

PRUEBAS DE HIPÓTESIS APLICADAS AL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

Ramos Miriam¹, Plata Wendy²

Resumen. En el presente artículo se desarrollan los principios teóricos de las pruebas de hipótesis aplicadas al control estadístico de procesos, con la finalidad de evidenciar la relación existente entre los contrastes de hipótesis relativos a medias y las cartas de control para monitorear los valores promedio de ciertas características a controlarse en procesos productivos, concretamente en el contexto de la producción de banano en el Ecuador. En este sentido, se realiza una ilustración aplicativa del uso de las cartas de control en el análisis univariante y multivariante de características a ser monitoreadas para la toma de decisiones en las etapas de cosecha y post-cosecha de la fruta.

Palabras claves: pruebas de hipótesis, control estadístico, procesos, cartas de control, calidad, producción de banano.

Abstract. This paper gives the theoretical principles of hypothesis tests on statistical process control, in order to show the relationship between hypothesis tests related to means and control charts for monitoring the averages of several characteristics to be controlled into production processes, particularly in Ecuadorian banana production. In this sense, it has been done an illustration of univariate and multivariate analysis in the control charts for characteristics to be monitored in order to make decisions related to harvest and post-harvest stages of the fruit.

Keywords: hypothesis testing, statistical control, processes, control chart, quality, banana production.

Recibido: Mayo 2015.

Aceptado: Mayo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de procedimientos adecuados para el estudio y control de los procesos productivos, resulta fundamental cuando se desea mantener un nivel óptimo de la calidad en los productos; y, en este sentido la Estadística juega un papel importante en todas las actividades relacionadas con la calidad, al proporcionar técnicas aplicadas al control estadístico de procesos, las cuales han sido implementadas en organizaciones centradas en el cumplimiento de altos estándares de calidad. En este contexto, el método más utilizado para el control estadístico de la calidad es el análisis univariantes, es decir, el control de una única característica de calidad; sin embargo, existen muchas situaciones en las cuales se hace necesario controlar simultáneamente dos o más características, correlacionadas, que intervienen en un mismo proceso a la vez, de aquí que el conocimiento y aplicación de técnicas estadísticas multivariantes resulta esencial.

En este artículo se exponen los fundamentos teóricos de las pruebas de hipótesis para vectores de medias, que constituyen la base para la construcción de cartas de control univariantes y multivariantes, diseñadas para monitorear los valores promedios de las variables involucradas en un proceso; finalizando a manera de ilustración, con una aplicación de las cartas de control en el proceso de producción de banano.

2. METODOLOGÍA

En este artículo primeramente se explicaron los principios teóricos bajo los cuales se plantean los contrastes de hipótesis relativos a medias, tanto para el caso univariante como el multivariante, siendo la varianza conocida o desconocida. Posteriormente, se detalló la definición y utilidad de las cartas de control para medias en el control estadístico de procesos, haciendo especial énfasis en la estrecha relación entre dichas cartas y las pruebas de hipótesis, en el sentido de que ambas establecen contrastes respecto al promedio de la variable a ser estudiada. Finalmente, se realizó una ilustración de las cartas de control aplicadas en el monitoreo de características del proceso producción de banano en una hacienda del Ecuador.

3. FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS PARA CONTRASTES DE HIPÓTESIS RELATIVOS A MEDIAS

En el análisis univariante se estudia una característica X de n unidades de investigación, por ejemplo el *peso* en libras de 100 personas, mientras que, en el caso multivariante se estudian p características de las n unidades de investigación, que pueden ser el *peso*, *estatura*, *índice de masa corporal*, entre otras, medidas en las mismas 100 personas, lo cual lleva a pensar ya no en escalares, sino en vectores aleatorios que pueden representarse por:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

¹Ramos Miriam, MPC, Profesora, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: mvrmosb@espol.edu.ec).

²Plata Wendy, MPC, Profesora, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: wplata@espol.edu.ec)

Cada una de las coordenadas de este vector constituye una característica de interés, estructurándose así lo que se conoce como vector aleatorio p -variado [1].

En el caso **univariante**, la función de densidad de la Variable Aleatoria Normal, está dada por:

Exp. (1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; -\infty < x < \infty$$

Siendo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ una variable aleatoria que tiene como parámetros los números reales μ y σ^2 . Véase Figura 1:

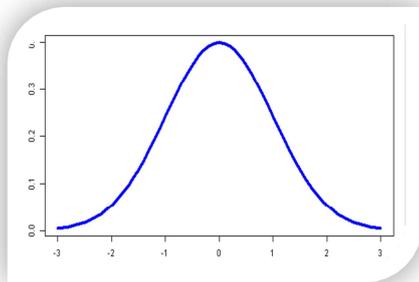


Figura 1: Densidad de la Variable Aleatoria Normal

En el análisis **multivariante**, la función de densidad para el vector aleatorio normal p -variado, quedaría expresada como:

Exp. (2)

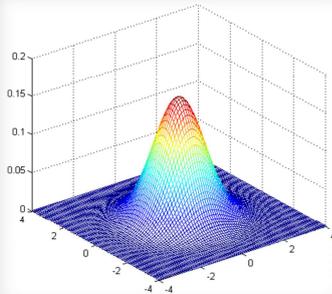
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})};$$

$$-\infty < x_i < \infty; i = 1, 2, 3, \dots, p$$

En la cual $\boldsymbol{\mu}$ es el vector de medias y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas del vector \mathbf{X} , de manera tal que $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ [1].

A manera de ilustración de Exp. (2) se presenta la Figura 2.

Figura 2: Densidad Conjunta de un Vector Normal Bivariado



Tal como ocurre en el análisis univariante, en el multivariante es posible plantear diferentes **pruebas de hipótesis** para vectores de medias a través de los siguientes pasos:

- a) Planteamiento del contraste, es decir, formulación y contraposición de las hipótesis nula y alterna.
- b) Obtención del estadístico de prueba
- c) Determinación de la región crítica de la prueba
- d) Planteamiento de la conclusión en base al nivel de significancia de la prueba (valor p).

A continuación se desarrollan los principios teóricos aplicados en las pruebas de hipótesis para medias, considerando dos escenarios, según la varianza sea o no conocida; el primero de ellos, cuando se cumplen las condiciones del Teorema del Límite Central, es decir, el tamaño de la muestra es grande y la varianza es conocida, independientemente de la población de la que ha sido tomada la muestra; y, el segundo escenario, cuando la población tiene una distribución Normal y la varianza es desconocida.

Según Zurita [1], para el caso univariante, la estructura del Contraste de Hipótesis Relativo a Medias cuando la varianza es conocida se ilustra en la Tabla 1.

Tabla 1: Contraste de Hipótesis Relativo a Medias Varianza conocida

CONTRASTE	$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
ESTADÍSTICO DE PRUEBA	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
REGIÓN CRÍTICA	$ z > z_{\alpha/2}$

En base a la prueba desarrollada, se concluye que con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza se rechaza H_0 a favor de H_1 si $|z| > z_{\alpha/2}$, donde $z_{\alpha/2}$ corresponde al percentil $1 - \alpha/2$ de la distribución Normal Estándar.

Tomando como punto de partida el estadístico de prueba para el caso univariante, al elevarlo al cuadrado, se obtiene:

Exp. (3):

$$z^2 = \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = n(\bar{x} - \mu_0)(\sigma^2)^{-1}(\bar{x} - \mu_0)$$

En términos multivariantes, se puede establecer el estadístico:

Exp. (4):

$$Z^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' (\boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

Donde además, el producto matricial:

Exp. (5):

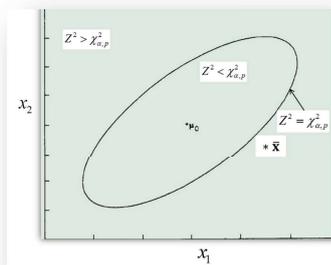
$$\Delta^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t (\boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

Es un número real conocido como el cuadrado de la distancia de Mahalanobis [2], la cual a diferencia de la distancia euclidiana, considera la correlación entre las variables.

Relacionando el caso univariante y el multivariante, tomando en consideración que en este último se están sumando los cuadrados de p distribuciones normales estándar, se puede afirmar que Z^2 sigue una distribución Ji-cuadrado con p grados de libertad [2].

Puesto que la matriz de varianzas y covarianzas es definida positiva, de orden $p \times p$ y sus valores propios son positivos, la región crítica de la prueba estaría determinada por esta forma cuadrática referida en la Exp. (5), lo cual gráficamente, en el caso de la **distribución normal bivariada representa una elipse** centrada en el vector de medias; y, con ejes de valores $\pm Z\sqrt{\lambda_i} e_i$, siendo λ_i y e_i , los valores y vectores propios de la matriz de varianzas y covarianzas. Véase Figura 3.

Figura 3: Ilustración de Región Crítica Prueba de Hipótesis para Vectores de Medias



A partir de lo anteriormente explicado, la prueba de hipótesis para el vector de medias cuando la matriz de varianzas y covarianzas es conocida, contempla los elementos que se registran en la Tabla 2:

Tabla 2: Contraste de Hipótesis Relativo a Vectores de Medias – Matriz de Varianzas y Covarianzas conocida

CONTRASTE	$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
ESTADÍSTICO DE PRUEBA	$Z^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$
REGIÓN CRÍTICA	$Z^2 > \chi^2_{\alpha,p}$

En base al contraste planteado, se establece con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza, el rechazo de H_0 a

favor de H_1 si se cumple que $Z^2 > \chi^2_{\alpha,p}$ [2].

Hasta el momento se han desarrollado los fundamentos considerando el escenario de varianza conocida, ahora se realizará un análisis similar cuando la varianza es desconocida.

Cuando no se conoce la varianza de la población, es posible estimarla a través de la varianza muestral s^2 [1]. La prueba de hipótesis para medias en el caso univariante se resume en la Tabla 3.

Tabla 3: Contraste de Hipótesis Relativo a Medias Varianza desconocida

CONTRASTE	$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
ESTADÍSTICO DE PRUEBA	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
REGIÓN CRÍTICA	$ t > t_{\alpha/2, n-1}$

En base a la prueba desarrollada, se concluye que con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza se rechaza H_0 a favor de H_1 si $|t| > t_{\alpha/2, n-1}$, donde $t_{\alpha/2, n-1}$ corresponde al percentil $1 - \alpha/2$ de la distribución T-student con $n - 1$ grados de libertad.

Realizando un análisis similar al de varianza conocida y tomando como punto de partida el estadístico de prueba para el caso univariante, se tiene que:

Exp. (6):

$$t^2 = \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right)^2 = n(\bar{x} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x} - \mu_0)$$

En el marco del análisis multivariante, estimando la matriz de varianzas y covarianzas de la población con S , se establece el estadístico:

Exp. (7):

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^t (S)^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

Este estadístico de prueba sigue una distribución T^2 de Hotelling con p variables y $n - 1$ grados de libertad [2].

La prueba de hipótesis para el vector de medias cuando no se conoce la matriz de varianzas y covarianzas de la población, contempla los elementos que se registran en la Tabla 4.

Tabla 4: Contraste de Hipótesis Relativo a Vectores de Medias – Matriz de Varianzas y Covarianzas desconocida

CONTRASTE	$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
ESTADÍSTICO DE PRUEBA	$T^2 = (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^t \left(\frac{S}{n} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$
REGIÓN CRÍTICA	$T^2 > T^2_{\alpha,p,n-1}$

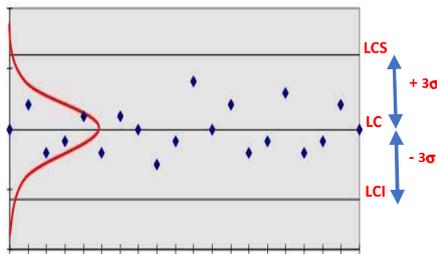
En base al contraste planteado, se establece con $(1 - \alpha)100\%$ de confianza, el rechazo de H_0 a favor de H_1 si se cumple que $T^2 > T^2_{\alpha,p,n-1}$.

4. CARTA DE CONTROL UNIVARIANTE VS. MULTIVARIANTE

Las Cartas de Control son esquemas gráficos, en los cuales cada cierto lapso, se puede evidenciar si un proceso está o no bajo control o por si alguna causa está mostrando comportamientos inusuales en su variabilidad, estas cartas constituyen uno de los instrumentos que por más tiempo se han utilizado para monitorear procesos productivos.

A manera de definición, según Montgomery [3], una carta de control consiste en una representación gráfica de una característica de la calidad medida a partir de una muestra en función del número de muestras o tiempo. Véase Figura 4.

Figura 4: Ilustración gráfica de una Carta de Control Una variable



Una carta de control típica consta de tres líneas horizontales, una línea central (LC) y límites de control superior e inferior (LCS y LCI, respectivamente); y, son construidas ya sea para variables o atributos, según la característica a monitorear.

Tal como expresa Besterfield [5], ambos límites de control pueden ayudar a juzgar la importancia de las variaciones en la calidad de un proceso. Generalmente estos límites se establecen en ± 3 **desviaciones estándar** respecto a la línea central, teniendo en cuenta que para una distribución normal, el 99.73% de los elementos se localizan entre $+3\sigma$ y -3σ , con lo cual se espera que en más de 9.973 veces de 10.000, los valores observados se localicen entre los límites superior e inferior; y, cuando esto sucede, se considera que el proceso está bajo control estadístico. Por el contrario, cuando alguna observación cae fuera de los límites de control, se considera que el proceso está fuera de control y que debe investigarse la causa asignable o especial que provoca la variación no usual.

Existe una fuerte relación entre las Cartas de Control y las Pruebas de Hipótesis, debido a que las cartas son pruebas que contraponen los

supuestos de que un proceso está o no bajo control estadístico. Siendo así, la localización de un punto dentro de los límites de control es lógicamente equivalente a no poder rechazar la hipótesis nula H_0 ; mientras que, un punto que está fuera de los límites, proporcionaría suficiente evidencia estadística para no rechazar la hipótesis alterna H_1 [3]; por lo tanto, el contraste de hipótesis del control estadístico queda expresado como:

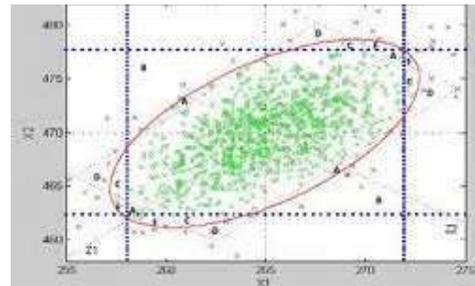
H_0 : El proceso está bajo control estadístico

vs

H_1 : El proceso no está bajo control estadístico

Al analizar de manera simultánea dos características de interés, se construye una carta conocida como "Elipse de Control", la misma que, podría presentar ejes principales paralelos a los de las variables analizadas en forma univariante si éstas fueran independientes; y, ejes principales no paralelos, para el caso en que exista algún tipo de relación entre las variables [3].

Figura 5: Ilustración gráfica de una Elipse de Control Dos variables



Esta carta de control hace referencia a lo detallado en las pruebas de hipótesis en lo concerniente a su región crítica, de manera tal que cuando se conoce la matriz de varianzas y covarianzas poblacional, la forma cuadrática analizada tomará valores menores o iguales que $\chi^2_{\alpha,p}$, obteniéndose gráficamente la superficie limitada por una elipse, tal como se ilustró en la Figura 3.

Aun cuando el gráfico de la elipse de control posibilita una transición del análisis univariado al bivariado, este tipo de cartas presenta inconvenientes al no identificar, secuencialmente en el tiempo, el comportamiento de los puntos registrados; así como también, no lograr la visualización de más de dos características de un proceso simultáneamente consideradas.

Debido a las restricciones antes descritas, al tener más de dos características, lo recomendable es construir una Carta de Control utilizando la distribución T^2 de Hotelling [4].

Para construir esta carta se calcula un estadístico T^2 para cada una de las n observaciones relacionadas con las variables analizadas:

Exp. (8):

$$T_j^2 = (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^t (\mathbf{S})^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}); 1 \leq j \leq n$$

El límite de control superior de esta carta estará dado por:

$$LCS = \chi_{\alpha,p}^2$$

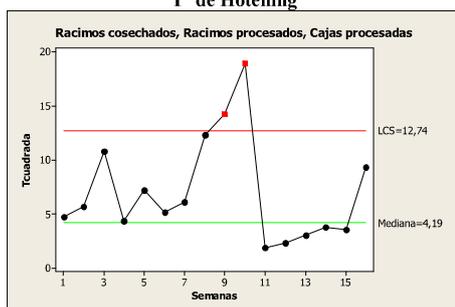
El cual tomará los valores del percentil $1 - \alpha$ de la distribución Ji-cuadrado con p grados de libertad. Por otra parte, su límite de control inferior (LCI) es cero.

5. CARTAS DE CONTROL PARA EL PROCESO DE PRODUCCIÓN DE BANANO

Con el propósito de ilustrar una aplicación de las cartas de control en procesos productivos donde se requiere monitorear más de dos variables simultáneamente, en el presente artículo se inspeccionaron los datos de la producción de banano por semana en una hacienda de 10 hectáreas ubicada en el Litoral ecuatoriano, donde durante las 16 semanas de temporada alta, se midieron tres variables: *racimos cosechados*, *racimos procesados* y *cajas procesadas*, obteniéndose el diagnóstico de la situación actual.

A partir de los datos recolectados, se graficaron cartas de control univariantes y multivariantes con la finalidad de monitorear las fases de cosecha y post-cosecha en la cadena productiva. En la Figura 6, se muestra la carta multivariante T^2 de Hotelling considerando todas las variables de estudio.

Figura 6: Carta de Control T^2 de Hotelling

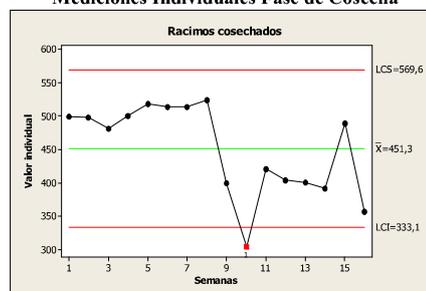


Al graficar esta carta de control, el límite de control superior resultante fue 12,74 que corresponde a $\chi_{0.05,3}^2$; es decir, todos aquellos puntos que sobrepasen el antes citado percentil de la Ji-cuadrado evidenciarán que el proceso no está bajo control estadístico. En este sentido, se pudo observar dos puntos fuera de control correspondientes a la producción de banano en las semanas *nueve* y *diez*.

Tomando en consideración estos dos puntos fuera de control observados en la carta multivariante, se efectuó un análisis univariante para identificar cuáles de ellas ocasionan que el proceso no se encuentre bajo control estadístico.

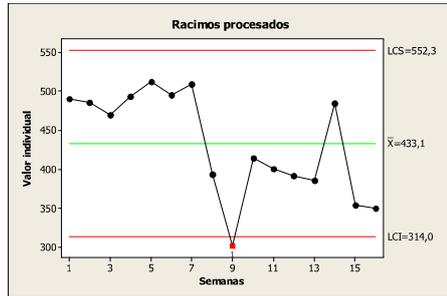
La carta de control para la variable *racimos cosechados* evidenció que durante la semana *diez* hubo una caída en la fase de cosecha de banano, localizándose esta medición bajo el límite de control inferior LCI=333,1. Véase Figura 7.

Figura 7: Carta de Control Mediciones Individuales Fase de Cosecha



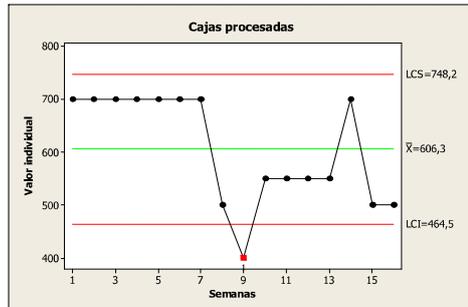
En la Figura 8 se presenta lo concerniente a la variable *racimos procesados*, en la cual se ha podido observar que durante la semana *nueve* de la fase de post-cosecha existió un punto fuera de control ubicado bajo el LCI=314, lo cual posibilitó distinguir una posible causa asignable cuyo efecto en la producción se deberá evaluar.

Figura 8: Carta de Control Mediciones Individuales – Fase de Post-cosecha



Respecto a la variable *cajas procesadas* se pudo notar que en la semana *nueve* la producción bajó significativamente a 400 cajas de banano, situación que requiere ser analizada, dado que el punto fuera de control es parte de las mediciones realizadas en la temporada alta, como se observa en la Figura 9.

Figura 9: Carta de Control Mediciones Individuales – Fase de Post-cosecha



Una vez construidas las cartas de control para el proceso de producción de banano analizado, se pudo evidenciar que la carta T^2 proporcionó información relevante como punto de partida para la toma de decisiones. En este sentido, se centró la atención en las semanas *nueve* y *diez*; y, por medio de las cartas de control univariantes se investigó respecto a la incidencia de cada variable en los puntos fuera de control detectados en la carta multivariante.

Es así como en la carta de control para *racimos cosechados*, en la semana diez se detectó un punto fuera de control, mientras que, en las cartas para *racimos procesados* y *cajas procesadas* se observó un punto fuera de control en la semana nueve; por consiguiente, corresponde investigar cuáles fueron las causas atribuibles para que el proceso no esté bajo control estadístico.

Hasta el momento se analizó de forma gráfica el control estadístico; sin embargo, existe la posibilidad de observar qué ocurre al formular pruebas de hipótesis respecto a la media de las variables que fueron monitoreadas, tal es el caso de la variable *racimos procesados*, donde el contraste respecto al promedio en la semana nueve, suponiendo Normalidad, se expresaría como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5: Contraste de Hipótesis Relativo a Medias Racimos procesados

CONTRASTE	$H_0 : \mu = 302$ vs $H_1 : \mu \neq 302$
ESTADÍSTICO DE PRUEBA	$t = \frac{433,1-302}{66,6/\sqrt{16}}=7,87$
REGIÓN CRÍTICA	$ t > t_{0,025, 15}$ $ 7,87 > 2,13$

Bajo estas condiciones, dado que el nivel de significancia de la prueba (Valor p) es cero, se concluye que existe suficiente evidencia estadística para rechazar H_0 en favor de H_1 , es decir, el proceso no se encuentra bajo control estadístico en la semana nueve.

6. DISCUSIÓN

Aun cuando los autores Montgomery y Johnson aportan con fundamentos teóricos soportados en matemática avanzada, la visualización de las cartas de control facilita la identificación oportuna de cambios bruscos en la variabilidad de los procesos, constituyéndose en un instrumento efectivo para la toma de decisiones que no son estadísticos de oficio.

Se estila construir cartas de control univariantes a pesar de que un control de procesos requiera el monitoreo de más de dos características de forma simultánea; sin embargo, Rencher sugiere en primera instancia realizar el análisis multivariante; y, a partir de éste pasar al univariante, lo cual fue aplicado en el presente artículo considerando las correlaciones entre las variables analizadas.

Alfaro et al. [6] consideran que el uso de la carta de control multivariada T^2 de Hotelling se constituye en un modelo robusto para el control estadístico de procesos, sin embargo, coincidimos con los autores en que al no tener tamaños de muestra muy grandes, se limitaría el uso de la distribución Ji-cuadrado para calcular el Límite de Control Superior; bajo esas condiciones, una alternativa para la construcción de cartas de control sería la simulación, con la finalidad de obtener una aproximación del verdadero valor de T^2 , dado que, no se conocería su distribución de forma precisa.

7. CONCLUSIONES

Luego del desarrollo del fundamento teórico respecto a las pruebas de hipótesis para medias y vectores de medias, resultó sencillo relacionar que este tipo de pruebas soportan los contrastes respecto a si un proceso está bajo control estadístico o no, considerando una o varias características a la vez.

Aplicando los principios estadísticos vistos durante el desarrollo conceptual de los temas propuestos en el presente artículo, a través del caso práctico con datos de banano, se evidenció la relación entre control estadístico de procesos con los contrastes relativos a la media de las variables *racimos cosechados*, *racimos procesados* y *cajas procesadas*, donde basados en evidencia

estadística se logró determinar que los procesos de cosecha y post-cosecha no estaban bajo control, observándose cambios bruscos en la variabilidad de los datos durante las semanas nueve y diez.

Para futuros estudios se sugiere profundizar en la interpretación de las cartas de control univariadas respecto a los patrones y reglas para identificar causas especiales o asignables que provocan la falta de control estadístico de los procesos, siendo la carta de control es un esquema gráfico práctico en el sentido identificar rápidamente la ocurrencia de cambios bruscos en la variabilidad de los procesos y tomar las acciones correctivas pertinentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1] Zurita, G. (2010), “Probabilidad y Estadística: Fundamentos y Aplicaciones”, Segunda Edición, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador.
- [2] Rencher, A. (2012). “Methods of Multivariate Analysis”, Third Edition, John Wiley & Sons Inc., USA.
- [3] Johnson, R. & Wichern, R. (2007). “Applied Multivariate Statistical Analysis”, Sixth Edition. Pearson Prentice Hall, USA.
- [4] Montgomery, D. (2009). “Introduction to Statistical Quality Control”, Sixth Edition. John Wiley & Sons Inc., USA.
- [5] Besterfield, D. (2009). “Control de calidad”, Octava Edición. Pearson Prentice Hall, México.
- [6] Alfaro et al. (2010). “Gráficos multivariantes aplicados al control estadístico de la calidad”, Primera Edición. Netbiblo, S. L., España.