Matemática: Una publicación del FCNM – ESPOL
2018, Vol.16, No.1 **Publicado:2018-04-02**

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA INFINITO DE ECUACIONES LINEALES DEL TIPO DE WIENER-HOPF MEDIANTE ECUACIÓN FUNCIONAL Y UNIFORMIZACIÓN

(SOLUTION OF AN INFINITE SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS OF THE WIENER-HOPF TYPE BY FUNCTIONAL EQUATION AND UNIFORMIZATION)

Gortaire Danilo[1], Salgado Nelson[2]

Resumen: *Con el presente trabajo iniciamos un ciclo de 5 estudios, donde se analizan las condiciones y las fórmulas para la solución general de casos particulares de la ecuación funcional lineal* $A(z,w)\xi(z,w)+A(z,0)\xi(z,0)+A(0,w)\xi(0,w)+A(0,0)\xi(0,0)=zw\eta(z,w), |z|\leq 1, |w|\leq 1,\quad (0)$ *con* ξ *como incógnita, ecuación que proviene de la ecuación bidimensional discreta del tipo Wiener y Hopf en un cuadrante del plano y que se la analiza para el caso particular en que el núcleo* $A(z,w)$ *tiene la forma* $A(z,w)=(az+bw+c)^n$, $abc\neq 0, n\in\mathbb{N}$. *Estudios detallados sobre ecuaciones funcionales de este tipo se pueden encontrar en* [1,2,3]. *El método principal de investigación para resolver la ecuación funcional con el núcleo anterior es el de la uniformización de la relación* $A(z,w)=0$, *la prolongación analítica, la integral del tipo de Cauchy, los problemas de contorno para las funciones analíticas [4] y otros. La presente investigación tiene un carácter teórico, pero los resultados y técnicas de análisis pueden ser aplicados principalmente a problemas de la teoría de colas, caminatas aleatorias, ecuaciones de Wiener y Hopf en un cuadrante [1], sistemas infinitos y ecuaciones funcionales semejantes [3]*

Palabras clave: Ecuación funcional; uniformización; serie convergente; prolongación analítica; integral del tipo de Cauchy.

Abstract: *With the present work we start a cycle of 5 studies, where we analyze the conditions and formulas for the general solution of particular cases of the linear functional equation* $A(z,w)\xi(z,w)+A(z,0)\xi(z,0)+A(0,w)\xi(0,w)+A(0,0)\xi(0,0)=zw\eta(z,w)$, $|z|\leq 1, |w|\leq 1$, *with* $\boldsymbol{\xi}$ *as an unknown, equation that comes from the discrete two-dimensional equation of the Wiener and Hopf type in a quadrant of the plane and which is analyzed for the particular case in which the nucleus* $A\,(z,w)$ *has the form* $A(z,w)=(az+bw+c)^n$, $abc\neq 0, n\in\mathbb{N}$. *Detailed studies of functional equations of this type can be found in [1,2,3]. The main method of investigation to solve the functional equation with the previous nucleus is the uniformization of the relation* $A(z,w)=0$, *the analytic extension, the Cauchy-type integral, the boundary problems for the analytic functions [4], and others.*

The present research has a theoretical character, but the results and techniques of analysis can be applied mainly to problems of queuing theory, random walks, Wiener-Hopf equations in a quadrant [1] and similar functional equations [3].

Keywords: Functional equation; Uniformization; Convergent series; Analytic prolongation; Cauchy's Integral

Recibido: Marzo 2018
Aceptado: Marzo 2018

1. INTRODUCCIÓN

Como se verá más adelante, la ecuación funcional (0) y el sistema infinito de ecuaciones (1.1) son equivalentes y las investigaciones enfocadas al análisis y búsqueda de la solución general de la ecuación o del sistema, hechas en estos últimos 50 años, han dado sendos y ricos por su contenido matemático, resultados parciales sólo para ciertos núcleos A(z,w) particulares, lo que nos indica que es un problema con cuestiones que todavía permanecen abiertas y por lo tanto son de actualidad para investigaciones posteriores.

[1]*Goitare Danilo PhD Profesor de la Universidad Central del Ecuador, UCE, Quito – Ecuador (agortaire@uce.edu.ec),*
[2]*Salgado Reyes PhD Profesor de la Pontifica Universidad Católica del Ecuador, Quito – Ecuador (nesalgado@puce.edu.ec).*

Analicemos la ecuación bidimensional discreta de Wiener y Hopf en un cuadrante del plano, o lo que es lo mismo, el sistema infinito de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{i-k,j-n}\xi_{k,n} = \eta_{i,j},\quad i,j=1,2,\ldots..$$

Ecuación 1.1

en donde la incógnita es la sucesión $(\xi_{k,n})_{k,n\geq 0}$. Siguiendo a [1,2,3] vamos a suponer que todas las sucesiones que entran en (1.1): $(a_{p,q})_{p,q=0}^{\infty}$, $(\xi_{k,n})_{k,n=0}^{\infty}$, $(\eta_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$, pertenecen al espacio l^1 de sucesiones absolutamente convergentes [11]. Consideraremos además que $a_{p,q}=0$, si por lo menos uno de los dos índices p o q toma valores inferiores a -1. Bajo estas condiciones, las funciones generatrices correspondientes $\xi(z,w), \eta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ y $A(z,w)$, dadas por:

$$\boldsymbol{\xi}(z,w) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \xi_{k,n}\, z^k w^n, \eta(z,w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \eta_{i,j}\, z^i w^j\,,$$

$$\boldsymbol{a}(z,w) = \sum_{p,q=-1}^{+\infty} a_{p,q}\, z^p w^q = \frac{1}{zw} A(z,w)$$

Ecuación 1.2

son analíticas en el bicírculo $K^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon |z| < 1, |w| < 1\}$, continuas en el bicirculo cerrado $\overline{K^2} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon |z| \le 1, |w| \le 1\}$ y sus valores límites [10] sobre el filo de la frontera del bicírculo pertenecen al anillo W de Wiener, compuesto por todas las funciones representables en forma de sumas de series de potencias absolutamente convergentes. Convengamos en llamar a la función analítica $A(z,w)$ núcleo. Transformando el sistema de ecuaciones (1.1) mediante las funciones (1.2), obtenemos:

$$A(z,w)\boldsymbol{\xi}(z,w) = zw \sum_{p,q=-1}^{+\infty} a_{p,q}\, z^p w^q \sum_{k,n=0}^{\infty} \xi_{k,n}\, z^k w^n$$

$$= zw \sum_{k,n=0}^{\infty} \xi_{k,n}\, z^k w^n \sum_{i-k,j-n=-1}^{+\infty} a_{i-k,j-n}\, z^{i-k} w^{j-n}$$

$$= zw \sum_{k,n=0}^{\infty} \xi_{k,n} \sum_{i-k,j-n=-1}^{+\infty} a_{i-k,j-n}\, z^i w^j$$

$$= zw \left(\sum_{k,n=0}^{\infty} \xi_{k,n} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i-k,j-n}\, z^i w^j + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{0,n} \sum_{j-n=-1}^{\infty} a_{-1,j-n}\, z^{-1} w^j + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{k,0} \sum_{i-k=-1}^{\infty} a_{i-k,-1}\, z^i w^{-1} - \xi_{0,0} a_{-1,-1} z^{-1} w^{-1} \right) =$$

$$= zw \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i-k,j-n}\, \xi_{k,n} z^i w^j + \sum_{q=-1}^{\infty} a_{-1,q}\, z^{-1} w^q \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{0,n} w^n + \sum_{p=-1}^{\infty} a_{p,-1}\, z^p w^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{k,0} z^k - \xi_{0,0} a_{-1,-1} z^{-1} w^{-1} \right) =$$

$$= zw \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} \eta_{i,j}\, z^i w^j + \frac{1}{zw} \sum_{q=-1}^{\infty} a_{-1,q}\, w^{q+1} \xi(0,w) + \frac{1}{zw} \sum_{p=-1}^{\infty} a_{p,-1}\, z^{p+1} \xi(z,0) - \xi_{0,0} \frac{A(0,0)}{zw} \right)$$

$$= zw\eta(z,w) + A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) - A(0,0)\xi(0,0)$$

De esta manera, concluimos que el sistema infinito de ecuaciones (1.1) es equivalente a la ecuación funcional lineal

$$A(z,w)\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{0})\boldsymbol{\xi}(z,0) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{w})\boldsymbol{\xi}(0,w) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\boldsymbol{\xi}(0{,}0) = zw\eta(z,w), \quad |z| \le 1, |w| \le 1$$

Ecuación 1.3

donde $\boldsymbol{\xi}$ es la función incógnita y A, η vienen dadas [2]. El caso general todavía no está resuelto, permaneciendo abierta su investigación. En el presente trabajo analizaremos el caso particular, cuando el núcleo posee la forma:

$$A(z,w) = (az + bw + c)^n, n \in \mathbb{N}$$

Para el caso $n = 1$ tenemos:

$$\boldsymbol{a}(z,w) = \sum_{p,q=-1}^{+\infty} a_{p,q}\, z^p w^q = \frac{1}{zw} A(z,w) = \frac{1}{zw}(az + bw + c) = aw^{-1} + bz^{-1} + cz^{-1}w^{-1}$$

en donde hemos representado mediante $a_{0,-1} \equiv a, a_{-1,0} \equiv b, a_{-1,-1} \equiv c,\ y\ a_{p,q} \equiv 0$ para todos los índices p o q distintos de -1 o 0. De esta manera, el sistema infinito de ecuaciones (1.1) para $a(z,w) = (aw^{-1} + bz^{-1} + cz^{-1}w^{-1})$ tomaría la forma particular:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{i-k,j-n}\, \xi_{k,n} = \eta_{i,j}, \quad i,j = 1{,}2 \ldots; \quad i - k = -1, 0\,;\ j - n = -1, 0$$

o lo que es lo mismo, en forma de ecuación funcional

$$(az + bw + c)\xi(z,w) - (az + c)\xi(z,0) - (bw + c)\xi(0,w) + c\xi(0{,}0) = zw\eta(z,w), \quad |z| \le 1, |w| \le 1$$

Para el caso $n = 2$, tenemos:

$$\boldsymbol{a}(z,w) = \sum_{p,q=-1}^{+\infty} a_{p,q}\, z^p w^q = \frac{1}{zw} A(z,w)$$
$$= \frac{1}{zw}(az+bw+c)^2 =$$
$$= a^2 z w^{-1} + b^2 z^{-1} w + c^2 z^{-1} w^{-1} + 2ab + 2acw^{-1} + 2bcz^{-1},$$

en donde hemos representado mediante $a_{-1,-1} \equiv c^2, a_{-1,0} \equiv 2bc, a_{-1,1} \equiv b^2, a_{0,-1} \equiv 2ac, a_{0,0} \equiv 2ab, a_{1,-1} \equiv a^2,\ y\ a_{p,q} \equiv 0$ para todos los índices p o q distintos de -1 o 0. De esta manera, el sistema infinito de ecuaciones (1.1), para

$$\boldsymbol{a}(z,w) = a^2 z w^{-1} + b^2 z^{-1} w + c^2 z^{-1} w^{-1} + 2ab + 2acw^{-1} + 2bcz^{-1}$$

tomaría la forma particular:

$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{i-k,j-n}\, \xi_{k,n} = \eta_{i,j} \quad i,j = 1,2\ldots; \quad i-k = -1,0,1\,;\ j-n = -1,0,1,$

o lo que es lo mismo, en forma de ecuación funcional:

$$(az+bw+c)^2 \xi(z,w) - (az+c)^2 \xi(z,0) - (bw+c)^2 \xi(0,w) + c^2 \xi(0,0) = zw\eta(z,w),\ \ |z| \le 1, |w| \le 1.$$

Generalizando para $n \ge 3$, obtendremos la ecuación funcional a analizarse:

$$(az+bw+c)^n \xi(z,w) - (az+c)^n \xi(z,0) - (bw+c)^n \xi(0,w) + c^n \xi(0,0) = zw\eta(z,w),$$
$$|z| \le 1, |w| \le 1$$

2. METODOLOGÏA

2.1. Análisis de la ecuación funcional con núcleo de la forma $\boldsymbol{A(z,w) = (az+bw+c)^n}, \quad \boldsymbol{abc \neq 0}$

Sea la ecuación funcional:

$$(az+bw+c)^n \xi(z,w) - (az+c)^n \xi(z,0) - (bw+c)^n \xi(0,w) + c^n \xi(0,0) = zw\eta(z,w), |z| \le 1, |w| \le 1, \quad (1)$$

con la suposición de que $abc \neq 0$. (2)

Los casos $abc = 0$ pueden ser analizados de igual manera a como se lo hizo en [2].

Las soluciones de la ecuación (1), si estas existen, están contenidas en la fórmula

$$\xi(z,w) = \frac{(az+c)^n \xi(z,0) + (bw+c)^n \xi(0,w) - c^n \xi(0,0) + zw\eta}{(az+bw+c)^n}$$

(3)

donde las funciones $\xi(z,0)\ y\ \xi(0,w)$ deben ser encontradas de la condición de que en el anillo de funciones W el numerador de (3) se divida sin resto por el denominador. Esta condición no se cumple, sin lugar a dudas, cuando el denominador de (3), en ninguna parte del bicírculo $|z| \le 1, |w| \le 1$, no se convierte en cero. En este caso la fórmula (3) nos da la solución general de la ecuación (1), para cualesquiera funciones $\xi(z,0)\ y\ \xi(0,w)$ pertenecientes al anillo W [12], y para las cuales se cumple

$$\xi(z,0)|_{x=0} = \xi(0,w)|_{w=0}$$

Pasando al análisis más general de(1) introducimos el conjunto

$$\Omega = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : az+bw+c = 0, |z| \le 1, |w| \le 1\} \quad (4)$$

Si $\Omega = \emptyset$, entonces la ecuación funcional (1) posee por solución a la función (3), en donde $\xi(z,0)\ y\ \xi(0,w)$ son cualesquiera funciones del anillo W, para las cuales

$$\xi(z,0)|_{z=0} = \xi(0,w)|_{w=0}$$

Si $\Omega \neq \emptyset$, entonces la condición necesaria de solubilidad de la ecuación (1) consiste en que el numerador de (3) se anule en todos los ceros del denominador. Siendo así, llegamos a la nueva ecuación funcional:

$$(az+c)^n \xi(z,0) + (bw+c)^n \xi(0,w) - c^n \xi(0,0) = -zw\eta(z,w),\ \ (z,w) \in \Omega \quad (5)$$

Para analizar la ecuación (5), hallamos la uniformización (parametrización) global de la correspondencia (4). De entre todas las parametrizaciones posibles, elegimos aquella que sea lo más simétrica:

$$\begin{cases} z = z(t) = \dfrac{1}{a}\left(t - \dfrac{c}{2}\right), \\ w = w(t) = -\dfrac{1}{b}\left(t + \dfrac{c}{2}\right), t \in \hat{\mathbb{C}} \end{cases} \quad (6)$$

Para la uniformización anterior constatamos que se cumple la identidad $A[z(t), w(t)] \equiv 0$.

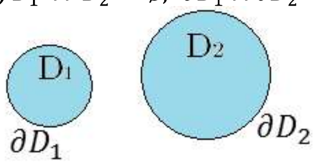
Introducimos los conjuntos:

$$D_1 = \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \le 1\}\ \ y\ \ D_2 = \{t \in \mathbb{C} : |w(t)| \le 1\}, \quad (7)$$

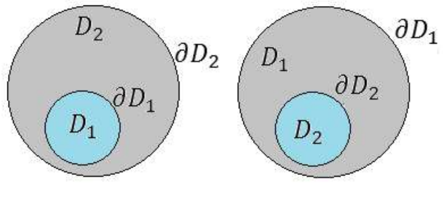
siendo $a, b, c \in \mathbb{C}\ y\ abc \neq 0$.

En el plano $(x,y) = t \in \mathbb{C}$, pueden presentarse los siguientes casos de distribución de los conjuntos $D_1\ y\ D_2$:

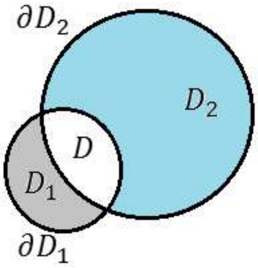
a) $D_1 \cap D_2 = \emptyset,\ \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$



b) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\ \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset,\ D_1 \subset D_2\ o\ D_2 \subset D_1$



c) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\ \partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$



Con el objeto de simplificar el análisis anterior, mostremos que la suposición de que $c > 0$ no le resta generalidad al problema. En realidad, poniendo $c = |c|e^{i\alpha}$ e introduciendo las nuevas variables $\tilde{z}\; y\; \tilde{w}$ enlazadas con las anteriores mediante las igualdades $z = e^{i\alpha}\tilde{z},\; w = e^{i\alpha}\tilde{w}$, tenemos para el núcleo $A(z, w)$ la siguiente relación:

$$\begin{aligned} A(z,w) &= ae^{i\alpha}\tilde{z} + be^{i\alpha}\tilde{w} + |c|e^{i\alpha} \\ &= e^{i\alpha}(a\tilde{z} + b\tilde{w} + |c|) \\ &= e^{i\alpha}\,\tilde{A}(\tilde{z},\tilde{w}) \end{aligned}$$

De lo anterior está claro, que el núcleo $\tilde{A}(\tilde{z},\tilde{w})$ se diferencia del núcleo $A(z,w)$ por el factor $e^{i\alpha}$, además de que en el núcleo $\tilde{A}(\tilde{z},\tilde{w})$ en lugar del parámetro c entra el parámetro $|c|$.

Es evidente que la pertenencia al anillo W de todas las funciones que intervienen en la ecuación (1) es invariante cuando pasamos las variables $z\; y\; w$ a las variables $\tilde{z}\; y\; \tilde{w}$ (pues $|z| = |e^{i\alpha}\tilde{z}| = |\tilde{z}|\; y\; |w| = |e^{i\alpha}\tilde{w}| = |\tilde{w}|$).

De esta manera, sin restar generalidad a la ecuación (1.1), concluimos que para el análisis de la ecuación funcional (1 o 5), es suficiente trabajar con $c > 0$.

2.2. Representación de dos círculos con sus respectivas fronteras

Pasando al análisis de los conjuntos $D_1\; y\; D_2$ definidos en (7), vemos que estos representan a dos círculos con sus respectivas fronteras, las circunferencias $\partial D_1\; y\; \partial D_2$:

$$D_1 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t - \frac{c}{2}\right| \le |a|\right\} \quad y \quad D_2 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t + \frac{c}{2}\right| \le |b|\right\} \quad (7)$$

$$\partial D_1 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t - \frac{c}{2}\right| = |a|\right\} \quad y \quad \partial D_2 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t + \frac{c}{2}\right| = |b|\right\} \quad (8)$$

Un análisis geométrico elemental nos muestra que para los conjuntos $D_1, D_2, \partial D_1$ y ∂D_2 se pueden presentar los casos:

$\mathbf{2.}\boldsymbol{a})$ $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset \iff |a|^2 + |b|^2 < \frac{|c|^2}{2}$ (9)

$\mathbf{2.}\boldsymbol{b})$ $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset \wedge D_1 \subset D_2 \iff |a| + |c| < |b|$ (10)

$\mathbf{2.}\boldsymbol{c})$ $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset \wedge D_2 \subset D_1 \iff |b| + |c| < |a|$ (11)

$\mathbf{2.}\boldsymbol{d})$ $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset \wedge D_1 \cap D_2 = \emptyset \iff |a| + |b| < |c|$ (12)

2.3. Ecuación Equivalente

Pasando en la ecuación (5) a la variable uniformizadora $t \in \mathbb{C}$, obtenemos la ecuación equivalente:

$$[az(t) + c]^n\xi[z(t), 0] + [bw(t) + c]^n\xi[0, w(t)] - c^n\xi(0,0) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)], \quad t\epsilon D, \quad (13)$$

donde

$$D = \{t \in \mathbb{C}: |z(t)| \le 1, |w(t)| \le 1\} \quad (14)$$

Introduciendo las siguientes representaciones:

$$\Phi(t) = [az(t) + c]^n\xi[z(t), 0], \quad t \in D_1 \quad (15)$$
$$\Psi(t) = [bw(t) + c]^n\xi[0, w(t)], \quad t \in D_2 \quad (16)$$
$$\mu = -c^n\xi(0,0) \quad (17)$$
$$\tilde{\eta}(t) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)], \quad t \in D \quad (18)$$
$$D = D_1 \cap D_2, \qquad G = D_1 \cup D_2 \quad (19)$$

llegamos a la siguiente ecuación funcional:

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), \quad t \in D, \quad (20)$$

donde $\Phi: D_1 \to \mathbb{C}\; y\; \Psi: D_2 \to \mathbb{C}$ son las nuevas funciones desconocidas, analíticas en sus respectivos dominios

$$D_1 \setminus \partial D_1 \quad y \quad D_2 \setminus \partial D_2$$

2.4. Caso 1

Pasando al análisis de la ecuación (5) y a su equivalente (20), empezamos por el caso mas trivial, a saber, el caso en que $\Omega = \emptyset$, o sea $D = \emptyset$. Este caso se realiza si y solamente si $|a| + |b| < |c|$, es decir, cuando $D = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t - \frac{c}{2}\right| \le |a|,\; \left|t + \frac{c}{2}\right| \le |b|\right\} = \emptyset$.

Resumiendo, el análisis anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1. Para la ecuación (1) con núcleo $A(z, w) = (az + bw + c)^n$ y $abc \neq 0$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1) $|a| + |b| < |c|$
2) $\Omega = \emptyset$
3) La ecuación (1) es soluble incondicionalmente y su solución general viene dada por la igualdad (3) para cualesquiera funciones $\xi(z, 0) \in W_z\; y\; \xi(0, w) \in W_w$ para las cuales $\xi(z,0)|_{z=0} = \xi(0,w)|_{w=0}$

2.5. Caso 2

Ahora analicemos la ecuación funcional (13) − (14) en los casos de inclusión, ya sea, cuando $D_1 \subset D_2$ o cuando $D_2 \subset D_1$.

Analizamos el caso $D_1 \subset D_2$:

$D_1 \subset D_2 \iff |a| + |c| < |b|$, aquí la ecuación (13) − (14) toma la forma

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), t \in D, \quad (21)$$
$$D = D_1 \cap D_2 = D_1 \quad (22)$$

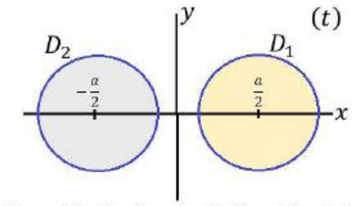
La ecuación $(21)-(22)$ la resolvemos bajo el siguiente esquema: una de las funciones Φ o Ψ la damos en forma arbitraria y la otra la expresamos a través de ésta mediante la relación (21). Mas cómodo resulta dar arbitrariamente aquella función cuyo dominio de definición es mayor.
Como $D_1 \subset D_2$, entonces ponemos

$$\Psi(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{0,k}[w(t)]^k, \quad w(t) = -\frac{1}{b}\left(t+\frac{c}{2}\right) \quad (23)$$

en donde $\Psi_{0,k}$ son coeficientes arbitrarios, que forman una serie absolutamente convergente, es decir, satisfacen

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Psi_{0,k}| < \infty \qquad (24)$$

En vista de que



Graphic 1.a) $a > 2, D = D_1 \cap D_2 = \emptyset$
$t = x + iy$

$w(t) = -\frac{1}{b}\left(t+\frac{c}{2}\right) = -\frac{1}{b}[az(t)+c]$, entonces

$$\Phi(\mathrm{t}) = \mu + \tilde{\eta}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{0,k}[w(t)]^k \quad (25)$$

y para que esta función pertenezca al anillo W de Wiener con respecto a la variable $z(t)$ es necesario y suficiente que se cumpla la desigualdad

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{\eta}_{0,k}| < \infty, \qquad (26)$$

en donde $\tilde{\eta}_{0,k}$ son los coeficientes del desarrollo

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}_{0,k}[w(t)]^k \qquad (27)$$

Resumiendo, tenemos:

Teorema 2. Si $D_1 \subset D_2$ y $D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$, es decir, $|a| + |c| < |b|$, entonces para la solubilidad de la ecuación $(21)-(22)$ es necesario y suficiente el cumplimiento de la desigualdad (24). Si esta desigualdad se cumple, entonces la solución general de la ecuación $(21)-(22)$ viene dada por las fórmulas (23) y (25), en donde $\Psi_{0,k}$ deben cumplir la desigualdad (24).

2.6. Caso 3

Pasemos a analizar la inclusión $D_2 \subset D_1$
$D_2 \subset D_1 \Leftrightarrow |b| + |c| < |a|$, aquí la ecuación $(13)-(14)$ toma la forma

$$\Phi(\mathrm{t}) + \Psi(\mathrm{t}) = \mu + \tilde{\eta}(t), \quad t \in D, \quad (28)$$

$$D = D_1 \cap D_2 = D_2 \qquad (29)$$

La ecuación $(28)-(29)$ la resolvemos utilizando el esquema del punto 4). Es decir, en este caso tomamos como función arbitraria a Φ puesto que su dominio de definición es mayor:

$$\Phi(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,0}[z(t)]^k, \quad z(t) = \frac{1}{a}\left(t-\frac{c}{2}\right) \quad (30)$$

en donde los coeficientes $\Phi_{k,0}$ forman una serie absolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_{k,0}| < +\infty \qquad (31)$$

Como $z(t) = \frac{1}{a}\left(t-\frac{c}{2}\right) = -\frac{1}{a}[bw(t)+c]$, entonces

$$\Phi(\mathrm{t}) = \mu + \tilde{\eta}(t) - \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,0}[z(t)]^k \quad (32)$$

y para que esta función pertenezca al anillo W de Wiener con respecto a la variable $w(t)$ es necesario y suficiente que se cumpla la desigualdad

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{\eta}_{k,0}| < +\infty, \qquad (33)$$

donde $\tilde{\eta}_{k,0}$ son los coeficientes del desarollo

$$\tilde{\eta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}_{k,0}\,[z(t)]^k \qquad (34)$$

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3. Si $D_2 \subset D_1$ y $D_2 \cap \partial D_1 = \emptyset$, entonces para la solubilidad de la ecuación $(28)-(29)$ es necesario y suficiente el cumplimiento de la desigualdad (31). Si esta desigualdad se cumple, entonces la solución general de la ecuación $(28)-(29)$ viene dada por las fórmulas $(30)-(32)$, en donde $\Phi_{0,k}$ deben cumplir la desigualdad (31).

2.7. Caso 4

Pasamos ahora a analizar el caso, cuando $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $\partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ siendo $D \neq D_1$ y $D \neq D_2$. Vamos a suponer primeramente que el conjunto D posee puntos interiores, esto tiene lugar si y solamente si, se cumple la relación complementaria de la relación 2.d) del punto 2) a saber:

$$|a| + |b| > |c| \qquad (35)$$

Con lo dicho en el punto 1), podemos sin pérdida de generalidad considerar que $c > 0$.
En este caso utilizando las relaciones uniformizadoras

$$\begin{cases} z = z(t) = \frac{1}{a}\left(t-\frac{c}{2}\right), \\ t \in \hat{\mathbb{C}} \\ w = w(t) = -\frac{1}{b}\left(t+\frac{c}{2}\right) \end{cases}$$

Vemos que el conjunto D representa a una semiluna formada por la intersección de los círculos

$$D_1 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t-\frac{c}{2}\right| \leq |a|\right\} \quad y$$

$$D_2 = \left\{ t \in \mathbb{C}: \left| t - \frac{c}{2} \right| \leq |b| \right\}$$

con la particularidad de que sus respectivos centros $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ y $(-\frac{c}{2}, 0)$ son simétricos con respecto al origen $O = (0,0)$.

El esquema mediante el cual resolvemos la ecuación funcional

$$[az(t) + c]^n \xi[z(t), 0] + [bw(t) + c]^n \xi[0, w(t)] - c^n \xi(0,0) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)] \quad t \in D \qquad (36)$$

la misma que con las representaciones (15) – (18) del punto 1), toma la forma:

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), t \in D, \quad (37)$$

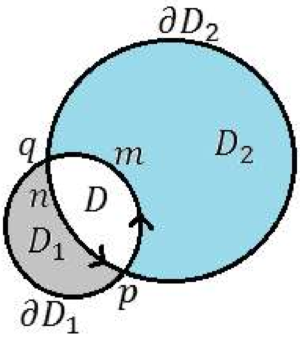
consiste en lo siguiente:

Partimos de la ecuación funcional (37):

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), \qquad t \in D,$$

la misma que equivale a la forma:

$$\left(t + \frac{c}{2}\right)^n \xi[z(t), 0] - \left(t - \frac{c}{2}\right)^n \xi[0, w(t)] = c^n \xi(0,0) + z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)], \quad t \in D \qquad (38)$$



en donde $D = D_1 \cap D_2$ representa a una semiluna convexa (ver gráfico anterior).

Representemos mediante

$$\tilde{\eta}(t) = z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)], \quad t\epsilon D, \quad (39)$$

y

$$\tilde{\eta}_1(t) = \tilde{\eta}(t) - \left[\left(\frac{t-p}{q-p}\right)\tilde{\eta}(q) + \left(\frac{t-q}{p-q}\right)\tilde{\eta}(p)\right] \quad (40)$$

La función $\tilde{\eta}_1(t)$ también es analitica en D, y si exigimos que $\tilde{\eta}(t)$ sea H_λ- continua de orden $\lambda > \frac{1}{2}$ (donde H_λ son las funciones de la clase de Hölder), entonces $\tilde{\eta}_1(t)$ también pertenece a esa clase, es decir $\tilde{\eta}_1(t) \in H_\lambda$ siendo continua de orden $\lambda > \frac{1}{2}$ en $\overline{D}$ [4, 13]. Además para $\tilde{\eta}_1(t)$ se cumplen las relaciones:

$$\tilde{\eta}_1(p) = \tilde{\eta}_1(q) = 0 \qquad (41)$$

Ahora representemos la función $\tilde{\eta}(t), t \in D$ de (40) en la forma:

$$\tilde{\eta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{\tilde{\eta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-q}{p-q}\tilde{\eta}(p) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau =$$
$$= \frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-q}{p-q}\tilde{\eta}(p) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau \qquad (42)$$

Sustituyendo (42) en (38) tenemos:

$$\left(t + \frac{c}{2}\right)^n \xi[z(t), 0] - \left(t - \frac{c}{2}\right)^n \xi[0, w(t)] = c^n \xi(0,0) + \frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-q}{p-q}\tilde{\eta}(p) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau \qquad (43)$$

Separando la igualdad (43) en su parte izquierda, analítica en D_1, y en su parte derecha, analítica en D_2, tenemos:

$$\left(t + \frac{c}{2}\right)^n \xi[z(t), 0] - \left[\frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-q}{p-q}\tilde{\eta}(p)\right] - c^n \xi(0,0) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau$$
$$= \left(t - \frac{c}{2}\right)^n \xi[0, w(t)] + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau \qquad (44)$$

Utilizando en (44) el teorema fundamental sobre la prolongación analítica [4-9], concluímos que la función:

$$f(t) = \begin{cases} \left(t + \frac{c}{2}\right)^n \xi[z(t), 0] - \left[\frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-q}{p-q}\tilde{\eta}(p)\right] - \\ -c^n \xi(0,0) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad t \in D_1 \\ \left(t - \frac{c}{2}\right)^n \xi[0, w(t)] + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad t \in D_2 \end{cases} \qquad (45)$$

es analítica en $G = D_1 \cup D_2$. Como $\tilde{\eta}_1(p) = \tilde{\eta}_1(q) = 0$, entonces los valores límites de las integrales del tipo de Cauchy de (45) son de la clase de Hölder con exponente $\lambda > \frac{1}{2}$ [5]. De aquí, acorde al *teorema de S. Bernstein* [12, 13], las integrales que entran en (45) pertenecen a los anillos W_z y W_w [13]. De aquí se sigue que $f(t) \in W_z \cap W_w$.

De la fórmula (45) tenemos que:

$$\left(t+\frac{c}{2}\right)^n \xi[z(t),0] = f(t) + \left[\frac{t-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t-q}{p-q}\tilde{\eta}(p)\right] + c^n \xi(0,0) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} dr \qquad (46)$$

$$\left(t-\frac{c}{2}\right)^n \xi[0,w(t)] = f(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} dr \qquad (47)$$

Si en la penúltima igualdad ponemos $t = -\frac{c}{2}$ (o sea $w = 0$), tenemos:

$$\mu = c^n \xi(0,0) = -f\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau + \frac{c}{2}} dr \qquad (48)$$

De las fórmulas $(46) - (48)$ podemos expresar las funciones incógnitas $\xi[z(t),0]$, $\xi[0,w(t)]$ y la constante desconocida $\xi(0,0)$:

$$\xi[z(t),0] = \frac{1}{\left(t+\frac{c}{2}\right)^n}\left[f(t) + \left(\frac{t-p}{q-p}\right)\tilde{\eta}(q) + \left(\frac{t-q}{p-q}\right)\tilde{\eta}(p) - f\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau + \frac{c}{2}} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} d\tau\right] \qquad (46')$$

$$\xi[0,w(t)] = \frac{1}{\left(t-\frac{c}{2}\right)^n}\left[f(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} dr\right] \qquad (47')$$

$$\xi(0,0) = \frac{1}{c^n}\left[-f\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau + \frac{c}{2}} d\tau\right] \qquad (48')$$

Analicemos las siguientes posibilidades:

Si las funciones$A[z(t),0] = \left(t+\frac{c}{2}\right)^n$ y $A[0,w(t)] = -\left(t-\frac{c}{2}\right)^n$ no se anulan en D_1 y D_2 respectiva-mente, es decir, si se cumple la relación $|c| > \frac{|a|+|b|}{2}$ (la distancia entre los centros de los círculos D_1 y D_2 exede a la semisuma de sus respectivos radios), entonces las fórmulas $(46') - (48')$ son las soluciones de la ecuación funcional (37), siendo $f \in W_z \cap W_w$, es decir, colocando las expresiones $(46') - (48')$ en la ecuación (3) tenemos:

$$\xi(z,w) = \frac{1}{(az+bw+c)^n}\left[f[t(z)] + \frac{t(z)-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t(z)-q}{p-q}\tilde{\eta}(p) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t(z)} d\tau + f[t(w)] - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t(w)} d\tau + zw\tilde{\eta}(z,w)\right] \qquad (49)$$

Del resultado anterior tenemos:

Teorema 4. Si las variables z, w están enlazadas mediante las relaciones $az + bw + c = 0$, $|z| \le 1$, $|w| \le 1$ y el conjunto Ω es conexo (o sea $D = D_1 \cap D_2$ es conexo y $|a| + |b| > |c|$), entonces la ecuación funcional (3) bajo el cumplimiento de las condiciones necesaria y suficiente de solubilidad (es decir la pertenencia de la parte derecha de (49) al anillo W de Weiner, siendo $\tilde{\eta}(t) \in H_\lambda$, $\lambda > \frac{1}{2}$) posee por solución a la relación (49), en la que f es una función analítica en G, arbitraria.

Si por el contrario las funciones $A[z(t),0] = \left(t+\frac{c}{2}\right)^n$ y $A[0,w(t)] = -\left(t-\frac{c}{2}\right)^n$ se anulan en $D = D_1 \cap D_2$, entonces introducimos el divisor Δ compuesto por los ceros de la función $A[z(t),0]A[0,w(t)] = -\left(t+\frac{c}{2}\right)^n\left(t-\frac{c}{2}\right)^n$, es decir, $\Delta = \left\{\underbrace{\frac{c}{2},\ldots,\frac{c}{2}}_{n\ veces}, \underbrace{-\frac{c}{2},\ldots,-\frac{c}{2}}_{n\ veces}\right\}$, entonces la función arbitraria f de $(46')$ y $(48')$, analítica en $D = D_1 \cap D_2$, debe tener la forma:

$$f(t) = \left(t^2 - \frac{c^2}{4}\right)^n f_1(t) \qquad (50)$$

en donde f_1 es una función arbitraria, analítica en $G = D_1 \cup D_2$ y $f_1 \in W_z \cap W_w$. En este caso las funciones incógnitas $\xi[z(t),0]$, $\xi[0,w(t)]$ tienen la forma:

$$\xi[z(t),0] = \frac{1}{\left(t+\frac{c}{2}\right)^n}\left[\left(t^2 - \frac{c^2}{4}\right)f_1(t) + \left(\frac{t-p}{q-p}\right)\tilde{\eta}(q) + \left(\frac{t-q}{p-q}\right)\tilde{\eta}(p) - f\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau + \frac{c}{2}} dr + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}} \frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t} dr\right] \qquad (51)$$

$$\xi[0,w(t)] = \frac{1}{\left(t-\frac{c}{2}\right)^n}\left[\left(t^2-\frac{c^2}{4}\right)f_1(t) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}}\frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] \quad (52)$$

$$\xi(0,0) = \frac{1}{c^n}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}}\frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau+\frac{c}{2}}d\tau\right] \quad (53)$$

Colocando las expresiones $(51)-(53)$ en la ecuación (3) tenemos:

$$\xi(z,w) = \frac{1}{(az+bw+c)^n}\left[\left(t^2(z) - \frac{c^2}{4}\right)^n f_1[t(z)] + \frac{t(z)-p}{q-p}\tilde{\eta}(q) + \frac{t(z)-q}{p-q}\tilde{\eta}(p) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{qnp}}\frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t(z)}d\tau + \left(t^2(w)-\frac{c^2}{4}\right)^n f_1[t(w)] - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\widehat{pmq}}\frac{\tilde{\eta}_1(\tau)}{\tau - t(w)}d\tau + zw\tilde{\eta}(z,w)\right] \quad (54)$$

El resultado anterior, tenemos:

Teorema 5. Si las variables z, w están enlazadas mediante las relaciones $\mathrm{az}+\mathrm{bw}+\mathrm{c}=0$, $|z| \leq 1, |w| \leq 1$ y el conjunto Ω es conexo ($D = D_1 \cap D_2$ es conexo con $|a|+|b|>|c|$), entonces la ecuación funcional (3) bajo el cumplimiento de las condiciones necesaria y suficiente de la solubilidad (es decir, la pertenencia de la parte derecha de (54) al anillo W de Wiener, siendo $\tilde{\eta}(t) \in H_\lambda$, $\lambda > \frac{1}{2}$) posee por solución la relación (54), en la que f_1 es una función analítica en G, arbitraria.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los Teoremas 1-5 del punto anterior, presentan las discusiones con enfoque constructivista, los resultados del análisis y también la solución de la ecuación funcional

$$(az+bw+c)^n\xi(z,w) - (az+c)^n\xi(z,0) - (bw+c)^n\xi(0,w) + c^n\xi(0,0) = zw\eta(z,w), \quad |z| \leq 1, |w| \leq 1,$$

de la ecuación funcional equivalente con la variable uniformizadora $t \in \mathbb{C}$,

$$[az(t)+c]^n\xi[z(t),0] + [bw(t)+c]^n\xi[0,w(t)] - c^n\xi(0,0) = -z(t)w(t)\eta[z(t),w(t)], \quad t \in D,$$

donde

$$\begin{cases} z = z(t) = \frac{1}{a}\left(t-\frac{c}{2}\right), \\ w = w(t) = -\frac{1}{b}\left(t+\frac{c}{2}\right), t \in \hat{\mathbb{C}} \end{cases}$$

$$D_1 = \{t \in \mathbb{C}: |z(t)| \leq 1\}, \; D_2 = \{t \in \mathbb{C}: |w(t)| \leq 1\}, \; D = D_1 \cap D_2, G = D_1 \cup D_2$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{C}, abc \neq 0$, en el plano $(x,y) = t \in \mathbb{C}$, presentándose la respectiva solución para los posibles casos de distribución de los conjuntos D_1 y D_2:

a) $D_1 \cap D_2 = \emptyset,\; \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$
b) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\; \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset,\; D_1 \subset D_2$
c) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\; \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset,\; D_2 \subset D_1$
d) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,\; \partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Mediante las funciones generatrices (1.2) en el espacio l^1, hemos transformado la ecuación bidimensional discreta de Wiener y Hopf (1.1) en un cuadrante del plano en la ecuación funcional (1.3) equivalente, con funciones pertenecientes al anillo $W_{z,w}$ de Wiener. La ecuación funcional (1.3) con el núcleo particular $A(z,w) = (az+bw+c)^n, n \in \mathbb{N}$, se la resuelve completamente inicialmente mediante la uniformización (parametrización) del núcleo $A(z,w)$, transformándola en una nueva ecuación funcional equivalente (20) con variable $t \in \mathbb{C}$. Como resultado fundamental tenemos que la ecuación funcional (20) se la resuelve para todos sus casos, mediante el uso de técnicas del análisis complejo (uniformización, desarrollos en series de potencias, integral del tipo de Cauchy, problemas de contorno, prolongación analítica, otras). La ecuación funcional (1.3), en su caso general, está muy lejos de ser resuelta, pero los resultados parciales o particulares para distintos tipos de núcleos $A(z,w)$ son muy ricos por sus contenidos y métodos matemáticos como se demuestra en los siguientes trabajos del autor, y pueden seguir estudiándose. Los métodos de análisis de la ecuación funcional (1.3), objeto de estudio del presente trabajo, tienen carácter téorico pero pueden ser aplicados al estudio de ecuaciones funcionales semejantes que aparecen en la teoría de colas, marchas aleatorias, ecuaciones del tipo de Wiener y Hopf y otros fenómenos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS *Y* ELECTRÓNICAS

[1]. Malyshev V. A. (1970) “Random walks. The Wiener-Hopf equations in quadrant of the plane. Galois automorphisms”. Moscow State University Press.

[2]. Zverovich, E., Krushevski, E. (1987). “Solución explícita de un caso particular de la ecuación bidimensional de Wiener y Hopf en un cuadrante”. Simposium sobre los problemas contemporáneos de la física matemática. Universidad de Tbilisi, Georgia (en ruso).

[3]. Gortaire, D. (1994). “Investigacion de ciertas ecuaciones funcionales lineales para funciones analíticas en el bicírculo utilizando el método de uniformización” Tesis previa a la obtención del título de candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas. Minsk, Belarus (Rusia Blanca) (en ruso).

[4]. Gájov, F.D. (1980). “Problemas de contorno”. Editorial Mir, Moscú.

[5]. Lavréntiev, L., Shabat, B. (1991). “Metodos de la teoría de las funciones de una variable compleja”. Editorial Mir, Moscú.

[6]. Markushevich, A. (1978). “Teoría de las funciones analíticas”, Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú.

[7]. Muños Díaz, J. (1978). “Curso de Teoría de Funciones”. Editorial Tecnos, Madrid.

[8]. Rudin, W. (1979). “Análisis Real y Complejo”. Ed. Alhambra, Madrid.

[9]. Bak, J., Newman, D. (1991). “Complex Analysis”. Springer-Verlag, New York Inc., New York.

[10]. Hörmander, L. (1966). “An Introduction to Complex Analysis in Several Variables”. D. Van-Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey.

[11]. Yosida, K. (1968). “Functional Analysis”. Springer-Verlag, New York Inc., New York.

[12]. Edwards, R.E. (1979). “Fourier Series. A ModernIntroduction”, Vol I, II. Springer-Verlag New York Inc., New York.

[13]. Zigmund, A. (1968). “Trigonometric Series”.Cambridge University Press, Chicago, New York, Edimburg.