Publicado:2018-04-02

CARACTERIZACIÓN DE ALGEBRAS DE CLIFFORD COMO ANILLOS COCIENTES

(CHARACTERIZATION OF CLIFFORD ALGAE AS RING QUOTIENTS)

José Jatem[1], Judith Vanegas[2]

Resumen: *Las álgebras de Clifford pueden considerarse como una generalización del algebra de los números complejos. Ellas han sido el álgebra subyacente de muchas aplicaciones en ingeniería, física y diferentes ares de la matemática. En este artículo vamos a mostrar diferentes algebras de Clifford expresadas como anillos cocientes. Así mismo se establecen formalmente algunas de sus propiedades.*
Palabras claves: Algebras de Clifford, Números complejos elípticos, anillos cocientes.
Abstract: *Clifford Algebras can be viewed as a generalization of the Complex Numbers Algebra and they are applied in Engineering, Physics and many areas in Mathematics. In this article Clifford Algebras will be presented as quotient rings and some of its properties will be stated.*
Keywords: Clifford algebras, elliptical complex numbers, quotient rings.

Recibido: Marzo 2018
Aceptado: Marzo 2018

1. INTRODUCCION

La interacción del análisis complejo con otras ciencias básicas e ingenierías ha llevado a aplicar sus métodos en dimensiones mayores. Una posibilidad para hacer eso se basa en el concepto de algebras de Clifford que resultan ser una generalización del cuerpo de los números complejos.

A través de la diferenciación compleja podemos mostrar la aplicación de estructuras algebraicas a ecuaciones diferenciales parciales. La ecuación $\partial_{\bar{z}} w(z) = 0, w(z) = u(z) + iv(z), z = x + iy$ y u, v funciones a valores reales, nos lleva al sistema de primer orden en el plano conocido como el sistema de Cauchy-Riemann:

$$\partial_x u - \partial_y v = 0 \qquad (1.1)$$
$$\partial_y u + \partial_x v = 0 \qquad (1.2)$$

Dicho de otra manera, debido a la posibilidad de multiplicar números complejos, podemos aplicar el operador de Cauchy-Riemann

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right) \qquad (1.3)$$

a funciones de valores complejos.

Si sustituimos el operador de he Cauchy-Riemann (1.3) del plano complejo por el ordenador diferencial vectorial.

$$D = \sum_{j=0}^{n} e_j \partial_j \qquad (1.4)$$

de R^{n+1} con las coordenadas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y la base $e_0 = 1,\ e_1,\ \ldots\ e_n,\ \partial_j = \partial/\partial x_j$ para $j = 0, 1, \ldots, n$,
entonces el llamado Análisis de Clifford que es una generalización del análisis complejo a dimensiones mayores, usa estructuras algebraicas similares para investigar ecuaciones diferenciales parciales en dimensiones mayores. Las estructuras algebraicas subyacentes son las algebras de Clifford que hacen posible una multiplicación entre vectores en $\mathbb{R}^{n+1}$.

En este artículo nosotros presentamos avances de la formalización de diferentes algebras de Clifford como anillos cocientes lo que nos permite demostrar de manera sencilla características propias de estas algebras.

2. ALGEBRAS DE CLIFFORD CLASICAS

Con el fin de ilustrar la definición de las Algebras de Clifford [1] se construye el Algebra de los Números Complejos $\mathbb{C}$, para ello consideramos el algebra $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x. En esta consideramos el ideal I generado por el polinomio $x^2 + 1$y el cociente $A = \frac{\mathbb{R}[x]}{I}$. Puesto que el polinomio $x^2 + 1$ es irreducible, resulta I un ideal maximal y A a los elementos de la base $\{1, x, x^2, \ldots\}$ de $\mathbb{R}[x]$, se obtiene el siguiente conjunto de generadores de A: $\{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2, \ldots\}$, del

[1]*José Játem, Prof., Universidad Técnica de Manabí (UTM); (e-mail: jvjatem@gmail.com).*
[2]*Judith Vanegas, Dr., Universidad Técnica de Manabí (UTM); (e-mail: cvanegas@utm.edu.ec).*

cual es posible extraer una base de A. Ahora bien, $x^2 + 1 \in I$ implica que para todo natura m

$$\bar{x}^m = \begin{cases} \bar{1}, & si \quad m \equiv 0 \pmod{4} \\ \bar{x}, & si \quad m \equiv 1 \pmod{4} \\ -\bar{1}, & si \quad m \equiv 2 \pmod{4} \\ -\bar{x}, & si \quad m \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

De donde el conjunto $\{\bar{1}, \bar{x}\}$ es un conjunto minimal de generadores de A y por tanto una base.

La función $\Psi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ definida en la base $\{1, x, x^2, \dots\}$ de $\mathbb{R}[x]$ por

$$\Psi(x^m) = \begin{cases} 1, & si \quad m \equiv 0 \pmod{4} \\ i, & si \quad m \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & si \quad m \equiv 2 \pmod{4} \\ -i, & si \quad m \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

y extendida por linealidad a todo $\mathbb{R}[x]$ resulta un epimorfismo de álgebras, cuyo Kernel es *I*, de donde, por el teorema fundamental de homomorfismo, A y $\mathbb{C}$ son isomorfos.

Esta forma de construir los complejos ilustra el trabajo posterior para construir las Álgebras de Clifford.

Se considera a continuación el $\mathbb{R}-$ espacio vectorial $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ de todas las combinaciones lineales formales de elementos de la forma $x_{i_1}^{m_{i_1}} \dots x_{i_k}^{m_{i_k}}$, en donde $k \in \mathbb{N}, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, y $m_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo $j = 1, \dots, k$ (el conjunto de tales elementos forman la base de $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$, es decir, los elementos de $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ son de la forma:

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1 \dots i_k}^{m_{i_1},\dots,m_{i_k}} x_{i_1}^{m_{i_1}} \dots x_{i_k}^{m_{i_k}}, \text{ con } a_{i_1 \dots i_k}^{m_{i_1},\dots,m_{i_k}} \in \mathbb{R}.$$

En $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ se define un producto asociativo y no conmutativo en la base, el cual extendemos cuidando la linealidad a todo el espacio $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$, con lo cual éste deviene en una $\mathbb{R}-$ algebra no conmutativa. El algebra $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ no debe confundirse con la de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ e indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ denotada por $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$.

Para facilitar la notación seguimos llamando indeterminadas a los elementos $[x_1, x_2 \dots, x_n]$ y polinomios en estas indeterminadas a los elementos del algebra recién definida.

A continuación consideramos el ideal bilátero *I* de $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ generados por los polinomios de la forma

$x_i^2 + 1$ y $x_i x_j + x_j x_i$, en donde $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$.

El anillo cociente $A_n = \frac{\mathbb{R}^*[x_1,\dots,x_n]}{I}$ se denomina el Álgebra de Clifford A_n con coeficientes en $\mathbb{R}$ e indeterminadas $x_1, x_2 \dots, x_n$.

A continuación calculamos la dimensión de A_n se sigue que el conjunto de elementos de la forma $\bar{x}_{i_1}^{m_{i_1}} \dots \bar{x}_{i_k}^{m_{i_k}}$, en donde $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, $k \in \mathbb{N} \cup$, y $m_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo $j = 1, \dots, k$ es un conjunto de generadores de A_n, del cual se puede extraer una base.

Puesto que $\bar{x}_i \bar{x}_j = -\bar{x}_j \bar{x}_i$ en A_n, los elementos del conjunto de generadores pueden reordenarse como $\bar{x}_1^{m_1} \dots \bar{x}_n^{m_n}$, con $m_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo $j = 1, \dots, n$.

El otro tipo de generadores del ideal I: $x_i^2 + 1$ permite refinar aún más el conjunto de generadores de A_n, pues resulta $\bar{x}_i^{(2m+r)} = (-1)^m \bar{x}_i^r$, con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $r = 0$ ó 1, quedando los generadores de A_n de la forma $\bar{x}_1^{m_1} \dots \bar{x}_n^{m_n}$, $m_j = 0$ ó 1 para todo $j = 1, \dots, n$. Resulta entonces el conjunto

$$\bar{x}_1^{m_1} \dots \bar{x}_n^{m_n} : m_j = 0 \text{ ó } 1, \forall_j = 1, \dots, n$$

una base de A_n y dim(A_n)= 2^n.

3. ALGEBRAS DE CLIFFORD GENERALIZADAS

En el álgebra $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ se considera a continuación el ideal bilátero I generado por los polinomios $x_i^2 + \propto_i$ y $x_i x_j + x_j x_i - 2\gamma_{ij}$ en donde $\propto_i$ y $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ son constantes reales para cada $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$. De esta manera el anillo cociente $A_n(2, \propto_i, \gamma_{ij}) = \frac{\mathbb{R}^*[x_1,\dots,x_n]}{I}$ se denomina Álgebra de Clifford Generalizada.

Procediendo como antes, se toman *I*-clases en la base de $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ para obtener el conjunto de generadores de $A_n(2, \propto_i, \gamma_{ij})$ cuyos elementos son de la forma $\bar{x}_1^{m_1} \dots \bar{x}_n^{m_n}$, en donde $k \in \mathbb{N}, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ y $m_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo $j = 1, \dots, k$. De este conjunto extraemos una base de $A_n(2, \propto_i, \gamma_{ij})$.

Los generadores del ideal *I* de la forma $x_i^2 + \propto_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ dan lugar a

(1) $\bar{x}_i^{(2m+r)} = (-\propto_i)^m x_i^{-r}$, con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $r = 0$ ó 1, en $A_n(2, \propto_i, \gamma_{ij})$.

Por otro lado los generadores de I del tipo $x_i x_j + x_j x_i - 2\gamma_{ij}$ implican

(2) $x_i x_j = -x_j x_i + 2\gamma_{ij}$.

Usando (1) y (2) y transponiendo convenientemente en los generadores de $A_n(2, \propto_i, \gamma_{ij})$ se tiene que el conjunto

$$\{\bar{x}_1^{m_1} \dots \bar{x}_n^{m_n}, \qquad m_j = 0 \text{ ó } 1, \forall_j = 1, \dots, n\}$$

es una base del álgebra $A_n(2, \propto_i, \gamma_{ij})$ y por lo tanto su dimensión es 2^n.

Para más información sobre estas álgebras ver [3,2].

4. NUMEROS COMPLEJOS ELIPTICOS

Consideramos en el álgebra $\mathbb{R}^*[x_1, \dots, x_n]$ el ideal bilátero I generado por los polinomios

$$x_i^{k_i} + p_i(x) \ y\ x_i x_j + x_j x_i$$

en donde $x = (x_1, \dots, x_n), k_i \geq 2$ y $p_i(x)$ es un polinomio de grado menor que k_i. En este contexto vamos a estudiar un caso particular e importante del anillo cociente $\frac{\mathbb{R}^*[x_1,\dots,x_n]}{I}$. Se trata para $n = 1$ y $k_1 = 2$ del caso en que se considera el anillo $\mathbb{R}[x]$ de polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x y como el ideal I, el generado por el polinomio irreductible

$$x^2 + ax + b, \text{ es decir, } a^2 - 4b < 0$$

Esto da lugar al anillo cociente $\Lambda = \frac{\mathbb{R}[x]}{<x^2+ax+b>}$, que se denomina *Anillo de los Complejos Elípticos*. Cabe destacar que los Números Complejos Elípticos fueron introducidos por Yaglom en [4].

Este anillo es en realidad una $\mathbb{R}-$álgebra y por lo tanto un $\mathbb{R}$ −espacio vectorial, una de cuyas bases es $B = \{\bar{1}, \bar{x}\}$, de donde Λ tiene dimensiona 2.

Una vez establecidas las raíces α_1 y $\alpha_2 = -\alpha_1$ de -1 en Λ, se observa que los elementos 1 y α_i, para i = 1, 2, son linealmente independientes y por lo tanto forman sendas bases de Λ. Con estas dos raíces se construyen dos epimorfismos de $\mathbb{R}-$álgebras: $\Psi_i: \mathbb{R}[x] \to \Lambda$, i = 1, 2, que luego servirán para definir sendos isomorfismos $\cong_i: \mathbb{C} \leftrightarrow \Lambda$. Una vez aclarado que C y Λ son isomorfos, establecemos los siguientes sencillos lemas cuyas pruebas son directas:

Lemma 4.1. *Sea $\phi: A \to B$ un isomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras y $\|\cdot\|_\phi: A \to [0, \propto)$una norma en A, entonces $\|\cdot\|_\phi: B \to [0, \propto)$, definida para todo $u \in B$ por $\|u\|_\phi: \|\phi^{-1}(u)\|$ es una norma en B (inducida por el isomorfismo ϕ y la norma en A).*

Lemma 4.2. *Sea $\phi : A \to B$ un isomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras y $(\cdot,\cdot)$: $A \times A \to \mathbb{R}$, un producto interno en A, entonces $(\cdot,\cdot)_\phi$: $B \times B \to \mathbb{R}$, definido para todo $u, v \in B$ por $(u, v)_\phi = (\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$ es un producto interno en B (inducido por el isomorfismo ϕ y el producto interno en A).*

Aplicando estos dos lemas se define una norma y un producto interno en Λ vía los isomorfismos $\cong_i: \mathbb{C} \leftrightarrow \Lambda$, resultando no sólo las dos normas y los dos productos internos coincidentes, sino también la norma así definida, la misma que la que se deduce de ambos productos internos. Vía los isomorfismos $\cong_i: \mathbb{C} \leftrightarrow \Lambda$, definimos una conjugación enΛ. La norma, el producto interno, así como la conjugación en Λ facilitan los calculas en el álgebra de los Complejos Elípticos.

5. CONCLUSIONES

Lo establecido en este trabajo formaliza algebraicamente la definición de álgebras de Clifford, lo cual facilita los cálculos en ´estas. En el caso particular del álgebra de los complejos elípticos, los resultados mostrados son un avance de la investigación llevada a cabo por los autores en ese tema y son inéditos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS Y ELECTRONICAS

[1] **R. Brackx, F. Delanghe and F. Sommen**. *Clifford Analysis*. Pitman Research Notes Vol.76, (1982).

[2] **J. Játem and J. Vanegas**. *Algebraic structures in generalized Clifford analysis and applications to boundary value problems*. Bull. Comput. App. Math., Vol.3, No.2, pp. 39 - 69, (2015).

[3] **W. Tutschke and C.J. Vanegas**. *Clifford algebras depending on parameters and their applications to partial differential equations. Contained in Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis.* Beijing Science Press. Mathematics Monograph Series 11, (2008) 430-450.

[4] **I. M. Yaglom,** *Complex Numbers in Geometry.* Academic Press, New York, 1968.