

MODELADO MATEMÁTICO VÍA SIMULACIÓN PARA DETERMINAR LA CALIDAD DEL AGUA DEL SISTEMA DE ABASTECIMIENTO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

(MATHEMATICAL MODELING VIA SIMULATION TO DETERMINE THE WATER QUALITY OF THE WATER SUPPLY SYSTEM OF THE NATIONAL UNIVERSITY OF LOJA)

Benavides José¹, Ochoa Jose², Riofrio Gonzalo³

Resumen: La identificación del comportamiento de un sistema, mediante técnicas de modelado matemático y simulación, es una poderosa herramienta para analizar, estimar, pronosticar y validar escenarios. En el caso analizado, tras el análisis documental de estudios realizados previamente por instituciones afines al tema y varias muestras tomadas en botellas de 1 galón, para el análisis físico-químico, el agua que abastece a la Universidad Nacional de Loja muestra la presencia en niveles no aceptables de aluminio, arsénico, materia flotante, y temperatura, los que serán representados por modelo matemático, para luego ser controladas a través de un PID discreto, para mantener, estas 4 variables dentro de los rangos permitidos por la Empresa de Agua Potable de la ciudad de Loja, al sur del Ecuador. Es importante tratar de resolver este problema porque esta agua es utilizada para consumo humano en la Universidad Nacional de Loja. Algunas plataformas informáticas como Wolfram y MATLAB® disponen de algunas herramientas que nos ayudan a encontrar los parámetros PID basado en algoritmos propios que poseen, en particular en este estudio se utiliza una toolbox de MATLAB® diseñada para el efecto.

Palabras Clave: modelamiento matemático, simulación, control PID.

Abstract: The identification system using the MATLAB®/Simulink software, can be a powerful tool to estimate and validate the mathematical model, in this case after the documentary analysis of previous studies by institutions related to the topic and several samples in bottles of 1 gallon for physic-chemical analysis, water from the National University of Loja shows presence in unacceptable levels of aluminum, arsenic, material floater, temperature, which will be represented by mathematical model, and then be controlled through a PID discreet, to keep these four variables within the ranges allowed by the Water Supply Company of the city of Loja, southern Ecuador. It is important to try to resolve this problem because this water is used by individuals and employees of the National University of Loja. MATLAB® has some tools to help us find the PID parameters based on algorithms that have.

Keywords: mathematical modeling, simulation, PID control.

Recibido: Febrero 2018

Aceptado: Marzo 2018

I. INTRODUCCIÓN

La identificación del comportamiento de un sistema es la teoría y el arte de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basándose en las entradas y salidas mostradas^[1].

Para realizar el control de sistemas dinámicos es necesario un sistema que describa la dinámica de dicho sistema; este sistema se lo obtiene ajustando los parámetros de la planta a un conjunto de ecuaciones capaces de detallar el comportamiento de la misma^[2].

Las salidas de los sistemas estocásticos, a diferencia de los determinísticos, son impredecibles, con diferentes niveles de volatilidad, según sus características aleatorias, estos tienen más de una entrada y una salida MISO, una entrada y varias salidas SIMO o ambas MIMO^[3].

Existen dos formas de poder obtener el modelo matemático de un proceso, una de ellas es partiendo de leyes fundamentales de la Física, dependiendo si el sistema a modelar es mecánico^[4], eléctrico^[5], térmico^[6], o si es de nivel - caso en el cual se parte de la ecuación de balance dinámico^[1, 7] -. La segunda forma es a partir de la identificación de sistemas utilizando herramientas de simulación^[2, 3], en este caso se tiene una poderosa herramienta para estimar y luego validar escenarios del modelo matemático obtenido.

En el caso de estudio, luego del análisis documental de estudios realizados previamente por instituciones afines al tema (*Realizados en la planta de tratamiento de agua potable de Carigan- Loja*). Para esto se tomaron varias muestras en botellas de 1 galón, para su análisis físico-químico, el agua del sistema de abastecimiento de la Universidad nacional de Loja (UNL) muestra presencia en niveles no aceptables de cuatro variables consideradas en el estudio: Aluminio, Arsénico, Materia Flotante y Temperatura. Estas muestras de agua con sus niveles de elementos no aceptables, serán representados por un modelo matemático, para luego ser controladas a través de un PID discreto, MATLAB® dispone de algunas herramientas y algoritmos incorporados que permiten estimar los parámetros del modelo PID. El modelo simulado luego permite recalibrar los parámetros antes señalados para

¹José Leonardo Benavides, Profesor Principal Área de Energía, UNL, Loja, (email: jose.benavides@unl.edu.ec).

²José Ochoa, Profesor Principal Área de Energía, UNL, Loja (email: jose.ochoa@unl.edu.ec).

³Gonzalo Ramiro Riofrio, Profesor Principal Área de Energía, UNL, Loja, (email: gonzalo.riofrio@unl.edu.ec).

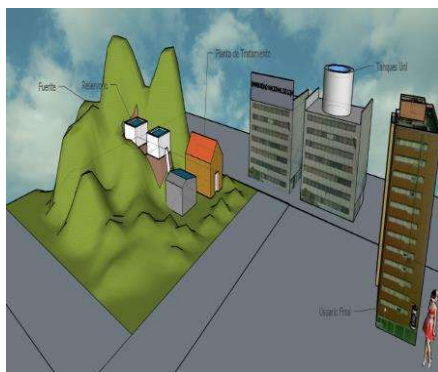
que estos garanticen valores de las cuatro variables dentro de los límites permitidos para el consumo humano bajo la normatividad ambiental vigente, que están resumidos en la Tabla 1.

Tabla 1.
Rangos aceptables de las cuatro variables (incluyendo Fuente) para que el agua sea apta para el consumo humano

PARA METR O	MÁX IMO	PROM EDIO	MÍ NI MO	LIMITE PERMISI BLE (TULAS, LIBRO VI, ANEXO 1, TABLA 1)	OBSERV ACION
Temper atura	20,1	19	17, 2	19	Sobrepasa
Materia Flotante	0,05	0,024	Nd	Ausencia	Sobrepasa
Alumini o	0,5	0,305	0,0 7	0,2	Sobrepasa
Arsénic o	<0,1	---	Nd	0,05	Sobrepasa

Otras variables que pueden ser importantes dentro de los parámetros de calidad del agua no están incluidas en el presente estudio, pero serían fácilmente incluidas con la metodología propuesta. Este líquido vital es utilizado en la actualidad por muchas personas que utilizan los predios de la UNL, para consumo propio y para aseo personal, con un consumo mensual de unos 10 m³ por mes, lo que hace necesario y urgente, su correcto tratamiento. En la figura 1 se muestra un esquema representativo del sistema de abastecimiento de agua de la UNL, desde su origen en las fuentes acuíferas, pasando por su transporte, acumulación y tratamiento, hasta su uso por el consumidor final.

Figura 1.
Representativo del sistema hidráulico de la UNL, para su posterior análisis.



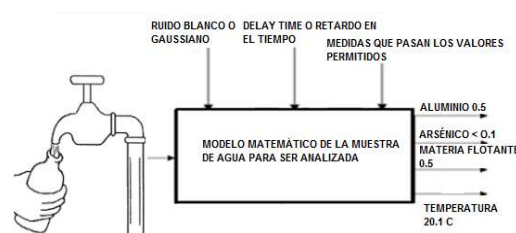
II. MATERIALES Y MÉTODOS

Modelado por caja negra

La teoría de identificación de sistemas define a

la caja negra como una entidad reconocible a la cual llegan diferentes entradas y de la cual salen una o varias salidas [8], estos modelos no tienen en consideración los hechos físicos, los parámetros son simplemente valores que pueden sintonizarse para optimizar el modelo obtenido, en la figura 2 se muestran las variables involucradas para encontrar el modelo matemático de la muestra de agua tomada para su análisis, se consideran los datos generados en el tiempo en caja negra.

Figura 2.
Variables involucradas en el proceso, utilizando un modelo de caja negra (Blackbox).



donde las variables de entrada, salida y perturbaciones, así como sus rangos están distribuidas en la Tabla 2.

Tabla 2.
Variables del proceso, perturbaciones, con sus respectivas unidades para el análisis.

MODELO DE LA PLANTA	
Variables de entrada	Variables de salida
Agua (H ₂ O) (1 galón 3.875 litros)	Aluminio (Al) ppm, partes por millón o miligramos por litro, (0.5).
Arsénico (As) ppm	partes por millón o miligramos por litro, (<0.1).
Materia Flotante (MF) ppm	partes por millón o miligramos por litro, (0.5).
Temperatura (grados Centígrados,	20.1 °C
Perturbaciones	
Ruido Blanco o gaussiano	(rms o valor cuadrático medio).
Retardo en el tiempo o Delay Time	(Segundos).
Medidas que pasan los valores permisibles	(ppm.°C)

Siguiendo las acepciones acostumbradas en la literatura, se considera ruido a todas las perturbaciones que interfieren sobre las señales transmitidas o procesadas. Por ello, dependiendo de la gráfica de la densidad espectral de potencia del ruido, se definen

diferentes colores. En particular el ruido blanco es una señal aleatoria que se caracteriza porque sus valores de señal en dos instantes de tiempo diferentes no guardan correlación estadística, como consecuencia de ello su densidad espectral de potencia (PSD, Power Spectral Density) es una constante y su grafica es plana, lo que quiere decir que la señal tiene todas las frecuencias y todas ellas tienen la misma potencia. Igual fenómeno ocurre con la transmisión y propagación de la luz blanca, hecho que motiva su denominación, el ruido blanco es uno, el ruido blanco gaussiano es una combinación de ambos [9].

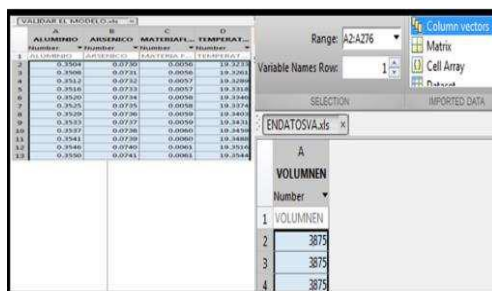
El ruido en sistemas de instrumentación es un proceso estocástico, determinado por una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función del tiempo, cada una de las variables del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y entre ellas puede existir correlación o no. Dentro del modelado y la simulación del sistema analizado en el caso estudiado, se lo ha introducido como un ruido blanco.

Diseño y ejecución de los Experimentos Preliminares

Para dar consistencia a la estimación estadística se ha trabajado con 1000 datos o muestras para la identificación del proceso, siguiendo las recomendaciones de la literatura [7], para ello en el diseño muestral el tiempo de muestreo en la identificación de la planta se tomó cada 30 minutos, 16 muestras por día, con un total de 64 días, contabilizando un total de 1024 muestras. Para cubrir las etapas de estimación y validación se organizaron los valores muestrales, tomando un 75% (749 muestras) para estimar el modelo y el 25% restante (275 muestras) para validar el modelo, el valor de la entrada es de 3,785 litros, o lo que es lo mismo un galón.

En la figura 3 se puede apreciar como se cargan en el toolbox de MATLAB®, *ident*, tanto las variables de entrada como de salida. Dicha figura muestra el origen de los datos que son directamente cargados desde una base de datos desarrollada para introducir los valores de las variables observadas en las muestras recogidas.

Figura 3.
Datos de entrada-salida a ser usados en MATLAB®



Selección y validación del modelo. Calidad del modelo

Luego de la tabulación de los datos experimentales, se corrió el modelo, aplicando los siguientes criterios: período de muestreo, cada 30 minutos y con filtrado de la señal.

MatLab posee algunas estructuras de modelos entrada-salida [3]: ARX, ARMAX, OE, BJ y ESPACIO DE ESTADO, entre otras, para estimar el modelo de la planta con los datos disponibles. De todas estas estructuras mencionadas anteriormente, la mejor fue la BJ, ya que las otras daban valores de reproductibilidad inferiores a los hallados con este método, los coeficientes de esta estructura son los siguientes: nb=3, nc=3, nd=3, nf=3, nk=1 (donde n es el orden del sistema, k el número de retraso del sistema) y las variables b, c, d, f, variables a calcular, con un coeficiente de reproducibilidad del 99,57% (mejor FIT, estimación del modelo o lo que es lo mismo un 99,57% del modelo original). En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos.

Figura 4.
Presentación de resultados luego de realizar pruebas con varios modelos, el BJ, es el que da la mejor aproximación.



Es importante recalcar que los modelos de Box Jenkins (ARIMA) parten del hecho de que la serie temporal que se trata de predecir es generada por un proceso estocástico cuya naturaleza puede ser caracterizada mediante un modelo, para ser aplicado este modelo ARIMA se requiere de una serie temporal de datos que cuente con un elevado número de observaciones, básicamente consiste en encontrar un modelo matemático que represente el comportamiento de una serie temporal.

En la teoría de **control de procesos**, se trata de seguir la evolución de una variable determinada con el fin de regular su resultado [1, 7].

Lo que se ve finalmente reflejado en una función de transferencia, que para el caso de este trabajo es en el dominio del tiempo Z inversa o tiempo discreto, la cual se muestra en la figura 5.

Figura 5.
Modelo matemático, en el dominio discreto Z.

```
>> tf(bj33332)

ans =

From input "u1" to output "y1":
      1.072e-06 z^-1 - 5.85e-07 z^-2 + 5.182e-07 z^-3
z^-(-1) * -----
      1 - 2.626 z^-1 + 2.258 z^-2 - 0.6311 z^-3

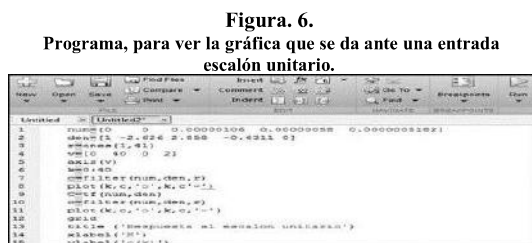
Name: bj33332
Sample time: 1800 seconds
Discrete-time transfer function.
```

La transformada Z en sistemas de control continuo en tiempo discreto juega el mismo papel que la transformada de Laplace en sistemas de control en tiempo continuo [1].

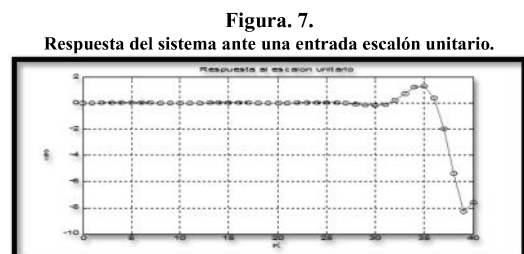
A la función de transferencia anterior, si se la divide para el valor Z^4 , se obtiene la ecuación 1, es importante recalcar esto ya que la transformada Z permite encontrar resultados en forma analítica y los métodos de computadora en forma puntual, como es el caso de este trabajo.

$$\frac{1.07e - 0.7z^2 - 5.85e - 0.7z - 5.182e - 0.7}{z^4 - 2.626z^3 + 2.258z^2 - 0.6311z} \quad (1)$$

Luego de hacer correr el programa desarrollado en el editor de MATLAB®, el que se muestra en la figura 6; se puede apreciar el comportamiento del modelo matemático encontrado dividido para Z^4 .

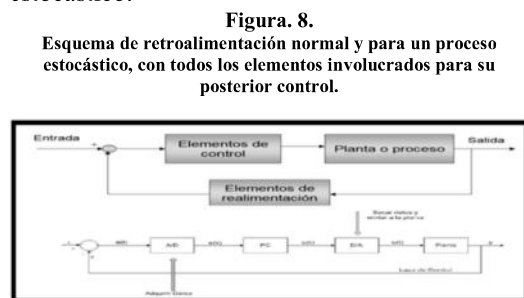


La respuesta de este modelo matemático a una entrada escalón unitario es la de figura 7.



Selección de la Teoría del Control con la que se abordará el problema de la regulación.

En la figura 8, se presenta un esquema de un sistema retroalimentado, en la parte inferior lo que sucede con un sistema retroalimentado estocástico.



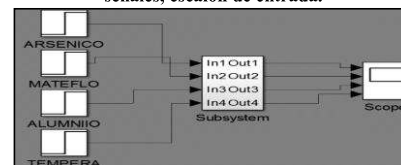
Selección de la estructura del Sistema de Control.

Para proceder con el cálculo del controlador, se utilizó la herramienta MATLAB®/Simulink^[2, 3], este asistente permite diseñar el controlador, a las condiciones y requerimientos de trabajos que se desee, tal como se ve en la figura 9.

El uso de la estrategia del Predictor de Smith, junto al PID digital, son muy utilizadas cuando existen grandes retardos en la respuesta del sistema, tratando de compensar el tiempo de muestreo muy grande que existe.

Aunque para sistemas electrónicos o eléctricos se debe tomar en cuenta el ruido blanco, para estimar el modelo matemático del sistema, en este caso por tratarse de muestras que van hacer analizadas en el laboratorio, se las considera, en Simulink.

Figura 9.
Presentación del subsistema del sistema, con sus respectivas señales, escalón de entrada.



III. RESULTADOS

Cuando existen cambios en la señal de consigna, se debe encontrar las formas de obtener sintonías de diseño específico. El ajuste del Controlador PID discreto depende de la respuesta a una señal de consigna [9], principalmente se escoge de este tipo, porque en la actualidad la mayoría de los controladores son digitales. Además que se trabaja con señales discretas de los sensores menos la referencia que se pone como valor deseado que es lo que entraría al controlador, regulador etc.

Y de la salida de este controlador al actuador o elemento final de control. Las variables involucradas para los 4 casos a los que el controlador está afectando su comportamiento se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3.
Variables de entrada y salida, involucradas en el Controlador.

MODELO DEL CONTROLADOR	
Variables de entrada	Variables de salida
Presencia de Aluminio (Al), (ppm).	Dosificación (Al), (ppm).
Presencia de Arsénico (As), (ppm).	Voltaje de alimentación de los electrodos (V), la señal eléctrica de voltaje o corriente se escogerá el momento que se monte el proyecto dentro de los rangos: 5, 10, 110, 220 voltios o corriente de 0-4 mA, respectivamente.

Materia Flotante (MF), (ppm).	Tiempo de decantación física natural de los sólidos (segundos)
Temperatura (20.1 °C).	Alimentación de la bobina de la electroválvula, la señal eléctrica de voltaje o corriente se escogerá el momento que se monte el proyecto dentro de los rangos: 5, 10, 110, 220 voltios o corriente de 0-4 mA, respectivamente.

En la figura 10 se muestran los resultados a una entrada escalón, para un tiempo de simulación de 9000 segundos, apreciándose que el uso de la estrategia de Predictor de Smith, junto a una PID digital, estabilizan el sistema a los valores deseados como se puede ver en color amarillo se muestra el valor deseado y en magenta la respuesta del sistema.

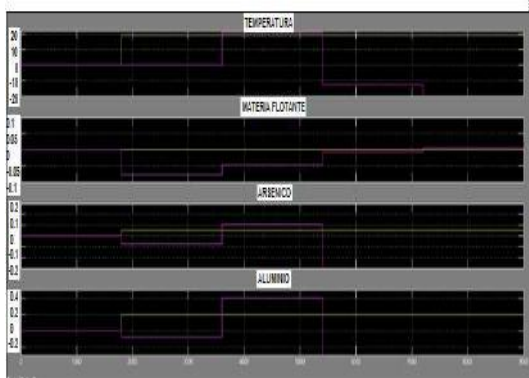
Se podría mejorar este tiempo de respuesta del sistema que para algunas variables del proceso es muy grande, con estrategias avanzadas de control y que podría parte de otro artículo tomando como referencia este artículo.

No obstante con las estrategias clásicas de control como las usadas en este artículo se obtienen muy buenos resultados ya que los valores obtenidos están dentro de los rangos permitidos por los laboratorios que se dedican a comprobar la calidad del agua, como por ejemplo el laboratorio de la planta de agua potable de Carigan-Loja.

Este sistema de control está dentro del subsistema de la figura 9, y en la actualidad solo quedo como un trabajo teórico hasta que se pueda implementar en la UNL, luego que se adquieran los equipos e instrumentos necesarios para su puesta en marcha, ya que los resultados son muy favorables.

Figura. 10.

Resultados de simulación, para 9000 segundos, con una entrada escalón y un Delay Time o retardo en el tiempo.



IV. CONCLUSIONES

1.-El modelo que se obtuvo posee un FIT, del 99,57% del modelo original, lo cual es

aceptable, ya que como mínimo debe tener un 80% de FIT, o similitud al modelo original.

2.-Es importante tomar una cantidad considerable de muestras, para que cumpla con el criterio de datos de Fourier,

3.-Este proceso se lo trato como estocástico, y la estructura que se eligió es la Box-Jenkins, o modelos ARIMA.

4.- Dado el carácter no lineal del proceso es posible que sea necesario interpolar los datos o decimarlos en un intervalo pequeño alrededor del punto de operación.

5.-Se utilizó, la estrategia de control de Predictor de Smith, junto a un PID digital, por los grandes retardos del proceso, en el proceso de muestreo, obteniéndose

6.-De la discusión de resultados, del presente trabajo de investigación, cuatro parámetros; **temperatura, materia flotante, aluminio y arsénico** sobrepasan el límite máximo permisible establecido en el Texto Unificado de Legislación Ambiental "TULAS", Libro VI, Anexo 1, Tabla 1 para aguas de consumo humano y uso doméstico. Esto determina que el recurso agua, en el sitio de la investigación, requiera de un tratamiento convencional, que contemple los siguientes pasos: a) separación de partículas gruesas por medio de rejillas y cajas de limpieza; b) utilización de un tanque floculador para la sedimentación de los sólidos y posterior formación de una agua clarificada; c) cloración para desinfección y, d) un proceso de ósmosis inversa, para eliminar metales pesados.

V. AGRADECIMIENTOS

A la UNL por permitir ocupar todos los equipos que cuenta el laboratorio de Automatización del Área de Energía, las Industrias y los Recursos Naturales no Renovables.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1] **Smith, C.A. and A.B. Corripio**, *Control automático de procesos. Teoría y práctica*. 1991: John Wiley & Sons, Inc. 718. ISBN: 968-18-3791-6.
- [2] **Chau, P.C.**, *Chemical Process Control: A First Course with MATLAB*. 2001, San Diego. University of California. 255.
- [3] **Hahn, B.D. and D.T. Valentine**, *Essential MATLAB® for Engineers and Scientists*. Third edition ed. 2007: Elsevier. 499. ISBN 13: 9-78-0-75-068417-0.
- [4] **Cruz, J.L.R. and R.I. Pupo**, *Diagnóstico de instalaciones de transporte de hidromezcla afectadas por cavitación*. Minería y Geología, 2007. XXIII(3): p. 1-15. ISSN: 1993 8012. <http://revista.ismm.edu.cu/index.php/revistamg/article/view/87/92>
- [5] **Rueda, I.R., B.M.P. Mena, and J.R.G. Sarduy**, *Modelo de motor de inducción agregado aplicado en caracterización energética*. Ingeniería Mecánica., 2012. XV(3): p. 213-223. ISSN: 1815-5944. <http://www.ingenieriamecanica.cujae.edu.cu/index.php/revistaim/article/view/431/788>
- [6] **Mediaceja, Y.R. and A.A.L. Lobaina**, *Modelación matemática del área de exposición y del volumen de las pilas de menas lateríticas expuestas a secado solar natural*. Minería y Geología, 2011. XXVII(2): p. 84-108. ISSN: 1993 8012. <http://revista.ismm.edu.cu/index.php/revistamg/article/view/266/pdf>
- [7] **Scenna, N.J.**, et al., *Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos*. 1999. 858. ISBN: 950-42-0022-2.
- [8] **Juárez, J.d.J.M., R.U. Parrazalesb, and R.P. Orozcoc**, *Estimador estocástico para un sistema tipo caja negra*. Revista mexicana de física, 2011. 57(3). ISSN: 0035-001X. <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v57n3/v57n3a4.pdf>
- [9] **Fernández, L.P.S.**, *Patrones de Sistemas de Primero y Segundo Orden, en un Ambiente de Instrumentación Virtual*. Computación y Sistemas, 2003. 7(2). ISSN: 1405-5546. <http://www.scielo.org.mx/pdf/cys/v7n2/v7n2a3.pdf>.
- [10] **Quarteroni, A., R. Sacco, and F. Saleri**, *Numerical Mathematics*. Second Edition ed. 2007, New York. USA.: Springe. 663. ISBN: 0939-2475.
- [11] **Santana, J.C.**, *Predicción de series temporales con redes neuronales: una aplicación a la inflación colombiana*. Revista Colombiana de Estadística, 2006. 29(1): p. 77 - 92.