

EN BÚSQUEDA DE DINÁMICAS DE APLICACIONES EN EL PLANO “ITERACIONES DE FUNCIONES REALES CUADRÁTICAS EN EL PLANO”

Córdova Rosas Nelson¹

Resumen. Este artículo muestra una clasificación de las aplicaciones cuadráticas en el plano que presentaron Guillermo Gómez y Santiago López de Medrano en [3] mediante la relación conjugación con aplicaciones a fines invertibles del plano. Y ellos determinaron 21 clases de equivalencia representados por aplicaciones cuadráticas reducidas. Esta clasificación da lugar al estudio de la dinámica generada por estas 21 aplicaciones.

Además, vamos a demostrar que una función estudiada como $f(z)=z^2+c$ es parte de la forma general de una aplicación real cuadrática del plano en sí misma, y que su dinámica nos han permitido conocer los famosos conjuntos de Julia y Fatou, que nos ayudan a comprender la dinámica de esta aplicación y también a disfrutar de la belleza de la estructura de estos conjuntos que forman parte de los conjuntos fractales [4]. Por esta razón elegimos una de las funciones como ejemplo, porque queremos mostrar cómo se puede empezar el estudio de la dinámica.

Por último, analizaremos cuáles son los parámetros y restricciones que regulan los diferentes tipos de dinámicas que están determinadas por la cantidad de puntos fijos. Así mismo, según el carácter de estos puntos fijos, es posible predecir la dinámica involucrada.

Palabras Claves: Dinámica, punto fijo, aplicación afin topológicamente equivalentes.

Abstract: This article shows a classification of quadratic applications in the plane that Guillermo Gomez and Santiago Lopez de Medrano shows in [3] by the conjugation relationship with invertible related applications of the plane. And they determined 21 equivalence classes represented by small quadratic applications. This classification gives rise to the study of the dynamics generated by these 21 applications.

Also, we will show that a widely function studied $f(z)=z^2+c$ is part of the general form of a real quadratic application plane on itself, and that its dynamics allowed us to know the famous Julia and Fatou sets, that help us to understand the dynamics of this application and to enjoy the beauty of the sets structure which are part of the fractal sets [4]. For this reason, we chose one of the functions as example, because we want to let you know how to begin the study of the dynamics.

Finally, we will analyze what are the parameters and constraints that regulate the different types of dynamics that are determined by the number of fixed points. Likewise, by the nature of these fixed points, it is possible to predict the dynamic involved.

Keyword: Dynamics, Fixed Point, Affine Application, Topologically equivalent.

Recibido: Noviembre 2014.

Aceptado: Marzo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

Gómez y López de Medrano [3] presentan algunos resultados preliminares sobre iteraciones de aplicaciones reales cuadráticas en el plano, provenientes de una familia de funciones de la siguiente forma:

$$f(x, y) = (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F') \quad (1)$$

Cuando f no es analítica, no es posible aplicar muchas de las propiedades del análisis complejo y los resultados aplicables son precarios.

Veamos un ejemplo muy conocido de una aplicación perteneciente a la familia (1) es el siguiente:

$$f(z) = z^2 + c$$

Definición: Sean dos conjuntos abiertos $A, B \subseteq \mathbb{C}$, una transformación o aplicación conforme f de A en B es una aplicación

diferenciable: $f: A \rightarrow B$ donde f es inyectiva en A ; $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in A$ y $f(A) \subset B$

La ecuación en (1) denotada por $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es una aplicación conforme, por lo tanto ella es analítica, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos lo siguiente:

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + 2By + D =$$

$$2B'x + 2C'y + E' = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + E =$$

$$2A'x + 2B'y - D' = \frac{\partial v}{\partial x}$$

De (a) y (b) tenemos que $A = B'$, $B = C'$, $D = E'$, $B = -A'$, $C = -B'$, $E = -D'$

Al escribir en f forma compleja tenemos:

¹Profesor de la Universidad Federico Santa María, Campus Guayaquil (e-mail: cordova@espol.edu.ec)

$$f(x+iy) = Ax^2 + 2Bxy - Ay^2 + Dx + Ey + F + i(-Bx^2 + 2Axy + By^2 - Ex + Dy + F')$$

$$= Ax^2 + 2Axyi - Ay^2 - Bx^2i + 2Bxy + By^2i + Dx + Dy + i(-Ex + Ey + F + F')$$

$$= (A - Bi)(x^2 + 2xyi - y^2) +$$

$$(D - Ei)(x + yi) + F + iF'$$

Si hacemos

$$a = A - Bi \quad b = D - Ei \quad c = F + Fi$$

Tenemos

$$f(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0$$

Luego conjugamos con la aplicación afín invertible:

$$A(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{2a} \quad \text{con} \quad A^{-1}(z) = az + \frac{b}{2}$$

$$g(z) = (A^{-1} \circ f \circ A)(z)$$

$$= A^{-1} \left(f \left(\frac{z}{a} - \frac{b}{2a} \right) \right)$$

$$= A^{-1} \left(a \left(\frac{2z-b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{2z-b}{2a} \right) + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(a \frac{(2z-b)^2}{4a^2} + \left(\frac{2bz-b^2}{2a} \right) + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(\frac{(4z^2 - 4bz + b^2)}{4a} + \left(\frac{4bz - 2b^2}{4a} \right) + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(\frac{4z^2 - 4bz + b^2 + 4bz - 2b^2}{4a} + c \right)$$

$$= A^{-1} \left(\frac{4z^2 - b^2}{4a} + c \right)$$

$$= a \left(\frac{4z^2 - b^2}{4a} + c \right) + \frac{b}{2}$$

$$= z^2 + \left(-\frac{b^2}{4} + ac + \frac{b}{2} \right) = z^2 + C. \quad \text{Donde}$$

$$C = \left(-\frac{b^2}{4} + ac + \frac{b}{2} \right)$$

$$\therefore f(z) \text{ Es conjugada con } g(z) = z^2 + C$$

Sea z un número complejo decimos que z un punto fijo de f , si $f(z) = z$

Y si $f^p(z) = z$, para algún $p \in \mathbb{N}$, donde $f^p(z) = f \circ f \circ f \cdots f$ (p veces). Diremos en este caso que z un punto periódico de f .

Definición: Un punto fijo z_0 es un punto fijo atractor si existe $\varepsilon > 0$, talque si $\|z - z_0\| < \varepsilon$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0$.

Un punto fijo z_0 es un punto fijo repulsor si existe $\varepsilon > 0$, para todo z tal que $\|z - z_0\| < \varepsilon$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f^k(z) - z_0\| > \varepsilon$.

Los puntos periódicos se clasifican según

$\lambda = D(f^k(z))$ derivada compleja de f^k en z .

a) Si $|\lambda| < 1$ entonces z es un atractor (superatractor si $|\lambda| = 0$)

b) Si $|\lambda| > 1$ entonces z es un repulsor

c) Si $|\lambda| = 1$ entonces z es un punto indiferente.

d) Llamaremos punto fijo Hiperbólico cuando $|\lambda| \neq 1$

Definición: Una transformación afín consiste en una transformación lineal seguida de una traslación entre dos espacios afines.

Definición: Dos aplicaciones f y g son afinmente equivalentes si y sólo si existen aplicaciones afines invertibles A_1 y A_2 tales que, $f = A_1^{-1} \circ g \circ A_2$ (Claramente esta relación es de equivalencia). Se dirá que f y g son afinmente conjugadas si

Guillermo Gómez y Santiago López de Medrano [3] presentaron el siguiente teorema:

Teorema: Existen 21 clases de equivalencia afín de las aplicaciones reales cuadráticas en el plano, es decir cada aplicación tipo (1) es afinmente equivalente a una y sólo una aplicación de la TABLA I:

TABLA. I
Tabla de equivalencia Fuente: Iterations of Quadratic Mappings of The Plane, (preliminary report) [3]
Resultados en funciones

i	F_i	Ω	$f(\Omega)$	$f(\mathbb{R}^2)$
1	$(x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$	Elipse	--	--
2	$(x^2 + y^2 + 2x, 2xy - 2y)$	Hipérbola	--	--
3	$(x^2 + y, 2xy)$	Parábola	Cúspide	--
4	$(x^2 + y, y^2)$	Líneas transversales	Parábola y rayo	--
5	(x^2, y^2)	Líneas transversales	Dos rayos	--
6	$(x^2 + 2x, 2xy - 2y)$	Líneas paralelas	Línea y punto	--
7	$(x^2, 2xy)$	Líneas dobles	--	
8	$(x^2 - y^2, 2xy)$	Punto	--	--
9	$(x^2 + y^2, y)$	Línea	Parábola	convexo
10	$(x^2 - y^2, y)$	Línea	Parábola	No convexo
11	(x^2, y)	Línea	Línea	--
12	$(2xy, y)$	Línea	Punto	
13	$(x, y + x^2)$	$\emptyset$	--	--
14	(x, y)	$\emptyset$	--	--
15	(x^2, x)	Plano	Parábola	--
16	$(x^2 + y^2, 0)$	Plano	Rayo	--
17	$(x^2 - y^2, 0)$	Plano	Línea	--
18	$(x^2 - y, 0)$	Plano	Línea	--
19	$(x^2, 0)$	Plano	Rayo	--
20	(x, x)	Plano	Línea	--
21	$(0, 0)$	Plano	Punto	--

Los autores ([3]) nos dicen que este resultado no es suficiente para determinar la dinámica de las aplicaciones tipo (1), puesto que sólo la conjugación preserva la dinámica, pero este teorema nos ayuda a acercarnos más al estudio de su dinámica.

COROLARIO: Cada aplicación real cuadrática de $\mathbb{R}^2$ es afinmente conjugada a una aplicación de la forma: $A \circ F_i$ con $i = 1, 2, 3, \dots, 21$

Donde A es una aplicación afín invertible y F_i es una de las 21 aplicaciones del teorema.

Demostración: Si f es una aplicación real cuadrática del plano, entonces por el teorema tenemos que existen A_1 y A_2 aplicaciones afines invertibles tales que:

$$f = A_1^{-1} \circ F_i \circ A_2, \text{ para algún } i$$

Donde podemos escribir

$$f = A_2^{-1} \circ (A_2 \circ A_1^{-1} F_i) \circ A_2^{-1}$$

Donde $A_2 \circ A_1^{-1} = A$ es una aplicación afín invertible.

Estudiar para cada una de estas $A \circ F_i$ su dinámica, se estará estudiando una gran gama de aplicaciones reales cuadráticas del plano que tienen la misma dinámica, es interesante además estudiar cuando dos de estas $A_1 \circ F_i$ o $A_2 \circ F_i$ son conjugadas.

2. ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE LA APLICACIÓN $A \circ F_{17}$

Sea la aplicación invertible de la forma $A(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$ con

$ad - bc \neq 0$. Estudiemos la aplicación $A(x, y)$ compuesta con

$F_1(x, y) = (x^2 - y^2, 0)$. ¿Es posible obtener una descripción de su dinámica?

Sea

$$(A \circ F_1)(x, y) = (a(x^2 - y^2) + e, c(x^2 - y^2) + f)$$

Donde $Tr[D(A \circ F_1)(x, y)] = 2ax - 2cy$ es una aplicación que tiene sus curvas de nivel invariantes bajo conjugación afín, a saber:

Si $z = U(x, y) = (U_1(x, y), U_2(x, y))$ donde $U(x, y)$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y

$$B(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

sea

aplicación afín invertible es decir $ad - bc \neq 0$

. Calculando traza de

$$D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A) =$$

$$\begin{pmatrix} ad \frac{\partial U_1}{\partial x} + dc \frac{\partial U_1}{\partial y} - ab \frac{\partial U_2}{\partial x} - bc \frac{\partial U_2}{\partial y} & bd \frac{\partial U_1}{\partial x} + d^2 \frac{\partial U_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial U_2}{\partial x} - bd \frac{\partial U_2}{\partial y} \\ -ac \frac{\partial U_1}{\partial x} - c^2 \frac{\partial U_1}{\partial y} + a^2 \frac{\partial U_2}{\partial x} - ac \frac{\partial U_2}{\partial y} & -bc \frac{\partial U_1}{\partial x} - dc \frac{\partial U_1}{\partial y} + ab \frac{\partial U_2}{\partial x} - ad \frac{\partial U_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donde la traza de $D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)$ es igual a :

$$traza[D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)] = ad \frac{\partial U_1}{\partial x} + dc \frac{\partial U_1}{\partial y} -$$

$$ab \frac{\partial U_2}{\partial x} - bc \frac{\partial U_2}{\partial y} + -bc \frac{\partial U_1}{\partial x} - dc \frac{\partial U_1}{\partial y} + ab \frac{\partial U_2}{\partial x} + ad \frac{\partial U_2}{\partial y}$$

$$traza[D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)] = ad \frac{\partial U_1}{\partial x} + ad \frac{\partial U_2}{\partial y} - bc \frac{\partial U_2}{\partial y} + -bc \frac{\partial U_1}{\partial x} =$$

$$(ad - bc) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right)$$

$$(ad - bc) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) = k$$

Ahora

, son las curvas de nivel de la traza, es decir

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) = \frac{k}{(ad - bc)} \text{ como } ad - bc \neq 0$$

$$\frac{k}{(ad - bc)} = c \in \mathbb{R}$$

basta tomar $c \in \mathbb{R}$ y tenemos que las curvas de nivel de la traza de

$D(A^{-1} \circ U(x, y) \circ A)$ son invariantes bajo conjugación afín. Luego conjugando con una

rotación podemos hacer sus curvas de nivel horizontales, lo que implica que podemos

considerar $a = 0$.

Es decir

$$F_2(x, y) = (A \circ F_1)(x, y) = (e, c(x^2 - y^2) + f)$$

Ahora consideremos el homomorfismo

$$h(x, y) = c^{-1}(x, y) \text{ (} c \neq 0 \text{)}$$

Luego

$$(h^{-1} \circ F_2 \circ h)(x, y) = F_3(x, y) = (ce, x^2 - y^2 + cf), (c \neq 0)$$

y estudiemos $F(x, y) = (\alpha, x^2 - y^2 + \beta)$,

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Como $F_{\alpha,\beta}^{h+1}(x,y) = F^h(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)$,
 $k \in \mathbb{N}$ esto nos dice que necesitamos estudiar
los iterados de la recta $x = \alpha$.

Sea

$$J_{y_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 + \beta = y_0\}, y_0 \in \mathbb{R}$$

Tenemos

que:

$$F_{\alpha,\beta}^{h+1}(x,y) = F^h(\alpha, y_0) = (\alpha, f_{\alpha,\beta}^h(y_0))$$

$$\text{donde. } f_{\alpha,\beta}^h(y_0) = \alpha^2 + \beta - y_0^2$$

Ahora si α, β son fijos (pero arbitrarios),

tomamos $\xi = \alpha^2 + \beta$ la cual es una curva en

la cual $f_\xi(x) = \xi - x^2$ tiene la misma

dinámica que $f_{\alpha,\beta}^h$ para cada ξ dado.

Considerando ahora la conjugación con el
homeomorfismo $h(x) = -x$, obtenemos que es
equivalente a la siguiente aplicación:

$$f_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon \text{ donde } \varepsilon = -\xi.$$

Proposición: Dada $f_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon$, si

$\varepsilon < \frac{1}{4}$ entonces existe un único $\mu > 1$ tal que

f_ε es topológicamente conjugada a
 $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

Demostración:

Consideremos el homeomorfismo

$$h(x) = -\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \text{ y su inversa}$$

$$h^{-1}(x) = -\mu x + \frac{\mu}{2} \text{ para obtener:}$$

$$(h^{-1} \circ F_\mu \circ h)(x) = h^{-1} \circ F_\mu \left(-\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(\mu \left(-\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{\mu}x - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(\left(-x + \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(-\frac{1}{\mu}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{\mu}{4} \right)$$

$$= h^{-1} \circ \left(-\frac{1}{\mu}x^2 + \frac{\mu}{4} \right)$$

$$= -\mu \left(-\frac{1}{\mu}x^2 + \frac{\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{2}$$

$$= x^2 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2}$$

$$(h^{-1} \circ F_\mu \circ h)(x) = x^2 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2}, \text{ Ahora sí,}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{2} \text{ entonces } \mu = 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}$$

Es claro que con la proposición anterior

podemos describir la dinámica de $F_{\alpha,\beta}(x,y)$
para el caso en que tenemos dos puntos fijos

para F_μ . Por ejemplo se sabe que para la

aplicación $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ existe un

conjunto maximal invariante $\wedge_\mu$ para $\mu > 4$.

Este conjunto es de Cantor que posee una órbita

densa para F_μ y los puntos periódicos de F_μ

son densos en $\wedge_\mu$ (ver [2]) Lo que traducido

mediante el homeomorfismo $h(x)$ para la

aplicación f_ε significa que:

Existe un conjunto de Cantor inducido por $\wedge_\mu$
el cual lo denotaremos con

$\Omega_\varepsilon = \{(x, y) / y \in \wedge_\mu\}$, con $\varepsilon > 2$, el cual

está en correspondencia biunívoca con el

conjunto $B = \bigcup_{y_0 \in \wedge_\mu} J_{y_0}$. Luego tenemos que

B es un conjunto de Cantor de Hipérbolas que

posee una órbita densa de hipérbolas y un

conjunto de hipérbolas periódicas de $F_{\alpha,\beta}$ que

son densas en B.

Para el caso en que tenemos un punto fijo, es

$$\left(\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4} \right)$$

decir cuando podemos encontrar un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ el

cual determina una equivalencia topológica

entre $F_{\alpha,\beta}$ y $F_{\alpha',\beta'}$, tales que

$$\alpha^2 + \beta = (\alpha')^2 + \beta' = -\frac{1}{4}. \text{ Para luego}$$

traducir la dinámica para

$$f_{\alpha,\beta}(y_0) = \alpha^2 + \beta - y^2 = -\frac{1}{4} - y^2$$

Al estudiar los puntos fijos para

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = F^h(\alpha, x^2 - y^2 + \beta),$$

$\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ consideramos la ecuación

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = (x, y) \text{ lo que nos lleva a estudiar el siguiente sistema}$$

$$\alpha = x, \quad \frac{\left[y + \frac{1}{2}\right]}{\beta + \frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\beta + \frac{1}{4}} = 1$$

Donde para $1 + 4(\alpha^2 + \beta) \geq 0$ existen puntos fijos de la forma

$$P_1 = \left[\alpha, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\alpha^2 + \beta)}}{2} \right] \text{ y } P_2 = \left[\alpha, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4(\alpha^2 + \beta)}}{2} \right].$$

Por lo tanto existe un único punto fijo si

$$\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4}$$

. La pregunta que nos hacemos es la siguiente:

Dados α, β y α', β' tales que $\alpha^2 + \beta = (\alpha')^2 + \beta' = -\frac{1}{4}$, ¿Serán $F_{\alpha,\beta}$ y $F_{\alpha',\beta'}$ topológicamente equivalentes?, es decir,

¿Existe un homeomorfismo $H: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $H \circ F = G \circ H$?

Para responder esta pregunta consideremos

$$F_{\alpha,\beta} H(x, y) = (h_1 \langle x, y \rangle, h_2 \langle x, y \rangle) \text{ y}$$

supongamos que $H \circ F = G \circ H$ con

$$F = F_{\alpha,\beta} \text{ y } G = F_{\alpha',\beta'}. \text{ Es decir}$$

$$(H \circ F) \langle x, y \rangle = H(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) =$$

$$(h_1(\alpha, x^2 - y^2 + \beta), h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)) = (G \circ H) \langle x, y \rangle =$$

$$G(h_1 \langle x, y \rangle, h_2 \langle x, y \rangle) = (\alpha', (h_1 \langle x, y \rangle)^2 - (h_2 \langle x, y \rangle)^2 + \beta')$$

$$\Rightarrow h_1(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) = \alpha' \wedge h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) =$$

$$(h_1 \langle x, y \rangle)^2 - (h_2 \langle x, y \rangle)^2 + \beta'$$

es decir:

$$h_1(x, y) = \alpha', \forall y \in \mathfrak{R}$$

$$h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta) = (\alpha')^2 + \beta' - (h_2 \langle x, y \rangle)^2$$

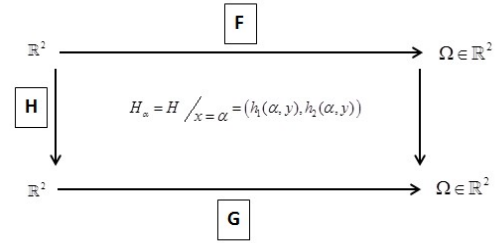
y obtenemos:

$$h_2\left(\alpha, -\frac{1}{4} - y^2\right) = -\frac{1}{4} - (h_2 \langle x, y \rangle)^2$$

Que es equivalente a $h_2(\alpha, k \langle y \rangle) = k(h_2(\alpha, y))$ con

$$k(x) = -\frac{1}{4} - x^2 \text{ lo que usaremos más adelante.}$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama de la situación:



Lo que nos sugiere definir en primera instancia un homeomorfismo $H_\alpha: \Omega = \langle \alpha, y \rangle / y \in \mathfrak{R} \rightarrow \{ \langle \alpha', y \rangle / y \in \mathfrak{R} \}$ para luego extenderlo a $\mathfrak{R}^2$ usando F y la relación G^{-1} del modo siguiente:

Fijamos y_0 y consideramos los conjuntos

$$F^{-1}(\alpha, y_0) = \{ \langle x, y \rangle \in \mathfrak{R}^2 / F \langle x, y \rangle = \langle \alpha, y_0 \rangle \}$$

$$G^{-1}(\alpha, z_0) = \{ \langle \alpha, y \rangle \in \mathfrak{R}^2 / G \langle \alpha, y \rangle = \langle \alpha', z_0 \rangle \}$$

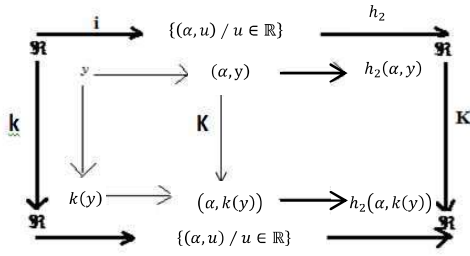
Luego el homeomorfismo H debe cumplir

$$H(F^{-1} \langle \alpha, y_0 \rangle) = G^{-1} \langle \alpha', h_2 \langle \alpha, y_0 \rangle \rangle.$$

Observación: en particular si $x = \alpha$ tenemos que

$$h_2(\alpha, \alpha^2 - y^2 + \beta) = [h_1 \langle \alpha, y \rangle]^2 - [h_2 \langle \alpha, y \rangle]^2 + \beta'.$$

Ahora de (3) consideremos el siguiente diagrama:



Donde $k = K \big/ x = \alpha$

Como el diagrama debe conmutar y (1) $k \circ h_2(\alpha, y) = h_2(\alpha, k(y))$. de esto se deduce que la igualdad se tiene sólo si $h_2(\alpha, y) = k^{-1}(y)$, entonces $y \in \text{Dom} k^{-1}$, es decir $h_2(\alpha, y) = k^{-1}(y) \rightarrow h_2^{-1}(\alpha, y) = k(y) \rightarrow y = h_2 \circ k \rightarrow h_2(\alpha, k(y)) = (\alpha, y) \rightarrow h_2(\alpha, k(y)) = k \circ k^{-1}(\alpha, y) \rightarrow h_2(\alpha, k(y)) = k \circ (h_2(\alpha, y))$ (1)

Luego $h_2(\alpha, y) = \sqrt{-1/4 - y}$ o

$$h_2(\alpha, y) = -\sqrt{-1/4 - y}, y \in \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[$$

como $\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4}$ tenemos que existen únicos puntos fijos, $P_F = (\alpha, y)$ para F y

$P_G = \left(\alpha', -\frac{1}{2} \right)$ para G, tales que

$$H(\alpha, -\frac{1}{2}) = (\alpha', -\frac{1}{2}) \text{ concluimos que:}$$

$$h_2(\alpha, y) = -\sqrt{-1/4 - y}, y \in \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[$$

Además usando (3)

$$h_2\left(\alpha, -\frac{1}{4} - y^2\right) = -\frac{1}{4} - (h_2(x, y))^2 \text{ y si}$$

$$h_2\left(\alpha, -\frac{1}{4} - (-y)^2\right) = -\frac{1}{4} - (h_2(x, -y))^2$$

tenemos que

$$(h_2(\alpha, y))^2 - (h_2(x, -y))^2 = 0, \text{ de donde}$$

$$(h_2(\alpha, y)) = (h_2(x, -y)) \vee (h_2(x, y)) = (-h_2(x, -y))$$

haciendo $x = \alpha$ tenemos que $(h_2(\alpha, y)) = h_2(\alpha, -y) \vee (h_2(\alpha, y)) = -h_2(\alpha, -y)$

y como $h_2\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ concluimos que

$$(h_2(\alpha, y)) \neq h_2(\alpha, -y) \vee (h_2(\alpha, y)) = -h_2(\alpha, -y), \text{ luego:}$$

$$h_2(\alpha, y) = \begin{cases} -\sqrt{-1/4 - y}, & y < -1/2 \\ y, & -1/2 \leq y \leq 1/2 \\ \sqrt{-1/4 + y}, & y > 1/2 \end{cases}$$

Ahora definamos el homeomorfismo H_α como sigue

$$H_\alpha : \{(\alpha, y) \in \mathfrak{R}\} \rightarrow \{(\alpha', y) / y \in \mathfrak{R}\}.$$

$$(\alpha, y) \rightarrow [h_1(\alpha, y), h_2(\alpha, y)] = \begin{cases} [\alpha', -\sqrt{-1/4 - y}], & y < -1/2 \\ (\alpha', y), & -1/2 \leq y \leq 1/2 \\ [\alpha', \sqrt{-1/4 + y}], & y > 1/2 \end{cases}$$

Ahora definamos otro homeomorfismo

$H : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ como una extensión de H_α

que satisface

$$H(F^{-1}(\alpha, y_0)) = G^{-1}(H_\alpha(\alpha, y_0)) \text{ con}$$

$$G^{-1}(H_\alpha(\alpha, y_0)) = G^{-1}(\alpha, h_2(\alpha, y_0))$$

$$\text{Sea } L : F^{-1}(\alpha, y_0) \rightarrow G^{-1}(\alpha, h_2(\alpha, y_0))$$

$$(x, y) \rightarrow (u, v) \text{ Tal que}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta - y_0}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \beta' - h_2(\alpha, y_0)}}$$

Donde (x, y) y (u, v) están en el mismo cuadrante, $y \neq 0$

Si $y = 0$

$$L(x, 0) = \left[\frac{x}{|x|} \sqrt{-\beta' + h_\alpha(\alpha, y_0)}, 0 \right]; x \neq 0, -\beta + y_0 > 0$$

Es decir:

$$L(x, y) = \left[\frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2 (\beta' - h_\alpha(\alpha, y_0))}{\beta - y_0}}, \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{\mu_0^2 + \beta' - h_\alpha(\alpha, y_0)}{\beta - y_0}} \right]; x, y \neq 0, \beta - y_0 \neq 0; \mu_0 = \sqrt{\frac{x^2 (\beta' - h_\alpha(\alpha, y_0))}{\beta - y_0}};$$

$\beta' - h_\alpha(\alpha, y_0)$ y $\beta - y_0$ tienen el mismo signo (+ ó -)

Luego sea:

$$a(x, y) = \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2 (\beta' - h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta))}{y^2 - x^2}}$$

y

$$b(x, y) = \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{x^2 (\beta' - h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta))}{y^2 - x^2} + \beta' - h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)}$$

Con $y^2 - x^2 \neq 0; y \neq 0, x \neq 0$

Por lo tanto:

$$H(x, y) = \begin{cases} (a(x, y), b(x, y)) \\ \left[\frac{x}{|x|} \sqrt{-\beta' + h_2(\alpha, x^2 - y^2 + \beta)}, 0 \right] \\ (x, y) \end{cases}$$

, $y^2 - x^2 \neq 0; y \neq 0, x \neq 0$

, $y = 0, x \neq 0, -\beta + y_0 > 0$

, $y^2 - x^2 = 0 \vee x = 0$

$$\alpha^2 + \beta = -\frac{1}{4} = (\alpha')^2 + \beta'$$

Ahora como

$$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) = F^h(\alpha, y_0) = (\alpha, f_{\alpha, \beta}^h(y_0))$$

$$\text{con } f_{\alpha, \beta}(y_0) = \alpha^2 + \beta - y_0^2 = -\frac{1}{4} - y_0^2$$

, la cual tiene un único punto fijo no hiperbólico

en $x = -\frac{1}{2}$, donde $f_{\alpha, \beta}^h(y_0) \rightarrow -\frac{1}{2}$ si

$n \rightarrow \infty$ y $|x| \leq \frac{1}{2}$, $f_{\alpha, \beta}^h(x) \rightarrow -\infty$ si

$n \rightarrow \infty$ y $|x| > \frac{1}{2}$.

Luego si $(x, y) \in \bigcup_{|y_0| \leq 1/2} J_{y_0}$ entonces

$$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) \rightarrow \left(\alpha, -\frac{1}{2} \right)$$

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 + \beta = -\frac{1}{2} \right\}, \text{ y}$$

si $(x, y) \in \bigcup_{|y_0| \leq 1/2} J_{y_0}$

$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) \rightarrow (\alpha, -\infty)$, es decir A es una

hipérbola fija para $F_{\alpha, \beta'}$

Así hemos podido descubrir que la dinámica de la aplicación $F(x, y) = (\alpha, x^2 - y^2 + \beta)$,

con $\alpha = ce$ y $\beta = cf$ con $c \neq 0$, donde para

$c^2 e^2 + cf > -\frac{1}{4}$ es análoga a la curva

logística en la cual tenemos una dinámica

distinta para $c^2 e^2 + cf = -\frac{1}{4}$ y a

$c^2 e^2 + cf < -\frac{1}{4}$. En este último caso no

tenemos puntos fijos para $f_{\alpha, \beta}$ donde

$$F_{\alpha, \beta}^{h+1}(x, y) \rightarrow (\alpha, -\infty)$$

3. CONCLUSIONES

En este caso hemos tenido suerte de que la aplicación en su primer iterado caiga en una recta, lo que hace que las demás, sean iteraciones de la recta en la recta, lo que nos llevó a transferir la dinámica unidimensional y trasladar resultados de dinámicas conocidas en este caso la de la curva logística. Esto quiere decir que en el plano también se replican de algún modo las dinámicas unidimensionales y que hay un mundo mucho más complejo por descubrir.

Así hemos podido acercarnos a poder describir parte de la dinámica de una de las 21 aplicaciones propuestas por Gómez y López de Medrano, esto es un trabajo arduo para el resto de las aplicaciones cuadráticas y apertura un línea de investigación muy interesante, nosotros hemos abierto el camino para que otros lo sigan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALLIGOOD, KATHLEEN; SAUER TIM; YORKE, JAMES"CHAOS: AN INTRODUCTION TO DYNAMICAL SYSTEMS". (OCT 1, 2000). Springer Verlag.
2. DEVANEY, ROBERT L." INTRODUCTION TO CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS (2ED) ED. Addison-Wesley Boston, 1989.
3. GÓMEZ A, GUILLERMO; Lopez de Medrano, Santiago: *Iteratios of Quadratic Mappings of The Plane, (prelimirary report)*. Facultad de Ciencias e Instituto de Matemáticas, UNAM, pág. 6 y 7.
4. MANDELBROT, BENOÎT, "LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LA NATURALEZA, CIENCIA". FÍSICA OCTUBRE 1997, ISBN: 978-84-8310-549-8.
5. ROMERA, MIGUEL ;"TÉCNICA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS", Consejo Superior de Investigaciones Científicas España 1997. ISBN 8400-07667-2.