetilde{\lambda_\mu}$ está definida para toda $f \in C_b(X,E)$. Sea F_μ la restricción de $\widetilde{\lambda_\mu}$ sobre $C_b(X,E)$. Sea una red $f_\alpha \to 0$ en $\left(C_b(X,E), \beta_p\right)$, por tanto $|\mu|(\|f_\alpha\|) \to 0$.
   Como $\left|\widetilde{\lambda_\mu}(f)\right| \leq |\mu(\|f\|)|$ se tiene que $\left|F_\mu(f_\alpha)\right| \to 0$ y así $F_\mu \in \left(C_b(X,E), \beta_p\right)'$.
   Inversamente, sea $F \in \left(C_b(X,E), \beta_p\right)'$. Esto implica que F es continuo con la topología de la norma sobre $C_b(X,E)$. Para $e \in E$ se define la aplicación $F_e: C_b(X) \to \mathbb{R}$ dada por $F_e(f) = F(f \otimes e)$. Se afirma que esta aplicación es β_p −continua.
   En efecto, sea la red $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$, por el lema precedente se tiene que $f_\alpha \otimes e \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$. De la β_p −continuidad de F se verifica que $F(f_\alpha \otimes e) \to 0$. Esto prueba que F_e es β_p −contínua.
   Ahora como $F_e \in \left(C_b(X), \beta_p\right)'$ puede identificarse con una única medida $\mu_e: Ba^*(X) \to \mathbb{R} \in M_p(X)$ tal que $\|F_e\| = \|\mu_e\|$, con esto se define una medida $\mu \in M_p(X,E')$ de la siguiente forma:
   Sea $\mu: Ba^*(X) \to E'$ dada por $\mu(A): E \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(A)(x) = \mu_x(A)$.
   Es de notar que $\mu(A)$ es lineal pues $\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y$ y $\mu_{\alpha x} = \alpha\mu_x$. Esto se deduce dado que $F_{x+y} = F_x + F_y$ y $F_{\alpha x} = \alpha F_x$ y de la correspondencia biunívoca entre F_x y $\mu_x; x, y \in E; \alpha \in \mathbb{R}$.
   Para la continuidad de $\mu(A)$ se tiene que:
   $$\begin{aligned} |\mu(A)(x)| = |\mu_x(A)| = {} & |\mu_x|(A) \\ & \leq \|\mu_x\| = \|F_x\| \\ & \leq \|F\|\|x\| \end{aligned}$$
   Finalmente, se afirma que μ satisface ser una medida en el sentido de Schuchat, es decir, la aplicación $\lambda_\mu: S(X, Ba^*(X), E) \to \mathbb{R}$ es continua con la topología de la convergencia uniforme sobre $S(X, Ba^*(X), E)$.
   Esto se prueba similarmente al trabajo realizado por (Fontenot, [2 Teorema 3.13]
3. De (2) sigue que $F \in (C_b(X,E), \beta_p)'$ induce una medida $\mu \in M_p(X,E')$.

Ahora esta medida induce un funcional $\Phi \in (C_b(X,E),\beta_p)'$. Se afirma que $F(f) = \Phi(f)$ para toda $f \in C_b(X,E)$. De la hipótesis es suficiente mostrar la igualdad en $C_b(X) \otimes E$ para concluir su igualdad en $C_b(X,E)$.

Sea $f \otimes e \in C_b(X) \otimes E$. Como $(\mathcal{L}_1, |\mu|(\|f\|))$ contiene a $S(X, Ba^*(X), E)$ y a $C_b(X) \otimes E$ como subespacios densos, existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ en $S(X, Ba^*(X), E)$ tal que $\varphi_n \to f \otimes e$. De la Sección 1 se tiene:

$F(f \otimes e) = \int_X f \otimes e\, d\mu = \widetilde{\lambda_\mu}(f \otimes e) = \Phi(f \otimes e)$. □

4. RESULTADOS PREVIOS A LA REPRESENTACIÓN.

Por (Katsaras, [3 Lema 2.2]), $C_b(X) \otimes E$ es $\|.\|$ −denso en $C_{rc}(X,E)$.

Del trabajo realizado por Katsaras en ese mismo artículo, Lemas 2.1 y 2.3, es conocido que $(C_{rc}(X,E), \|.\|)'$ es el espacio $M(X,E')$. Estos espacios son isómetricamente isomorfos, relacionados por:

$M(X,E') \ni \mu \mapsto \Phi_\mu \in C_{rc}(X,E)'; \Phi_\mu(h) = \int_X h d\mu$; Para $h \in C_{rc}(X,E)$.

De la Sección 1, $B(X, Ba^*(X), E)$ es la clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$ en el espacio de las funciones acotadas de X en E provisto de la topología de la convergencia uniforme.

Se define la aplicación $\pi: B(X, Ba^*(X), E) \to C_{rc}(X,E)''$,

$g \mapsto \pi(g)$ tal que $\pi(g)(\Phi_\mu) := \int_X g d\mu$; para $\mu \in M(X,E')$.

Se afirma que π esta bien definida, es decir, $\pi(g) \in C_{rc}(X,E)''$. En efecto:

- Sean $\mu, \mu_1, \mu_2 \in M(X,E')$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\pi(g)(\Phi_{\mu_1} + \Phi_{\mu_2}) = \pi(g)(\Phi_{\mu_1+\mu_2})$$
$$= \int_X g\, d(\mu_1 + \mu_2)$$
$$= \int_X g\, d\mu_1 + \int_X g\, d\mu_2$$
$$= \pi(g)(\Phi_{\mu_1}) + \pi(g)(\Phi_{\mu_2}).$$
$$\pi(g)(\alpha\Phi_\mu) = \pi(g)(\Phi_{\alpha\mu}) = \int_X g d(\alpha\mu)$$
$$= \alpha \int_X g d\mu = \alpha\pi(g)(\Phi_\mu).$$
Esto prueba la linealidad de $\pi(g)$ en $C_{rc}(X,E)'$.
- Sean $\Phi_\alpha \to 0$ una sucesión en $C_{rc}(X,E)'$ y sea $\mu_\alpha \in M(X,E')$ la medida que identifica a Φ_α.
$$|\pi(g)(\Phi_\alpha)| = \left|\int_X g d\mu_\alpha\right| \le \int_X \|g\| d|\mu_\alpha| \le \|g\|_\infty |\mu_\alpha|(X) = \|g\|_\infty \|\Phi_\alpha\| \to 0$$
Esto prueba la continuidad de $\pi(g)$ en $C_{rc}(X,E)'$.

π es lineal por la linealidad de la integral.

π es continua: sea $g \in B(X, Ba^*(X), E)$. $|\pi(g)(\Phi_\mu)| = \left|\int_X g d\mu\right| \le \int_X \|g\| d|\mu| \le \|g\|_\infty \|\Phi_\mu\|$. Luego, $\frac{|\pi(g)(\Phi_\mu)|}{\|\Phi_\mu\|} \le \|g\|_\infty$. Tomando supremo respecto a $\mu \in M(X,E')$, se sigue $\|\pi(g)\| \le \|g\|_\infty$. Esto prueba la continuidad de π.

Sea $\mathcal{L}(E,F''')$ el espacio de los operadores lineales y continuos de E en F''. Sea $m: Ba^*(X) \to \mathcal{L}(E,F'')$ una función conjunto.

Para cada $y' \in F'$, sea $m_{y'}: Ba^*(X) \to E'$ definida por $m_{y'}(A)(e) := m(A)(e)(y')$, para todo $A \in Ba^*(X)$ y para todo $e \in E$.

Sea $\widetilde{m}(A) = sup\|\sum_{i=1}^n m(A_i)(e_i)\|_{F''}$, donde el supremo es tomado sobre todas las $Ba^*(X)$ −particiones finitas $\{A_i\}$ de A y sobre todos los $e_i \in E$ tales que $\|e_i\| \le 1$.

Se denota por $M(X, \mathcal{L}(E,F''))$ el espacio de todas las medidas finitamente aditivas $m: Ba^*(X) \to \mathcal{L}(E,F'')$ tales que:

- $m_{y'} \in M(X,E')$ para cada $y \in F'$.
- $\widetilde{m}(X) < \infty$.

Se afirma que $\widetilde{m}(A) = sup\{|m_{y'}|(A); \|y'\| \le 1\}$; para todo $A \in Ba^*(X)$. En efecto,
$$\sup_{\|e_i\|\le 1}\sup_{\{A_i\}} \left\|\sum_{i=1}^n m(A_i)(e_i)\right\|_{F''}$$
$$= \sup_{\|e_i\|\le 1}\sup_{\{A_i\}}\sup_{\|y'\|\le 1} \left|\sum_{i=1}^n m(A_i)(e_i)\,(y')\right|$$
$$= \sup_{\|e_i\|\le 1}\sup_{\{A_i\}}\sup_{\|y'\|\le 1} \left|\sum_{i=1}^n m_{y'}(A_i)(e_i)\right|$$
$$= \sup_{\|y'\|\le 1} |m_{y'}|(A).$$

Por otra parte, se define el subespacio de las medidas
$$M_p(X, \mathcal{L}(E,F'')) = \{m \in M(X, \mathcal{L}(E,F''))/m_{y'} \in M_p(X,E'); \forall_{y'} \in F'\}.$$

Sea $T: C_b(X,E) \to F$ un operador lineal y norma-continuo. Para $T|_{C_{rc}(X,E)}$ se definen:

- $(T|_{C_{rc}(X,E)})': F' \to C_{rc}(X,E)'$ dado por $f \mapsto f o T|_{C_{rc}(X,E)}; f \in F'$.
- $(T|_{C_{rc}(X,E)})'': C_{rc}(X,E)'' \to F'' \to$ dado por $g \mapsto go(T|_{C_{rc}(X,E)})'; g \in C_{rc}(X,E)''$.

Para cada $A \in Ba^*(X)$ y cada $e \in E$, se define
$$m(A)(e) := \left((T|_{C_{rc}(X,E)})'' o\pi\right)(\chi_A \otimes e)$$
Es de notar que $m(A)(e)$ es un elemento de F''. Además:

- $m(A)$ es una aplicación lineal de E en F'' por construcción.
- $m(A)$ es una aplicación continua de E en F''.

$$\forall\, e \in E, |m(A)(e)| = \left|(T''o\pi)(\chi_A \otimes e)\right| \le \|T''o\pi\| \|\chi_A \otimes e\|_\infty = \|T''o\pi\|\|e\|.$$

En el siguiente teorema se muestra que m es un elemento de $M(X, \mathcal{L}(E, F''))$.

Teorema 4.1 Sea $T: C_b(X, E) \to F$ un operador lineal y norma-continuo. Sea

$$m: Ba^*(X) \to \mathcal{L}(E, F'')$$
$$A \mapsto m(A): E \mapsto F''$$
$$e \mapsto m(A)(e)$$

Entonces m es un elemento de $M(X, \mathcal{L}(E, F''))$ y se denomina la medida representación de T.

Demostración:
A lo largo de la demostración, se denotará $\left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)''$ por T''.

1. m es finitamente aditiva.
Sean $A_1, A_2 \in Ba^*$ conjuntos disjuntos y sea $e \in E$, entonces $m(A_1 \dot{\cup} A_2)(e) = (T''o\pi)\left((\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) \otimes e\right)$
$$= (T''o\pi)(\chi_{A_1} \otimes e) + (T''o\pi)(\chi_{A_2} \otimes e) = m(A_1)(e) + m(A_2)(e) = (m(A_1) + m(A_2))(e).$$
Luego $m(A_1 \dot{\cup} A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.
2. m es una medida en el sentido de Schuchat (Sección 1)
Hay que mostrar que la aplicación $\lambda_m : S(X, Ba^*(X), E) \to F''$ que induce m y dada por $\lambda_m\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)$, es continua con la topología de la convergencia uniforme sobre $S(X, Ba^*(X), E)$

   En este caso, dado que $T''o\pi$ es lineal y norma-continuo, se tiene que:
$$\lambda_m\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (T''o\pi)(\chi_{A_i} \otimes e_i) = (T''o\pi)\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i\right).$$
Esto prueba que $\lambda_m = T''o\pi$ y por tanto λ_m es norma-continua.
3. $m_{y'} \in M(X, E')$, para todo $y' \in F'$.
En la Sección 1, se definió el conjunto $M(X, E')$. Sea $y' \in F'$.
   - $m_{y'}$ es función conjunto de $Ba^*(X)$ en E':
Sean $A \in Ba^*(X)$ y sean $e_1, e_2 \in E$.
$$m_{y'}(A)(e_1 + e_2) = m(A)(e_1 + e_2)(y') = (T''o\pi)(\chi_A \otimes (e_1 + e_2))(y')$$
$$= (T''o\pi)(\chi_A \otimes e_1 + \chi_A \otimes e_2)(y')$$
$$= \left((T''o\pi)(\chi_A \otimes e_1) + (T''o\,\pi)(\chi_A \otimes e_2)\right)(y')$$
$$= (T''o\pi)(\chi_A \otimes e_1)(y') + (T''o\pi)(\chi_A \otimes e_2)(y')$$
$$= m(A)(e_1)(y') + m(A)(e_2)(y')$$
$$= m_{y'}(A)(e_1) + m_{y'}(A)(e_2)$$

     Sea $e \in E$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$m_{y'}(A)(\alpha e) = m(A)(\alpha e)(y') = (T''o\pi)(\chi_A \otimes (\alpha e))(y') = \alpha(T''o\pi)(\chi_A \otimes e)(y') = \alpha m(A)(e)(y') = \alpha m_{y'}(A)(e).$$
Esto prueba la linealidad de $m_{y'}(A)$.
Para la continuidad se tiene que
$$|m_{y'}(A)(e)| = |(T''o\pi)(\chi_A \otimes e)(y')| \le \|(T''o\pi)(\chi_A \otimes e)\|_F \|y'\| \le \|T''\|\|\pi\|\|e\|\|y'\|.$$
Tomando $K = \|T''\|\|\pi\|\|y'\| > 0$ se prueba la continuidad de $m_{y'}$.
Si $\|y'\| = 0$, entonces $m_{y'}$ es la medida nula y está en $M(X, E')$.

   - $m_{y'}$ es finitamente aditiva.
Dado que anteriormente se mostró que m es finitamente aditiva, se verifica que $m_{y'}$ también lo es.

   - $m_{y'}$ es medida.
Por lo expuesto en la Sección 1, cuando E es normado se cumple que $m_{y'}$ es medida si y sólo si $sup \sum_{i=1}^{n} \|m_{y'}(A_i)\| < \infty$, donde el supremo recorre todas las Ba^* −particiones finitas $\{A_i\}$ de X; también $sup \sum_{i=1}^{n} \|m_{y'}(A_i)\| = sup\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right|$, donde este último supremo es tomado sobre todas las Ba^* −particiones finitas $\{A_i\}$ de X y sobre todos los $e_i \in E$ tales que $\|e_i\| \le 1$.
Ahora se muestra que $sup\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right| < \infty$.
$$\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)\,(y')\right|$$

$$= \left| \left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i) \right) (y') \right|$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left((T|_{C_{rc}(X,E)})'' o\pi \right) (\chi_{A_i} \otimes e_i)(y') \right|$$
$$= \left| (T'' o\pi) \left(\sum_{i=1}^{n} (\chi_{A_i} \otimes e_i) \right) (y') \right|$$
$$\leq \left\| T'' o\pi \left(\sum_{i=1}^{n} (\chi_{A_i} \otimes e_i) \right) \right\|_{F''} \|y'\|$$
$$\leq \|T'' o\pi\| \|y'\|$$

Esta última expresión se obtiene del hecho que $T'' o\pi$ es lineal y norma-continuo; y, que $\left\| \sum_{i=1}^{n} (\chi_{A_i} \otimes e_i) \right\| \leq 1.$

Como esto es válido para cualquier partición finita de X y toda colección $\{e_i\}$ con $\|e_i\| \leq 1$, se concluye que $sup \left| \sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i) \right| < \infty.$

- $m_{y',e} \in M(X)$, para todo $e \in E$.

Por definición, $m_{y',e}(A) = m(A)(e)(y')$, para todo $A \in Ba^*(X)$. De lo visto anteriormente $m_{y',e}(A)$ está en $\mathbb{R}$ y $m_{y',e}$ es finitamente aditiva.

Esto prueba que $m_{y',e}$ es una función conjunto finitamente aditiva de $Ba^*(X)$ en $\mathbb{R}$.

Para mostrar que $m_{y',e} \in M(X)$, se muestra que $m_{y',e}$ induce un funcional lineal continuo sobre $(C_b(X), \|.\|)$.

En efecto, sea $\phi(f) = \int_X f dm_{y',e}$; para cada $f \in C_b(X)$. Sea la sucesión $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X), \|.\|)$, luego:

$$|\phi(f_\alpha)| = \left| \int_X f_\alpha \, dm_{y',e} \right|$$
$$\leq \int_X \|f_\alpha\| d|m_{y',e}|$$
$$\leq \|f_\alpha\|_\infty \int_X d|m_{y',e}|$$
$$= \|f_\alpha\|_\infty |m_{y',e}|(X) \to 0.$$

4. $\widetilde{m}(X) < \infty$.
De las definiciones dadas, sigue que: $\widetilde{m}(X) = \sup_{\|y'\| \leq 1} |m_{y'}|(X)$. Sea $y' \in F'$ fijo tal que $\|y'\| \leq 1$.

$$|m_{y'}|(X) = sup \left| \sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i) \right|;$$

donde el supremo recorre todas las particiones finitas $\{A_i\}$ de X y todos los $e_i \in E$ tal que $\|e_i\| \leq 1$.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)(y') \right|$$
$$= \left| \left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i) \right) (y') \right|$$
$$= \left| \left(\sum_{i=1}^{n} (T'' o\pi)(\chi_{A_i} \otimes e_i) \right) (y') \right|$$
$$= \left| (T'' o\pi) \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i \right) (y') \right|$$
$$\leq \left\| (T'' o\pi) \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i \right) \right\|_{F''} \|y'\|$$
$$\leq \|T'' o\pi\|$$

Como esto es válido para cualquier partición finita de X y cualquier colección $\{e_i\}$, con $\|e_i\| \leq 1$, entonces es válido para el supremo y por tanto $\widetilde{m}(X) < \infty$. ☐

Previo a demostrar el siguiente teorema, es necesario recordar que:

1. Si $f \in C_b(X)$, f es Baire-medible (Wheeler,[12p. 108]).
2. Para μ, una medida positiva, se verifica que:
   a. Si $0 \leq f \leq g$, donde g es integrable respecto a μ y f es medible, entonces f también es integrable respecto a μ (Berberian, [1 p. 78 Teorema 1]).
   b. Si $f \geq 0$ es integrable, entonces $\int_X f d\mu = sup \int_X \varphi du$, donde φ varía sobre todas las funciones simples tales que $0 \leq \varphi \leq f$ (Berberian, p. 80 Ejercicio 2]).
3. Si $\mu \in M_p(X, E') \subseteq M_\sigma(X, E')$, induce un funcional lineal continuo $\widetilde{\lambda_\mu}: \mathcal{L}_1 \to \mathbb{R}$ que verifica $|\widetilde{\lambda_\mu}| \leq p(f) = |\mu|^*(\|f\|)$, para toda $f \in \mathcal{L}_1$. Además $B(X, Ba^*(X), E)$ es subconjunto de $\mathcal{L}_1$ y cuando la seminorma p está dada por $|\mu|, \mathcal{L}_1$ contiene a $C_b(X) \otimes E$ y a $S(X, Ba^*(X), E)$ como subespacios densos (Sección 2).
4. Si $\mu \in M_p(X, E')$, entonces $|\mu| \in M_p(X)$(Vielma, [11 Teorema 2.8]) y esta $|\mu|$ se corresponde con un funcional $\phi_{|\mu|}$ β_p −continuo sobre $C_b(X)$ (Wheeler, [12 Teorema 11.8]).
5. Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p −denso en $C_b(X, E)$, entonces $\left(C_b(X, E), \beta_p \right)'$ se identifica con $M_p(X, E')$. Por tanto cada $\mu \in M_p(X, E')$ induce un funcional Φ_μ β_p −continuo

sobre $C_b(X,E)$; además, $C_b(X,E) \subseteq \mathcal{L}_1(\mu, X, E)$ (Teorema 3.2).

Definición 4.1 Sea $\mathcal{M}$ subconjunto de $M_p(X,E')$ tal que $\sup_{\mu\in M}|\mu|(X) < \infty$. Se dice que $\mathcal{M}$ satisface la condición C_p, si para toda función f de X en un espacio métrico separable Y y para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subseteq Y$ tal que $\sup_{\mu\in M}|\mu|(X - f^{-1}(K)) < \varepsilon$.

Teorema 4.2 Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p −denso en $C_b(X,E)$ y $\mu \in M_p(X,E')$, entonces para todo $A \in Ba^*(X)$,

1. El funcional $\Phi_A: C_{rc}(X,E) \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi_A(h) := \int_A h d\mu$, es $\beta_p|_{C_{rc}(X,E)}$ −continuo y puede ser extendido a un único funcional lineal β_p −continuo $\overline{\Phi_A}: C_b(X,E) \to \mathbb{R}$, y se escribirá $\int_A f\, d\mu := \overline{\Phi_A}(f)$; para $f \in C_b(X,E)$
2. $\left|\int_A f\, d\mu\right| \le \int_A \|f\| d|\mu|$; para $f \in C_b(X,E)$.

.

Demostración:

1. Para $A \in Ba^*(X), \mu \in M_p(X,E')$ y $h \in C_{rc}(X,E)$, se define $\int_A h d\mu := \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)(h(x_i))$, donde $P = \{A_i\}$ es $Ba^*(X)$ −partición de A y $x_i \in A_i$ (Katsaras, [3 p. 14-15]).
Similar a lo realizado en el Lema 2.1, se obtiene $\left|\int_A h d\mu\right| \le \int_A \|h\| d|\mu|$.
Sea una red h_α en $C_{rc}(X,E)$ tal que $h_\alpha \xrightarrow{\beta_p|C_{rc}(X,E)} 0$, Entonces
$$|\Phi_A(h_\alpha)| = \left|\int_A h_\alpha d\mu\right| \le \int_A \|h_\alpha\| d|\mu| \le \int_X \|h_\alpha\| d|\mu| = \phi_{|\mu|}(\|h_\alpha\|).$$
Por la β_p −continuidad de $\phi_{|\mu|}$ y dado que $\|h_\alpha\| \xrightarrow{\beta_p} 0$ en $C_b(X)$ (Teorema 3.1), se concluye la β_p −continuidad de Φ_A sobre $C_{rc}(X,E)$.
Dado que $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X,E)$ y de la hipótesis, se concluye la β_p −densidad de $C_{rc}(X,E)$ en $C_b(X,E)$. Por tanto, Φ_A puede ser extendido de manera única a un funcional lineal β_p −continuo sobre $C_b(X,E)$ denotado por $\overline{\Phi_A}$.
2. Sea $f \in C_b(X,E)$ y sea h_α en $C_{rc}(X,E)$ tal que $h_\alpha \xrightarrow{\beta_p} f$, entonces $h_\alpha - f \xrightarrow{\beta_p} 0$. Con esto sigue que
$$\left|\int_A \|h_\alpha\| d|\mu| - \int_A \|f\| d|\mu|\right| = \left|\int_A (\|h_\alpha\| - \|f\|) d|\mu|\right| \le \int_A \big|\, \|h_\alpha\| - \|f\|\, \big| d|\mu| \le \int_X \big|\|h_\alpha\| - \|f\|\big|\, d|\mu| = \phi_{|\mu|}(\big|\|h_\alpha\| - \|f\|\big|) \to 0$$
De aquí $\int_A \|f\| d|\mu| = \lim_\alpha \int_A \|h_\alpha\| d|\mu|$.
De la parte (1) sigue que:
$$\overline{\Phi_A}(f) = \overline{\Phi_A}\left(\lim_\alpha h_\alpha\right) = \lim_\alpha \Phi_A(h_\alpha).$$
Por tanto,
$$\left|\int_A f d\mu\right| = \lim_\alpha \left|\int_A h_\alpha d\mu\right| \le \lim_\alpha \int_A \|h_\alpha\| d|\mu| = \int_A \|f\| d|\mu|. \qquad \square$$

Definición 4.2 Sea $A \in Ba^*(X), m \in M\big(X, \mathcal{L}(E,F'')\big)$ y $h \in C_{rc}(X,E)$. Se define $\int_A h\, dm = \lim_{m(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(h(x_i))$, donde $P = \{A_i\}$ es $Ba^*(X)$ −partición de A y $x_i \in A_i$.

Cabe resaltar que como F'' es Banach, nuevamente Katsaras garantiza la existencia del límite referido en esta definición.

Teorema 4.3 Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p −denso en $C_b(X,E), \mu \in M_p\big(X, \mathcal{L}(E,F'')\big)$ y el conjunto $\{\mu_{y'}: y' \in F'\}$ satisface la condición (C_p), entonces para todo $A \in Ba^*(X)$,

1. El funcional $S_A: C_{rc}(X,E) \to F''$ definido por $S_A(h) := \int_A h d\mu$, es $\big(\beta_p|_{C_{rc}(X,E)}, \|.\|_{F''}\big)$ −continuo y puede ser extendido a un único funcional lineal $\big(\beta_p, \|.\|_{F''}\big)$ −continuo $\overline{S_A}: C_b(X,E) \to F''$, y se escribirá $\int_A f d\mu := \overline{S_A}(f)$; para $f \in C_b(X,E)$.
2. Para cada $y' \in F', \big(\int_A f\, d\mu\big)(y') = \int_A f\, d\mu_{y'}$: para $f \in C_b(X,E)$.

Demostración:

1. Es de notar que $\int_A h d\mu \in F''$. De la definición precedente, para $y' \in F'$,
$$\left(\int_A h d\mu\right)(y') = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\big(h(x_i)\big)(y') = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu_{y'}(A_i)\big(h(x_i)\big) = \int_A h d\mu_{y'} \quad (\xi)$$
Por hipótesis el conjunto $\{\mu_{y'}: y' \in F'\}$ satisface la condición (C_p) y de (Nowak, [5 Lema 4]) sigue que el

conjunto $\{\phi|_{|\mu_{y'}|} : y' \in F'\}$ es β_p −equicontinuo.
Dado $\varepsilon > 0$ existe una β_p −vecindad V en $C_b(X)$ tal que $\left|\phi|_{|\mu_{y'}|}(f)\right| < \varepsilon$, para cada $f \in V$ y cada $y' \in F'$.
Sea ahora una red h_α en $C_{rc}(X, E)$ tal que $h_\alpha \overset{\beta_p|C_{rc}(X,E)}{\rightarrow} 0$. Entonces $\|h_\alpha\| \overset{\beta_p}{\rightarrow} 0$ en $C_b(X)$. Esto implica que para V existe α_0 tal que $\|h_\alpha\| \in V$, siempre que $\alpha \geq \alpha_0$.
Para $y' \in F'$ y empleando(ξ) se tiene

$$|S_A(h_\alpha)(y')| = \left|\left(\int_A h_\alpha d\mu\right)(y')\right|$$
$$= \left|\int_A h_\alpha d\mu_{y'}\right| \leq \int_A \|h_\alpha\| d|\mu_{y'}|$$
$$\leq \int_X \|h_\alpha\| d|\mu_{y'}|$$
$$= \phi_{|\mu_{y'}|}(\|h_\alpha\|) < \varepsilon; para\ todo\ \alpha \geq \alpha_0$$

Tomando supremo sobre $\|y'\| \leq 1$ sigue que $\|S_A(h_\alpha)\| < \varepsilon$; para todo $\alpha \geq \alpha_0$.
Esto prueba que S_A es $(\beta_p|_{C_{rc}(X,E)}, \|.\|_{F''})$ −continuo.

Similar que en la prueba del teorema anterior, $C_{rc}(X, E)$ es β_p −denso en $C_b(X, E)$ y por tanto S_A se extiende de manera única a un funcional lineal $(\beta_p, \|.\|_{F''})$ −continuo sobre $C_b(X, E)$, denotado por $\overline{S_A}$.

2. Sea $f \in C_b(X, E)$ y sea $\{h_\alpha\}$ una red en $C_{rc}(X, E)$ tal que $h_\alpha \overset{\beta_p}{\rightarrow} f$
Por la parte (1) $\int_A f d\mu = \lim_\alpha \int_A h_\alpha d\mu$.
De aquí y por (ξ), para cada $y' \in F'$,

$$\left(\int_A f d\mu\right)(y')$$
$$= \lim_\alpha \left(\left(\int_A h_\alpha d\mu\right)(y')\right)$$
$$= \lim_\alpha \left(\int_A h_\alpha d\mu_{y'}\right) = \int_A f d\mu_{y'}.$$

Donde la última igualdad es consecuencia del teorema anterior.

□

Lema 4.1 Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p −denso en $C_b(X, E), \mu \in M_p(X, \mathcal{L}(E, F''))$ y el conjunto $\{\mu_{y'} : y' \in F', \|y'\| \leq 1\}$ satisface la condición (C_p), entonces para todo $A \in Ba^*(X)$,

1. $|\mu_{y'}|(A)$
$= sup\{|\int_A f d\mu_{y'}| : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1\}$.
$= sup\{|\int_A h d\mu_{y'}| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1\}$.
2. $\tilde{\mu}(A)$
$= sup\left\{\left\|\int_A f d\mu\right\|_{F''} : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1\right\}$
$= sup\left\{\|\int_A h d\mu\|_{F''} : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1\right\}$.

Demostración:
1.
- $sup\{|\int_A f d\mu_{y'}| : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1\} \leq |\mu_{y'}|(A)$.

  Sea $A \in Ba^*(X)$, sea $f \in C_b(X, E)$ tal que $\|f\| \leq 1$. Sea $y' \in F'$ tal que $\|y'\| \leq 1$. Del teorema 4.2 sigue que:
  $$\left|\int_A f d\mu_{y'}\right| \leq \int_A \|f\| d|\mu_{y'}| \leq |\mu_{y'}|(A).$$
  Tomando supremo sobre $\|f\| \leq 1$ se obtiene la desigualdad.

- $|\mu_{y'}|(A) \leq \sup\{|\int_A f d\mu_{y'}| : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1\}$.
  Por la definición de $|\mu_{y'}|(A)$, dado $\varepsilon > 0$ existe una $Ba^*(X)$ −partición $\{A_i\}$ de A y una colección $\{e_i\}$ con $e_i \in E, \|e_i\| \leq 1$, tal que
  $|\mu_{y'}|(A) < \left|\sum_{i=1}^n \mu_{y'}(A_i)(e_i)\right| + \frac{\varepsilon}{3} = \left|\sum_{i=1}^n \mu_{y',e_i}(A_i)\right| + \frac{\varepsilon}{3}$.
  Como $|\mu_{y',e_i}| \in M(X)$, de la regularidad de estas medidas existen zero sets $Z_i \subseteq A_i$ tales que $|\mu_{y',e_i}|(A_i) < |\mu_{y',e_i}|(Z_i) + \frac{\varepsilon}{3n}$. (a)
  Por cada i, j, se escogen (Wheeler, [12 p. 115]; Fontenot, [2 p. 852]):
  - Cozeros disjuntos D_i con $Z_i \subseteq D_i$ y $|\mu_{y',e_i}|(D_i - Z_i) < \frac{\varepsilon}{3n}$. (b)
  - Funciones f_i continuas de X en $\mathbb{R}$ tales $0 \leq f_i \leq 1, f_i = 1$ en Z_i y $f_i = 0$ en $X - D_i$.

  Con esto se define $h = \sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i$. Se verifica que $h \in C_b(X) \otimes E$ y $\|h\| \leq 1$.
  Además,
  $$\int_A h\, d\mu_{y'} = \sum_{i=1}^n \int_A f_i \otimes e_i d\mu_{y'} = \sum_{i=1}^n \int_A f_i d\mu_{y',e_i}$$
  $$= \sum_{i=1}^n \int_{A \cap D_i} f_i d\mu_{y',e_i}.$$
  Por otra parte, $\left|\sum_{i=1}^n \mu_{y',e_i}(A_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \mu_{y',e_i}(A_i) - \sum_{i=1}^n \mu_{y',e_i}(Z_i) + \sum_{i=1}^n \mu_{y',e_i}(Z_i) - \sum_{i=1}^n \int_{A \cap D_i} f_i d\mu_{y',e_i} + \int_A h d\mu_{y'}\right|$.

$\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(A_i - Z_i)\right| +$
$\left|\sum_{i=1}^{n} \int_{Z_i} f_i d\mu_{y',e_i} - \int_{A\cap D_i} f_i d\mu_{y',e_i}\right| +$
$\left|\int_A h d\mu_{y'}\right|.$
$\leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_{y',e_i}|(A_i - Z_i) +$
$\sum_{i=1}^{n} |\mu_{y',e_i}|(D_i - Z_i) + \left|\int_A h d\mu_{y'}\right|.$
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_A h d\mu_{y'}\right|$, por (a) y (b).
Luego, $|\mu_{y'}|(A) < \varepsilon + \left|\int_A h d\mu_{y'}\right|$.
Como ε fue arbitrario se obtiene

$$|\mu_{y'}|(A) \leq \left|\int_A h d\mu_{y'}\right| \leq sup\left\{\left|\int_A h d\mu_{y'}\right| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1\right\},$$

Además,
$sup\{|\int_A h d\mu_{y'}| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1\} \leq sup\{|\int_A f d\mu_{y'}| : f \in C_b(X,E), \|f\| \leq 1\}$.
Esto completa la prueba de la igualdad de ambos supremos.

2. Sea $A \in Ba^*(X)$. De lo expuesto en la Sección 4, es conocido que $\tilde{\mu}(A) = sup\{|\mu_{y'}|(A); \|y'\| \leq 1\}$.
Del ítem anterior y por el teorema precedente, se tiene que $\tilde{\mu}(A)$
$= sup\{|\int_A f d\mu_{y'}| : f \in C_b(X,E); \|f\| \leq 1; \|y'\| \leq 1\}$
$= sup\{|\int_A h d\mu_{y'}| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1; \|y'\| \leq 1\}$
$= sup\{|(\int_A f d\mu)(y')| : f \in C_b(X,E); \|f\| \leq 1; \|y'\| \leq 1\}$
$= sup\{|(\int_A h d\mu)(y')| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1; \|y'\| \leq 1\}$
$= sup\left\{\|\int_A f d\mu\|_{F''} : f \in C_b(X,E); \|f\| \leq 1\right\}$
$= sup\left\{\|\int_A h d\mu\|_{F''} : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1\right\}$
□

5. TEOREMA DE REPRESENTACIÒN

En esta sección se dan condiciones para representar un operador lineal continuo sobre el espacio $C_b(X,E)$ provisto de la topología estricta β_p, en un espacio normado F.

Lema 5.1 Sea $C_b(X) \otimes E$ β_p −denso en $C_b(X,E)$ y sea F un espacio normado.
Sea $S: C_{rc}(X,E) \to F$ un operador lineal $(\beta_p, \|.\|)$ −continuo. Se definen:

- $i_F: F \to F''$como el embebimiento canónico dado por $i_F(y)(y') = y'(y)$ y $j_F: i_F(F) \to F$ la inversa de i_F.
- $S': F' \to (C_{rc}(X,E), \beta_p)'$ dado por $f \mapsto foS; f \in F'$, considerando en F' y en $(C_{rc}(X,E), \beta_p)'$la topología de la norma.
- $S'': C = \left((C_{rc}(X,E), \beta_p)'; \|.\|\right)' \to F''$ dado por $g \mapsto goS'; g \in C$, considerando en C y en F'' la topología de la norma.
- $\pi: B(X, Ba^*(X), E) \to C$, la aplicación $g \mapsto \pi(g)$ dada por $\pi(g)(\Phi_\mu) \coloneqq \int_X g d\mu$; con $\mu \in M_p(X,E')$ y Φ_μ el funcional β_p −continuo sobre $C_{rc}(X,E)$ que se identifica con μ.
- m como medida representación de S, tal como en el teorema 4.1 pues $\beta_p \leq \|.\|$ (Vielma, [11 Teorema 2.9]).

Entonces la aplicación $S''o\pi: B(X, Ba^*(X), E) \to F''$ verifica que:

1. $S''o\pi(g) = \int_X g\, dm$; para $g \in B(X, Ba^*(X), E)$.
2. Para cada $y' \in F', (S''o\pi)(g)(y') = \int_X g\, dm_{y'}$; para $g \in B(X, Ba^*(X), E)$.
3. $(S''o\pi)(C_{rc}(X,E)) \subseteq i_F(F)$
4. $S(h) = j_F(\int_X h dm)$; para $h \in C_{rc}(X,E)$.
5. Para cada $y' \in F', y'(S(h)) = \int_X h\, dm_{y'}$; para $h \in C_{rc}(X,E)$.

Demostración:
Por hipótesis se deduce que $C_{rc}(X,E)$ es β_p −denso en $C_b(X,E)$ y por tanto $(C_{rc}(X,E), \beta_p)' = (C_b(X,E), \beta_p)'$. Por el teorema 3.2 se concluye que $(C_{rc}(X,E), \beta_p)' = M_p(X,E')$.

1. Para $g \in B(X, Ba^*(X), E)$ existe una sucesión de funciones simples $\left\{\varphi_n = \sum_{i=1}^{Nn} \chi_{A_{i,n}} \otimes e_{i,n}\right\}$ que la alcanza.
Puesto que $S''o\pi$ y la integral son operadores lineales y continuos, $(S''o\pi)(g) = \lim_n (S''o\pi)(\varphi_n) =$
$$\lim_n \sum_{i=1}^{Nn} (S''o\pi)\left(\chi_{A_{i,n}} \otimes e_{i,n}\right)$$
$$= \lim_n \sum_{i=1}^{Nn} m(A_{i,n})(e_{i,n})$$
$$= \lim_n \int_X \varphi_n\, dm = \int_X g\, dm.$$
2. Sea $g \in B(X, Ba^*(X), E)$ y $y' \in F'$.
Sigue que $(S''o\pi)(g) = S''(\pi(g)) = \pi(g)oS'$.
Por tanto, $(S''o\pi)(g)(y') = (\pi(g)oS')(y') = \pi(g)(S'(y')) = \pi(g)(y'oS)$.

Puesto que $y'oS \in \left(C_{rc}(X,E),\beta_p\right)'$ se identifica con $\mu_{y'oS} \in M_p(X,E')$, $(S''o\,\pi)(g)(y') = \int_X g d\mu_{y'oS}$. (*)
Ahora se muestra que $\mu_{y'oS} = m_{y'}$. En efecto, sea $A \in Ba^*(X)$ y $e \in E$. Dado que m es la medida de representación de S y de (*), se tiene que

$$m_{y'}(A)(e) = m(A)(e)(y')$$
$$= (S''o\pi)(\chi_A \otimes e)(y')$$
$$= \int_X \chi_A \otimes e\, d\mu_{y'oS} = \mu_{y'oS}(A)(e).$$

3. Para cada $h \in C_{rc}(X,E)$, sea la aplicación $\Lambda_h: \left(C_{rc}(X,E),\beta_p\right)' \to \mathbb{R}$ dada por $\Lambda_h(\Phi) = \Phi(h) = \int_X h\, d\mu = \pi(h)(\Phi)$, donde μ se identifica con Φ. Esto prueba que $\Lambda_h = \pi(h)$.
Por otra parte, para cada $y' \in F'$ se verifica que
$$\left(S''(\pi(h))\right)(y') = \left(S''(\Lambda_h)\right)(y')$$
$$= (\Lambda_h oS')(y') = \Lambda_h\left(S'(y')\right)$$
$$= \Lambda_h(y'oS) = (y'oS)(h) = y'\left(S(h)\right)$$
$$= i_F\left(S(h)\right)(y').$$
Por tanto, $(S''o\pi)(h) \in i_F(F)$; para toda $h \in C_{rc}(X,E)$.
4. Del ítem anterior y (1), para cada $h \in C_{rc}(X,E)$, sigue que
$$S(h) = j_F\left(i_F\left(S(h)\right)\right)$$
$$= j_F\left((S''o\pi)(h)\right) = j_F\left(\int_X h\, dm\right).$$
5. Sea $h \in C_{rc}(X,E), y' \in F'$. Del ítem precedente,
$$y'\left(S(h)\right) = y'\left(j_F\left(\int_X h\, dm\right)\right)$$
$$= i_F\left(j_F\left(\int_X h\, dm\right)\right)(y')$$
$$= \left(\int_X h\, dm\right)(y').$$
De los ítems (1) y (2) se concluye que $y'\left(S(h)\right) = \int_X h\, dm_{y'}$.

Teorema 5.1 Sea $C_b(X) \otimes E$ β_p $-$denso en $C_b(X,E)$ y sea F un espacio de Banach. Si $T: C_b(X,E) \to F$ es un operador lineal $\left(\beta_p, \|.\|\right)$ $-$continuo, entonces:

1. La medida representación m de T es un elemento de $M_p\left(X, \mathcal{L}(E,F'')\right)$.
2. El conjunto $\left\{m_{y'}: y' \in F', \|y'\| \le 1\right\}$ satisface la condición $\left(C_p\right)$.
3. Para cada $y' \in F', y'\left(T(f)\right) = \int_X f\, dm_{y'}$; para $f \in C_b(X,E)$.
4. Para cada $f \in C_b(X,E), \int_X f\, dm \in i_F(F) y\ T(f) = j_F\left(\int_X f\, dm\right)$.
5. $\|T\| = \tilde{m}(X)$.

Demostración:

1. Sea S la restricción de T en $C_{rc}(X,E)$. Por (5) del lema precedente, para cada $y' \in F'$, $y'\left(S(h)\right) = \int_X h\, dm_{y'}$; para toda $h \in C_{rc}(X,E)$. De la parte inicial de la demostración de este lema $(C_{rc}(X,E),\beta_p)' = M_p(X,E')$ y por tanto $m_{y'} \in M_p(X,E')$.
2. Sea $H = \{y'oT; y' \in F'; \|y'\| \le 1\}$. Notar que H es un conjunto de funcionales sobre $C_b(X,E)$ β_p $-$equicontinuo. En efecto, para $\varepsilon > 0$ sea la bola B_ε en F, centrada en 0 y radio ε. Por la continuidad de T, existe una β_p $-$vecindad V en $C_b(X,E)$ tal que si $f \in V$, entonces $T(f) \in B_\varepsilon$.
Esto implica que $(y'oT)(f) = y'\left(T(f)\right) \le \|y'\|\|T(f)\| < \varepsilon$, para toda $f \in V$ y para todo y' con $\|y'\| \le 1$. Luego H es β_p $-$equicontinuo y por tanto es acotado en norma.
Por otra parte, cada uno de estos funcionales se identifica con una medida $\mu_{y'oT}$ en $M_p(X,E')$ y por (Nowak, [5 Lema 4]) el conjunto de estas medidas $\left\{\mu_{y'oT}; y' \in F'; \|y'\| \le 1\right\}$ satisface la condición $\left(C_p\right)$.
De la parte (1) se tiene que $\mu_{y'oT} = m_{y'}$.
3. Sea $f \in C_b(X,E)$ y sea h_α una red en $C_{rc}(X,E)$ que β_p $-$converge a f. Para cada $y' \in F'$ se tiene que $y'oT$ es β_p $-$continuo y por (5) del lema precedente, $(y'oT)(f) = \lim_\alpha (y'oT)(h_\alpha) = \lim_\alpha \int_X h_\alpha dm_{y'}$.
Por el Teorema 4.2 se concluye que $(y'oT)(f) = \int_X f\, dm_{y'}$.
4. Por (1) y (3) del lema precedente, se tiene que para toda $h \in C_{rc}(X,E), \int_X h\, dm \in i_F(F)$. Por el Teorema 4.3 se concluye que $\int_X f\, dm \in i_F(F)$, para toda $f \in C_b(X,E)$, pues $i_F(F)$ es Banach y el funcional extendido preserva la imagen del funcional original.
Por (4) del lema anterior, $T(h) = j_F\left(\int_X h\, dm\right)$. Sea $f \in C_b(X,E)$ y sea h_α una red en $C_{rc}(X,E)$ que β_p $-$converge a f. Como T es β_p $-$continuo,

$$\begin{aligned} T(f) &= \lim_{\alpha} T(h_\alpha) \\ &= \lim_{\alpha} j_F\left(\int_X h_\alpha\ dm\right) \\ &= j_F\left(\lim_{\alpha} \int_X h_\alpha\ dm\right) \\ &= j_F\left(\int_X f\ dm\right). \end{aligned}$$

5. Por definición, $\|T\| = sup\ \|T(f)\|$ donde el supremo recorre todas las funciones $f \in C_b(X,E)$ tal que $\|f\| \leq 1$.
   Del ítem precedente, $\|T(f)\| = \left\|j_F\left(\int_X f\ dm\right)\right\| = \left\|\int_X f\ dm\right\|$.
   Aplicando supremo y del Lema 4.1, se obtiene que $\|T\| = \widetilde{m}(X)$.

6. CONCLUSIONES

1. Para cada conjunto distinguido $D \subseteq \beta X - X$, se define una topología localmente convexa sobre $C_b(X,E)$, generada por la familia de seminormas $f \mapsto \|f\|_{h_D}$, donde h_D es una función real-valuada sobre βX que se desvanece en el infinito y se anula en D.
2. La topología perfecta β_p es la topología limite inductivo de las topologías β_D, cuando D recorre la colección de todos los conjuntos distinguidos de $\beta X - X$.
3. Bajo la hipótesis que $C_b(X) \otimes E$ es β_p −denso en $C_b(X,E)$, se tiene que $\left(C_b(X,E),\beta_p\right)'$ es el espacio de medidas perfectas $M_p(X,E')$. Además $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X,E)$ y por tanto $C_{rc}(X,E)$ también es β_p −denso en $C_b(X,E)$. De aquí resulta que $\left(C_{rc}(X,E),\beta_p\right)' = M_p(X,E')$ para el caso presentado, con E espacio normado.
4. Dado un operador lineal norma-continuo, de $C_b(X,E)$ en un espacio normado F, es posible construir una medida de representación. Se mostraron algunas propiedades que poseen estas medidas y luego se dieron las condiciones para representar un operador β_p −norma continuo con F espacio de Banach.
5. La representación de operadores se basa en la dualidad entre $C_{rc}(X,E)$ y $M(X,E')$ mostrada en (Katsaras, [3]). De hecho, el trabajo de (Nowak, [5]) parte de operadores sobre $C_{rc}(X,E)$ que luego son extendidos a $C_b(X,E)$ bajo la hipótesis de que $C_b(X) \otimes E$ es β_p −denso en $C_b(X,E)$. La densidad garantiza que la extensión sea única.
6. Un resultado clave obtenido por (Vielma, [11]) el cual es la dualidad entre $M_p(X,E')$ y $\left(C_b(X,E),\beta_p\right)'$ fue utilizado en la representación descrita. Gracias a este trabajo fue posible extender la teoría de representación sobre $C_{rc}(X,E)$ al caso β_p −continuo sobre $C_b(X,E)$.
7. Otros estudios de representación de operadores lineales continuos podrían realizarse, considerando un caso más general con los espacios E y F localmente convexos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **Sterling K. Berberian, Measure and Integration,** *Chelsea Publishing Company,* Bronx New York, 1965.

[2]. **R. Fontenot**, *Strict Topology for Vector-Valued Functions*, Can. J. Math.; Vol. XXVI, No. 4, 1974.

[3]. **A. Katsaras**, *Continuous Linear Functionals on Spaces of Vector-Valued Functions, Bull. Soc. math. Grèce*, Tome 15, 1974.

[4]. **S. Khurana**, *Topologies on Spaces of Vector-Valued Continuous Functions, Transactions of the AMS*, Volume 241, 1978.

[5]. **M. Nowak**, *Operators on Spaces of Bounded Vector-Valued Continuous Functions with Strict Topologies, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Function Spaces*, Article ID 407521, 2014.

[6]. **W. Rudin**, *Análisis Funcional*, Editorial Reverté S.A., España 2002.

[7]. **A. Schuchat**, *Integral Representation Theorems in Topological Vector Spaces, Transactions of the AMS*, Volume 172, 1972

[8]. **S. Solís**, *La Topología Perfecta sobre espacios de funciones continuas a valores vectoriales, Tesis de Magíster, Universidad de Concepción*, Chile 2015.

[9]. **D. Sondermann**, *Masse auf lokalbeschränkten Raümen. Annales de l'institut Fourier*, Tome 19 No. 2, 1969.

[10]. **C. Swartz**, *Functional Analysis Introduction*, Marcel Dekker Inc, USA 1992.

[11]. **J. Vielma**, *Vector Valued Perfect Measures and Strict Topology*, Ph. D. Thesis, University of Iowa, 1986.

[12]. **R. Wheeler**, *A survey of Baire Measures and Strict Topologies*, Expositiones Mathematicae, 1983.