

## SIMULACIÓN DE TRAYECTORIAS DE UNA PLATAFORMA SERIAL ROBOTIZADA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD APLICANDO TRAZADORES CÚBICOS Y TRAPEZOIDALES

Caraguay Washington<sup>1</sup> García Cecilia<sup>2</sup>

**Resumen.** Este artículo presenta la generación de trayectorias mediante trazadores cúbicos y trapezoidales simulados entre un punto inicial y final sobre el modelo cinemático de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad. El propósito de este trabajo radica en la consecución de una función suave de interpolación para su movimiento analizando el comportamiento de la trayectoria del trazador en posición, velocidad y aceleración. Para la simulación del movimiento se desarrolla una interfaz gráfica en LabView, donde se visualiza el movimiento de la plataforma serial y la trayectoria generada por los trazadores entre los puntos.

**Palabras claves:** Trazador cúbico, trazador trapezoidal, trayectoria, modelo cinemático, grados de libertad.

**Abstract.** This article presents the trajectory generation using cubic and trapezoidal tracers simulated between start and end point on the kinematic model of a robot serial platform of two degrees of freedom. The aim of this work lies in achieving a smooth interpolation function for the motion by analyzing the behavior of the tracer in position, velocity and acceleration. To simulate the trajectories has been developed a graphic interface in LabView, where the motion of the serial platform and the trajectory generated by the tracer between points is displayed.

**Keywords:** Cubic tracer, trapezoidal tracer, trajectory, kinematic model, degrees of freedom.

**Recibido:** Noviembre 2015.

**Aceptado:** Marzo 2016.

### 1. INTRODUCCIÓN

Para la ejecución de una tarea determinada un robot serial debe moverse desde un punto inicial a un punto final, el mismo que puede ser realizado de múltiples formas. Sin embargo, el problema radica en cómo se especifica la trayectoria o ruta del movimiento a través del espacio. El control cinemático selecciona trayectorias que idealmente deberá seguir la plataforma, teniendo en cuenta sus limitaciones, para ajustarse lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario.

En el presente artículo se analiza los perfiles de trayectorias más frecuentemente utilizados en los movimientos de posición punto a punto de robots manipuladores entre ellos los trazadores cúbicos y trapezoidales, a la vez que se expone una interfaz gráfica de usuario desarrollado en LabView para fines de simulación de trayectorias punto a punto visualizando además del movimiento, de la plataforma, su posición, velocidad y aceleración.

En referencia a la plataforma serial robotizado de dos grados de libertad que se toma como mecanismo a simular, Figura 1, pertenece al laboratorio del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid, la misma que es

de arquitectura abierta y en ella se pueden probar de manera experimental diferentes esquemas de control, previamente simulados.

### FIGURA 1

Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales  
**Plataforma serial robotizada de dos grados de libertad, [1].**



### 2. BASES CONCEPTUALES

#### Generación de Trayectorias

El problema más simple es mover el extremo de la plataforma desde una posición inicial hasta cierta posición final deseada, lo que implica un cambio tanto en la orientación como en la posición, en nuestro caso solo involucra cambios en la posición. Sin embargo, algunas veces es necesario especificar el movimiento con mucho más detalle para lograr el objetivo. Una manera de lograr aquello es incluir puntos intermedios entre las posiciones inicial y

<sup>1</sup>Caraguay, Washington, M.Sc., Profesor, Universidad Espíritu Santo-Ecuador. (e\_mail: wcaraguay@uees.edu.ec).

<sup>2</sup>García, Cecilia, Ph.D., Profesor, Universidad Politécnica de Madrid-España. (e\_mail: cecilia.garcia@upm.es).

final. Por lo tanto al completar el movimiento, el extremo del eslabón final debe pasar a través de un conjunto de posiciones intermedias, descritos por puntos intermedios.

Es conveniente que el movimiento descrito, sea lo más uniforme posible, debido a que los movimientos bruscos tienden a producir vibraciones causando un mayor desgaste entre los mecanismos que conforman la estructura. Por tanto, se trata de determinar una función suave de interpolación para cada articulación. La literatura ofrece algunos métodos para generación de trayectorias, tanto para el espacio de las articulaciones como para el espacio cartesiano, [2], [3], [4], [5].

### Trazador Cúbico

Se trata de obtener un polinomio para cada articulación de forma que su valor para un tiempo inicial  $t_0$ , sea el valor de su posición angular inicial  $q_0$ , y su valor para el tiempo final  $t_f$ , sea el valor de su posición angular final  $q_f$ . Además, se requiere que la función sea continua en velocidad, su primera derivada, lo que significa que la velocidad inicial y final deben ser cero. Para crear este movimiento uniforme son evidentes al menos cuatro restricciones sobre  $q(t)$ , ecuación (1):

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0 \\ q(t_f) &= q_f \\ \dot{q}(0) &= 0 \\ \dot{q}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Estas cuatro restricciones se pueden satisfacer por un polinomio de cúbico o de grado tres, dado que tiene en su ecuación cuatro coeficientes, como muestra la ecuación (2), donde su primera derivada y segunda derivada hacen referencia a la velocidad y aceleración respectivamente.

$$\begin{aligned} q(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ \dot{q}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{q}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t \end{aligned} \quad (2)$$

Al combinar el conjunto de ecuaciones (1) y (2) surge el siguiente sistema de ecuaciones (3):

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 \\ q_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Resolviendo estas ecuaciones para obtener las  $a_i$ , se tiene (4):

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2} (q_f - q_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3} (q_f - q_0) \end{aligned} \quad (4)$$

De esta manera con el conjunto de ecuaciones (4) es posible calcular el polinomio cúbico que enlaza

cualquier posición de ángulo inicial con cualquier posición final deseada. Esta solución es para el caso en el que el movimiento de la articulación inicia y termina con velocidad cero.

### Trazador Trapezoidal

Consiste en descomponer en tres tramos consecutivos la trayectoria que une la posición inicial  $q_0$ , con la posición final  $q_f$ . En el tramo central se utiliza un interpolador lineal, y por tanto, la velocidad se mantiene constante. En los tramos 1 y 3, se utiliza un polinomio de segundo grado, de tal manera que en el tramo 1 la velocidad varía linealmente desde la velocidad de la trayectoria presente hasta la de la siguiente. Se tiene entonces que en los tramos 1 y 3 la aceleración toma valores distintos de cero, mientras que en el tramo 2 la aceleración es nula. Para una trayectoria punto a punto, la ecuación correspondiente en los tres tramos está determinada por (5):

$$\begin{aligned} q(t) &= \begin{cases} q_0 + \text{sign}(q_f - q_0) \frac{a}{2} t^2, & \text{si } t \leq t_b \\ q_0 - \text{sign}(q_f - q_0) \frac{v^2}{2a} + \text{sign}(q_f - q_0) vt, & \text{si } t_b < t \leq t_f - t_b \\ q_f + \text{sign}(q_f - q_0) \left( \frac{at_f^2}{2} + at_f t - \frac{a}{2} t^2 \right), & \text{si } t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases} \quad (5) \\ \dot{q}(t) &= \begin{cases} \text{sign}(q_f - q_0) at, & \text{si } t \leq t_b \\ \text{sign}(q_f - q_0) v, & \text{si } t_b < t \leq t_f - t_b \\ \text{sign}(q_f - q_0) (at_f - at), & \text{si } t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases} \\ \ddot{q}(t) &= \begin{cases} \text{sign}(q_f - q_0) a, & \text{si } t \leq t_b \\ 0, & \text{si } t_b < t \leq t_f - t_b \\ -\text{sign}(q_f - q_0) a, & \text{si } t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases} \end{aligned}$$

Dónde:

$$\begin{aligned} t_b &= \frac{v}{a} \\ t_f &= \text{sign}(q_f - q_0) \left( \frac{q_f - q_0}{v} \right) + \frac{v}{a} \end{aligned}$$

Siendo:

$v$ : velocidad máxima permitida  
 $a$ : aceleración máxima permitida

La característica de este trazador es que su gráfica de velocidad toma la forma de un trapecio y su característica de respuesta es la de tiempo mínimo, con las restricciones de velocidad y aceleración máximas permitidas.

### 3. SIMULACIÓN DE TRAYECTORIAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con el software LabView se desarrolló una interfaz gráfica de usuario para simular trayectorias punto a punto con base en trazadores cúbicos y trapezoidales. Esta interfaz contiene una animación en entorno 3D que simula el movimiento de la plataforma robotizada. Para el desarrollo de sus algoritmos, se utilizaron funciones en LabView de la librería Robotics y funciones de programación básicas, se aplicaron las ecuaciones de trayectorias detalladas en la sección anterior y se hizo uso del modelo cinemático directo, donde las coordenadas de posición  $x, y, z$  del extremo final del segundo eslabón vienen definidas por:

$$x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

$$z = 0$$

Dónde:

$l_1$ : longitud del primer eslabón

$l_2$ : longitud del segundo eslabón

$q_1$ : desplazamiento angular del primer eslabón

$q_2$ : desplazamiento angular del segundo eslabón

Y la orientación en ángulos de Euler está dada por:

$$\phi = q_1 + q_2$$

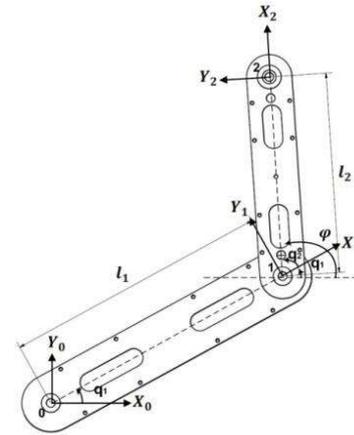
$$\theta = 0$$

$$\psi = 0$$

La Figura 2 muestra una representación esquemática de la plataforma para una mejor interpretación de los parámetros expuestos:

FIGURA 2

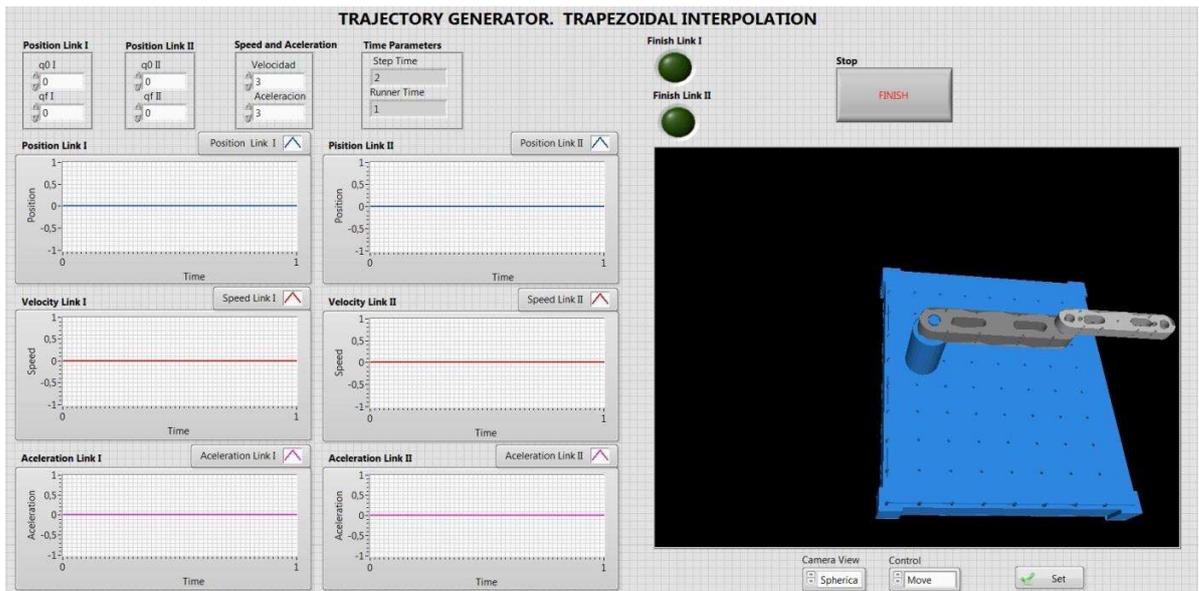
Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales  
Representación esquemática de la plataforma serial robotizada, [1].



En la Figura 3 se muestra la interfaz cuando se encuentra en su posición de inicio, lista para desplazar angularmente sus eslabones hasta una posición final determinada. Con esta interfaz se evita prácticas inadecuadas de manera directa con la plataforma robotizada real, debido a que el tiempo de muestreo que exige la interpolación requiere de varias pruebas a realizar, además ahorro de energía.

FIGURA 3

Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales  
Interfaz Gráfica de Usuario para simulación de trayectorias. Estado inicial  $q_1 = 0, q_2 = 0$ , [1].



Entonces, utilizando las ecuaciones para determinar las  $a_i$  expuestas en (4) se describe el proceso matemático para la generación de trayectorias.

Primeramente, haciendo uso de trazadores cúbicos se moverá el primer eslabón desde la posición inicial  $q_0 = 0$  hasta  $q_f = 90$  grados y el segundo eslabón desde  $q_0 = 0$  hasta  $q_f = 180$  grados. Ambos movimientos se lo realizará en un tiempo  $t_f = 3$ . De esta manera los coeficientes  $a_i$  para el primer eslabón quedan identificados.

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 30$$

$$a_3 = -\frac{20}{3}$$

Así los polinomios buscados que representan la posición Figura 4, velocidad Figura 5 y aceleración Figura 6, quedan determinados:

$$q(t) = 30t^2 - \frac{20}{3}t^3 \text{ (grados)}$$

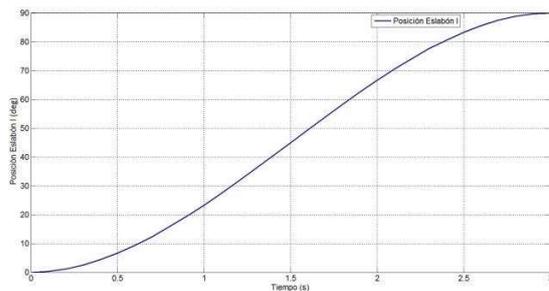
$$\dot{q}(t) = 60t - 20t^2 \text{ (grados/s)}$$

$$\ddot{q}(t) = 60 - 40t \text{ (grados/s}^2\text{)}$$

Aunque LabView es un excelente software de simulación industrial, no ofrece buenas características de resolución en sus gráficas, para este caso los resultados obtenidos de la evaluación de los polinomios fueron trasladados a Matlab con la finalidad de ofrecer una mejor visualización de las gráficas de trazabilidad.

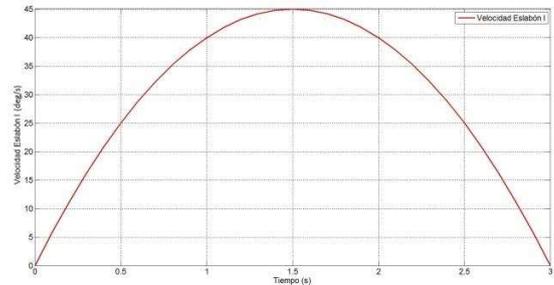
**FIGURA 4**

*Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales*  
**Gráfica de posición primer eslabón, [1].**



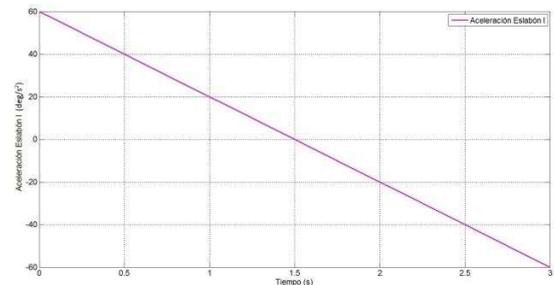
**FIGURA 5**

*Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales*  
**Gráfica de velocidad primer eslabón, [1].**



**FIGURA 6**

*Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales*  
**Gráfica de aceleración primer eslabón, [1].**



Del mismo modo se obtienen los  $a_i$  para el segundo eslabón:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 60$$

$$a_3 = -\frac{40}{3}$$

Y los polinomios que representan su posición Figura 7, velocidad Figura 8 y aceleración Figura 9, quedan determinados:

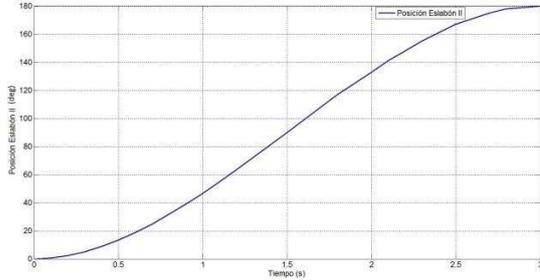
$$q(t) = 60t^2 - \frac{40}{3}t^3 \text{ (grados)}$$

$$\dot{q}(t) = 120t - 40t^2 \text{ (grados/s)}$$

$$\ddot{q}(t) = 120 - 80t \text{ (grados/s}^2\text{)}$$

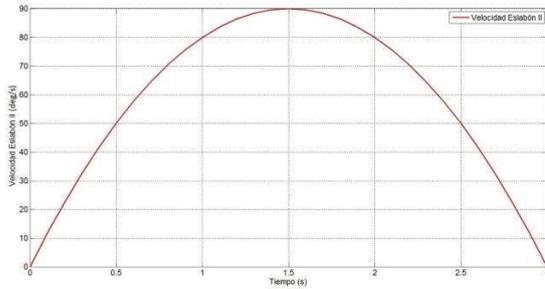
**FIGURA 7**

Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales  
**Gráfica de posición segundo eslabón, [1].**



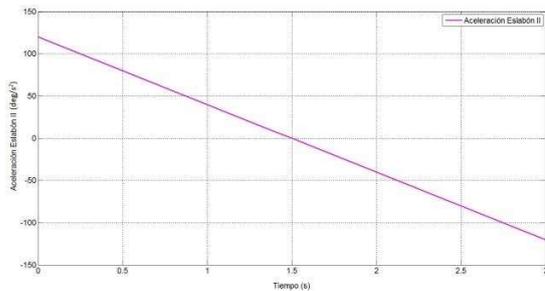
**FIGURA 8**

Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales  
**Gráfica de velocidad segundo eslabón, [1].**



**FIGURA 9**

Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales  
**Gráfica de aceleración segundo eslabón, [1].**



En las gráficas se observa que la posición corresponde a una trayectoria cúbica con un tiempo definido, que tienen como perfil de velocidad una parábola y su aceleración es lineal.

Este procedimiento es utilizado cuando la plataforma realiza movimientos desde un punto inicial a un punto final. Sin embargo si lo que deseamos es pasar a través de puntos intermedios sin detenernos, es decir generar trayectorias continuas, se requiere de un ajuste de las ecuaciones cúbicas a las restricciones de las trayectorias ya que involucrarían velocidades no nulas, lo que conlleva

a conocer las velocidades deseadas de las articulaciones en los puntos intermedios.

Por tanto las restricciones de las ecuaciones (6) se vuelven:

$$q(0) = q_0 \quad (6)$$

$$q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

$$\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$$

Y la solución de los coeficientes  $a_i$  ahora vienen dados por la expresión (7):

$$a_0 = q_0 \quad (7)$$

$$a_1 = \dot{q}_0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(q_f - q_0) - \frac{2}{t_f}\dot{q}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{q}_f$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(q_f - q_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{q}_f + \dot{q}_0)$$

Existen diferentes métodos para dar con el conocimiento de las velocidades en los puntos intermedios [2], [3], [4], una de ellas consiste en que el sistema seleccione de manera automática las velocidades en los puntos intermedios de tal forma que la aceleración en esos puntos sea suave y continua.

Para la generación de trayectorias mediante el uso de trazadores trapezoidales los valores de velocidad y aceleración se han fijado en 3 m/s y 3m/s<sup>2</sup> respectivamente. Los movimientos desde la posición inicial  $q_0$  hasta la posición final  $q_f$  son los mismos que para las pruebas realizadas en los trazadores cúbicos.

Primer eslabón:

$$q_0 = 0 \text{ grados}$$

$$q_f = 90 \text{ grados}$$

$$t_b = 1 \text{ s.}$$

$$t_f = 31 \text{ s.}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2, & \text{si } t \leq 1 \\ -\frac{3}{2} + 3t, & \text{si } 1 < t \leq 30 \\ -\frac{2703}{2} + 93t - \frac{3}{2}t^2, & \text{si } 30 < t \leq 31 \end{cases} \quad (\text{grados})$$

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} 3t, & \text{si } t \leq 1 \\ 3, & \text{si } 1 < t \leq 30 \\ 93 - 3t, & \text{si } 30 < t \leq 31 \end{cases} \quad (\text{grados/s})$$

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} 3, & \text{si } t \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 < t \leq 30 \\ -3, & \text{si } 30 < t \leq 31 \end{cases} \quad (\text{grados/s}^2)$$

Segundo eslabón:

$$q_0 = 0 \text{ grados}$$

$$q_f = 180 \text{ grados}$$

$$t_b = 1 \text{ s.}$$

$$t_f = 61 \text{ s.}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2, & \text{si } t \leq 1 \\ -\frac{3}{2} + 3t, & \text{si } 1 < t \leq 60 \\ -\frac{11523}{2} + 183t - \frac{3}{2}t^2, & \text{si } 60 < t \leq 61 \end{cases} \quad (\text{grados})$$

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} 3t, & \text{si } t \leq 1 \\ 3, & \text{si } 1 < t \leq 60 \\ 183 - 3t, & \text{si } 60 < t \leq 61 \end{cases} \quad (\text{grados/s})$$

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} 3, & \text{si } t \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 < t \leq 60 \\ -3, & \text{si } 60 < t \leq 61 \end{cases} \quad (\text{grados/s}^2)$$

Se observa que los tiempos de movimiento  $t_b$  y  $t_f$  es una relación entre los valores de velocidad y aceleración definidos y es precisamente el tiempo de cambio de curva y de duración total del movimiento de posición respectivamente.

En la Figura 10 se muestra la interfaz gráfica de simulación con las respuestas en posición, velocidad y aceleración para ambos eslabones generados por el trazador trapezoidal. Además, se observa un entorno 3D del posicionamiento final de sus eslabones. La interfaz dispone de recuadros para fijar la velocidad posición de inicio y final, la velocidad y aceleración así como también un botón de Stop FINISH, para la finalización de la simulación.

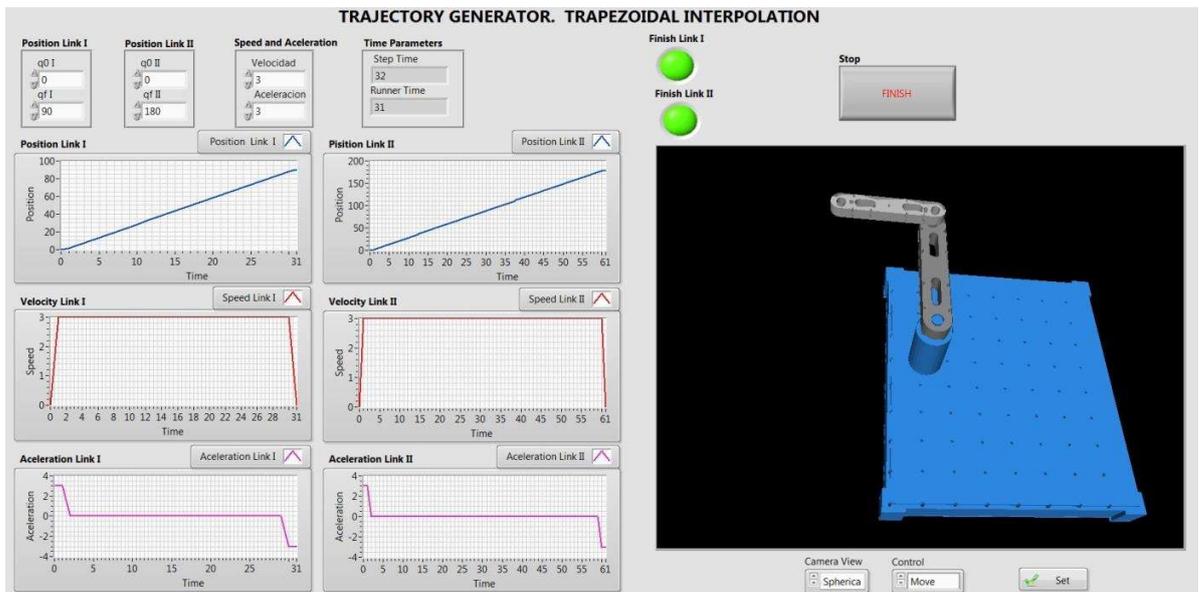
Aunque la interpolación con trazadores trapezoidales ofrece continuidad en velocidad, sin embargo es discontinua en aceleración, a diferencia de la interpolación con trazadores cúbicos, que es continua tanto en velocidad como en aceleración, siendo este un modelo representativo para el caso de generación de trayectorias aplicados a robots manipuladores en tareas de pick and place.

**FIGURA 10**

*Simulación de trayectorias de una plataforma serial robotizada de dos grados de libertad aplicando trazadores cúbicos y trapezoidales*

**Simulación de trayectorias con base en un trazador trapezoidal.**

**Estado final: primer eslabón  $q_1 = 90$  grados, segundo eslabón  $q_2 = 180$  grados, [1].**



#### 4. CONCLUSIONES

Haciendo uso de softwares de simulación como MATLAB y LabView y utilizando métodos de interpolación como los trazadores cúbicos y trapezoidales se ha podido determinar los tiempos del movimiento angular de los eslabones desde una posición inicial hasta una posición final. Es evidente el movimiento ralentizado con que se han generado las trayectorias, esto en la práctica se evidencia en el giro de los motores de corriente directa que a su vez desplazan angularmente los eslabones desde la posición inicial hasta la posición final. Para obtener mejores tiempos de respuestas para los

desplazamientos es muy práctico utilizar aceleraciones mayores en un orden superior a 10 veces su velocidad.

Las simulaciones realizadas con base en la interfaz gráfica de usuario predice el comportamiento de trayectorias de sistemas robotizados seriales contribuyendo a la investigación de modelos matemáticos que se ajusten lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario. En el presente trabajo se ha utilizado la interpolación con base en trazadores cúbicos y trapezoidales, pudiéndose extender a otros métodos de interpolación con la finalidad de optimizar la planificación de la trayectoria.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **CARAGUAY, W., & GARCÍA, C. (2013).** Modelado, identificación y control con base en el modelo dinámico de un robot de dos grados de libertad de accionamiento directo. SENESCYT. Repositorio Digital. Obtenido de <http://repositorio.educacionsuperior.gob.ec/handle/28000/1572>
- [2] **BARRIENTOS, A., PEÑÍN, L., BALAGUER, C., & ARACIL, R. (2007).** Fundamentos de Robótica. Madrid: Mc Graw Hill.
- [3] **OLLERO, A. (2007).** Robótica. Manipuladores y Robots Móviles. Barcelona: Alfaomega / Marcombo.
- [4] **CRAIGH, J. (2006).** Robótica. México: Pearson/Prentice Hall.
- [5] **SPONG, M., & VIDYASAGAR, M. (1989).** Robot Dynamics and Control. New York: John Willey & Sons.