

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN FUNCIONAL MEDIANTE UNIFORMIZACIÓN Y PEGAMENTO CON APLICACIÓN CONFORME

(SOLUTION OF A FUNCTIONAL EQUATION BY MEANS OF UNIFORMITY AND GLUE WITH CONFORMING APPLICATION)

Gortaire Danilo¹, Salgado Nelson²

Resumen: En el presente trabajo se analizan las condiciones y las fórmulas para la solución de un caso particular de la ecuación funcional lineal $A(z,w)\xi(z,w) + A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) + A(0,0)\xi(0,0) = z\eta(z,w)$, $|z| \leq 1, |w| \leq 1$, con ξ como incógnita. La ecuación proviene de la ecuación bidimensional discreta del tipo Wiener y Hopf [1] en un cuadrante del plano y se la analiza para el núcleo $A(z,w)$ de la forma: $A(z,w) = z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$. Estudios detallados sobre ecuaciones funcionales de este tipo se pueden encontrar en [1,2,3,4,5]. El método principal de investigación para resolver la ecuación funcional con el núcleo anterior es el de la uniformización de la relación $A(z,w) = 0$, el pegamento mediante aplicación conforme (adhesive conformal application), la prolongación analítica, la integral del tipo Cauchy, los problemas de contorno para las funciones analíticas [6] y otros. La presente investigación tiene un carácter teórico, pero los resultados y técnicas de análisis pueden ser aplicados principalmente a problemas de la teoría de colas [4,5], marchas aleatorias, ecuaciones de Wiener y Hopf en un cuadrante [1], sistemas infinitos y ecuaciones funcionales semejantes.

Palabras clave: Ecuación funcional; uniformización; ecuaciones de Wiener y Hopf.

Abstract: In this paper we analyze the conditions and formulas for the solution of a particular case of the linear functional equation $A(z,w)\xi(z,w) + A(z,0)\xi(z,0) + A(0,w)\xi(0,w) + A(0,0)\xi(0,0) = z\eta(z,w)$, $|z| \leq 1, |w| \leq 1$ with ξ as an unknown. Equation that comes from the discrete two-dimensional equation of the Wiener and Hopf type [1] in a quadrant of the plane and which is analyzed for the particular case in which the kernel has $A(z,w)$ the form: $A(z,w) = z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$. Detailed studies of functional equations of this type can be found in [1,2,3,4,5]. The main method of investigation to solve the functional equation with the previous kernel is the uniformization of the relation $A(z,w) = 0$ use of an adhesive conformal application, the analytic prolongation, the Cauchy-type integral, the boundary problems for the analytic functions [6], and others. The present research has a theoretical character, but the results and techniques of analysis can be applied mainly to problems of queueing theory [4,5], random marches, Wiener-Hopf equations in a quadrant [1] and similar functional equations.

Keywords: Functional equation; Uniformization; Equations of Wiener and Hopf.

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación bidimensional discreta de Wiener y Hopf en un cuadrante del plano, o lo que es lo mismo, el sistema infinito de ecuaciones lineales, tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{i-k,j-n} \xi_{k,n} = \eta_{i,j}, \quad i,j=1,2,\dots$$

Ecuación 1.1

¹Gortaire Danilo PhD Profesor de la Universidad Central del Ecuador, UCE, Quito – Ecuador (agortaire@uce.edu.ec).

²Salgado Reyes PhD Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito – Ecuador (nesalgado@puce.edu.ec).

en donde la incógnita es la sucesión $(\xi_{k,n})_{k,n \geq 0}$. Siguiendo a [1,2] vamos a suponer que todas las sucesiones que entran en (1.1): $(a_{p,q})_{p,q=0}^{\infty}, (\xi_{k,n})_{k,n=0}^{\infty}, (\eta_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$, pertenecen al espacio l^1 de sucesiones absolutamente convergentes [13]. Consideraremos además que $a_{p,q} = 0$, si por lo menos uno de los dos índices p o q toma valores inferiores a -1 . Bajo estas condiciones, las funciones generatrices correspondientes $\xi(z,w), \eta(z,w)$ y $A(z,w)$, dadas por:

$$\xi(z,w) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \xi_{k,n} z^k w^n, \quad \eta(z,w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \eta_{i,j} z^i w^j$$

Ecuación 1.2

$$a(z,w) = \sum_{p,q=-1}^{+\infty} a_{p,q} z^p w^q = \frac{1}{zw} A(z,w)$$

son analíticas en el bicírculo $K^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2: |z| < 1, |w| < 1\}$, continuas en el bicírculo cerrado $\overline{K^2} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2: |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$ y sus valores límites [12, 14, 15] sobre el filo de la frontera del bicírculo pertenecen al anillo W de

Wiener, compuesto por todas las funciones representables en forma de sumas de series de potencias absolutamente convergentes. Convengamos en llamar a la función analítica $A(z, w)$ núcleo. Transformando el sistema de ecuaciones (1.1) mediante las funciones generatrices (1.2), obtendremos la ecuación funcional lineal equivalente [...]

$$A(z, w)\xi(z, w) - A(z, 0)\xi(z, 0) - A(0, w)\xi(0, w) + A(0, 0)\xi(0, 0) = zw\eta(z, w),$$

Ecuación 1.3

$$|z| \leq 1, |w| \leq 1,$$

donde ξ es la función incógnita y A, η vienen dadas [2]. El caso general todavía no está resuelto, permaneciendo abierta su investigación. En el presente trabajo analizamos el caso particular, cuando el núcleo posee la forma:

$$A(z, w) = z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4, a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

2. UNIFORMIZACIÓN DEL NÚCLEO $A(z, w)$ DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL Y OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN FUNCIONAL EQUIVALENTE

2.1. Análisis de la ecuación funcional lineal

$$A(z, w)\xi(z, w) - A(z, 0)\xi(z, 0) - A(0, w)\xi(0, w) + A(0, 0)\xi(0, 0) = zw\eta(z, w),$$

$$|z| \leq 1, |w| \leq 1$$

Ecuación 2.1

con el núcleo de la forma:

$$A(z, w) = z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4, a \neq 0$$

Ecuación 2.2

Las soluciones de la ecuación (2.1), si estas existen, están contenidas en la fórmula:

$$\xi(z, w) = \frac{(z-a^2)^2\xi(z, 0) + (w-a^2)^2\xi(0, w) - a^4\xi(0, 0) + zw\eta(z, w)}{z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4}$$

Ecuación 2.3

De la fórmula anterior se desprende que para la solución de la ecuación (2.1), en el anillo de

funciones $W_{z,w}$ de Wiener, es necesario y suficiente que en este anillo, el numerador de la parte derecha de (2.3), se divida sin resto por el denominador. Para esto, a su vez, es necesario que $\forall(z, w) \in \Omega$:

$$(z - a^2)^2\xi(z, 0) + (w - a^2)^2\xi(0, w) - a^4\xi(0, 0) = -zw\eta(z, w), \quad (z, w) \in \Omega,$$

Ecuación 2.4

en donde,

$$\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2: z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4 = 0, \quad |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$$

La relación $A(z, w) = z^2 - 2zw + w^2 - 2a^2z - 2a^2w + a^4 = 0$ es irreducible y su uniformización global viene dada por:

$$\begin{cases} z = z(t) \equiv (t + \frac{a}{2})^2 \\ w = w(t) \equiv (t - \frac{a}{2})^2, t \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Ecuación 2.5

Deseando simplificar el análisis de la ecuación (2.4), mostremos que es suficiente considerar que $a > 0$. Efectivamente, poniendo $a = |a|e^{-i\alpha}$, e introduciendo las nuevas variables \tilde{z}, \tilde{w} , tales que $z = e^{-2i\alpha}\tilde{z}, w = e^{-2i\alpha}\tilde{w}$, el núcleo (4.2) toma la forma:

$$A(z, w) = e^{4i\alpha}[\tilde{z}^2 - 2\tilde{z}\tilde{w} + \tilde{w}^2 - 2|a|^2\tilde{z} - 2|a|^2\tilde{w} + |a|^4] = e^{4i\alpha}\tilde{A}(\tilde{z}, \tilde{w}).$$

De aquí se desprende que el nuevo núcleo $\tilde{A}(\tilde{z}, \tilde{w})$ se diferencia del anterior $A(z, w)$ en la presencia del factor $e^{4i\alpha}$ y en el cambio de a por $|a|$. Es evidente que la pertenencia de las funciones de la ecuación (2.1) al anillo $W_{z,w}$ no se altera con los cambios anteriores de variables. De esta manera, sin alterar la generalidad del problema, vamos a considerar que el parámetro en a (2.2) satisface la condición $0 < a < +\infty$. Pasando en la ecuación (2.4) a la variable uniformizadora t , tenemos la siguiente ecuación funcional:

$$[z(t) - a^2]^2\xi[z(t), 0] + [w(t) - a^2]^2\xi[0, w(t)] = a^4\xi(0, 0) -$$

$$z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)],$$

Ecuación 2.6

$$t \in D = \{t \in \mathbb{C}: |z(t)| \leq 1, |w(t)| \leq 1\},$$

Ecuación 2.7

Introduciendo aquí las siguientes representaciones:

$$\Phi(t) = [z(t) - a^2]^2 \xi[z(t), 0], t \in D_1,$$

Ecuación 2.8

$$\Psi(t) = [w(t) - a^2]^2 \xi[0, w(t)], t \in D_2,$$

Ecuación 2.9

$$\mu = a^4 \xi(0, 0),$$

Ecuación 2.10

$$\tilde{\eta}(t) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)], t \in D,$$

Ecuación 2.11

$$D_1 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t + \frac{a}{2}\right|^2 \leq 1\right\}, D_2 = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t - \frac{a}{2}\right|^2 \leq 1\right\},$$

Ecuación 2.12

$$D = D_1 \cap D_2, G = D_1 \cup D_2,$$

Ecuación 2.13

Obtenemos la ecuación equivalente:

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), t \in D,$$

Ecuación 2.14

En donde $\Phi: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ y $\Psi: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ son las nuevas incógnitas, analíticas en sus respectivos dominios. Es evidente que las funciones Φ y Ψ son automorfias con respecto a los grupos $\Lambda_1 = \{t, -t - a\}$ y $\Lambda_2 = \{t, -t + a\}$ respectivamente. De esta manera se cumple

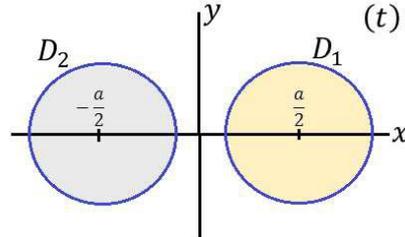
$$\Phi(t) = \Phi(-t - a) \quad \text{y} \quad \Psi(t) = \Psi(-t + a),$$

Ecuación 2.15

2.2. Caso $D = \emptyset, a > 2$.

Pasando al análisis de la ecuación (2.4) y de su ecuación equivalente (2.14), comenzamos con el caso más sencillo, cuando $\Omega = \emptyset$, es decir, solamente cuando la distancia entre los centros de los círculos es > 2 (ver gráfico 1.a), es decir:

$$D = \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t + \frac{a}{2}\right|^2 \leq 1\right\} \cap \left\{t \in \mathbb{C}: \left|t - \frac{a}{2}\right|^2 \leq 1\right\} = \emptyset \Leftrightarrow (a > 2),$$

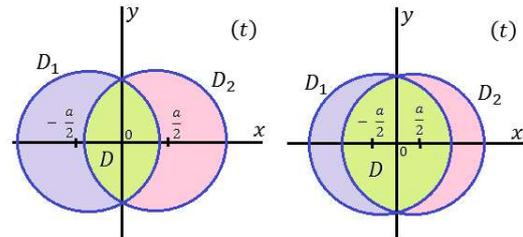


Graphic 1.a) $a > 2, D = D_1 \cap D_2 = \emptyset$
 $t = x + iy$

De esta manera, $\Omega = \emptyset$ es equivalente a la desigualdad $a > 2$. Tenemos el siguiente resultado:

2.3. Teorema 1. Para la ecuación (2.1) con el núcleo (2.2) y $a > 0$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- $a > 2$
- $\Omega = \emptyset$
- la ecuación (2.1) es soluble incondicionalmente, y su solución general viene dada por la igualdad (2.3), para cualesquiera funciones $\xi(z, 0), \xi(0, w) \in W$, para las cuales $\xi(z, 0)|_{z=0} = \xi(0, w)|_{w=0}$.



Graphic 1.b) $D \neq \emptyset$
 $1 < a < 2$

Graphic 1.c) $D \neq \emptyset$
 $0 < a < 1$

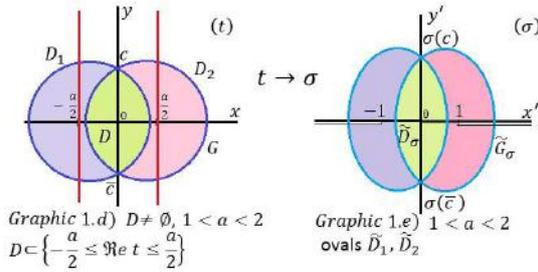
2.4. Caso $D \neq \emptyset, 1 < a < 2$.

Analizando el caso $1 < a < 2$, elegimos como dominio fundamental del grupo $\Lambda_1 = \{t, \alpha(t)\}$, $\alpha(t) = -t - a$ al semiplano derecho $\left\{\text{Re } t \geq -\frac{a}{2}\right\}$, y como dominio fundamental del grupo

$\Lambda_2 = \{t, \beta(t)\}$, $\beta(t) = -t + a$ al semiplano izquierdo $\{Re t \leq \frac{a}{2}\}$. Como intersección de estos semiplanos obtenemos la franja vertical

$$\left\{Re t \geq -\frac{a}{2}\right\} \cap \left\{Re t \leq \frac{a}{2}\right\} = \left\{-\frac{a}{2} \leq Re t \leq \frac{a}{2}\right\}$$

representada en el grafico 1.d).



La ecuación (2.14) es equivalente al problema de contorno (2.14)-(2.15) para la búsqueda de las funciones Φ y Ψ , analíticas en sus respectivos semicírculos yacentes en la franja. Este último problema acepta una solución en forma explícita, si para ella utilizamos primeramente el **método de pegamento conforme** (adhesive conformal application) y luego el método de prolongación analítica [6,7,8,9,10]. El método de pegamento conforme (adhesive conformal application), en nuestro caso, consiste en encontrar cierta aplicación conforme, con ayuda de la cual el problema de la franja se transforma en problema en el plano $\hat{\mathbb{C}}$. Con este objeto hallamos la función $\sigma = \sigma(t)$, analítica e inyectiva en el interior de la franja y sobre la frontera (contorno) de la franja que satisfaga las igualdades (2.15):

$$\sigma(t) = \sigma[\alpha(t)] \text{ para } Re t = -\frac{a}{2}, y$$

$$\sigma(t) = \sigma[\beta(t)] \text{ para } Re t = \frac{a}{2},$$

Ecuación 2.16

en donde $\alpha(t) = -t - a$ y $\beta(t) = -t + a$. Las dos igualdades (2.16) podemos ponerlas en forma de una sola $\sigma(t) = \sigma(\bar{t})$, en donde el punto t debe pertenecer al contorno de la franja. Para hallar la función pegante (adhesive conformal application), encontramos el homomorfismo conforme $\sigma = \sigma(t)$ de la semifranja superior

$\left\{-\frac{a}{2} \leq Re t \leq \frac{a}{2}, Im t > 0\right\}$ sobre el semiplano superior $Im \sigma > 0$, con la siguiente correspondencia de los puntos de frontera: $\sigma(0) = 0, \sigma\left(\pm \frac{a}{2}\right) = \pm 1$. Si hallamos este homomorfismo y lo prolongamos por el principio de simetría a la semifranja inferior, entonces ya está hallada la función pegante (adhesive conformal application) exigida. La expresión concreta de esta aplicación es bien conocida y tiene la forma $\sigma(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$. El esquema del pegamento conforme de la franja con ayuda de esta función viene dado en el gráfico 1.e). Las imágenes de los semicírculos en el plano σ serán dominios cerrados y simplemente conexos, y cuyas fronteras serán ciertos óvalos. A la unión de estos dominios cerrados los representaremos mediante \tilde{G}_σ y a su intersección mediante \tilde{D}_σ . La gráfica 1.e) es la imagen de la gráfica 1.d) mediante la aplicación $\sigma(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi t}{a}\right)$.

Pasando en el problema (2.14)-(2.15) al plano de la variable $\sigma = \sigma(t)$, obtenemos el siguiente problema lineal de contorno (sin desplazamiento):

$$\Phi[t(\sigma)] + \Psi[t(\sigma)] = \mu + \tilde{\eta}[t(\sigma)], \sigma \in \tilde{D}_\sigma,$$

Ecuación 2.17

En donde $t = t(\sigma)$ es la inversa de la función pegante (adhesive conformal application). El problema (2.17) se resuelve en forma explícita con el método de la prolongación analítica. Para esto, representamos a la función $\tilde{\eta}[t(\sigma)]$ en forma de la integral de Cauchy, y la misma que la representamos como suma de 2 integrales:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}[t(\sigma)] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma}, \end{aligned}$$

Ecuación 2.18

en donde

$$\sigma \in D_\sigma, \partial D'_\sigma = \partial D_\sigma \cap \{Re \sigma \geq 0\} \text{ y } \partial D''_\sigma = D_\sigma \cap \{Re \sigma \leq 0\}.$$

Reemplazando la anterior expresión en la ecuación (2.17), tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi[t(\sigma)] - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} &= \mu - \Psi[t(\sigma)] \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma}, \end{aligned}$$

Ecuación 2.19

La parte izquierda de esta igualdad es analíticamente prolongable en el óvalo izquierdo, y la parte derecha en el óvalo derecho. De aquí, utilizando en teorema fundamental de la prolongación analítica, concluimos que ambas partes de la igualdad (2.19) son iguales a una misma función $g[t(\sigma)]$, analítica en el interior de la unión de los 2 óvalos G_σ^0 . Suponiendo que la función $\tilde{\eta}[t(\sigma)]$ satisface la condición de Hölder en G_σ concluimos que esta propiedad también satisfacen las integrales de (2.19) casi en todo el contorno, excepto en los puntos $\sigma(c)$ y $\sigma(\bar{c})$, en cuyas vecindades tienen lugar las siguientes asintóticas (los puntos $c, \bar{c}, \sigma(c)$ y $\sigma(\bar{c})$ están representados en los gráficos 1.d) y 1.e):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} = \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(c)] + O(1)$$

para $\sigma \rightarrow \sigma(c), \sigma \in D_\sigma^0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} = \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(\bar{c})] + O(1)$$

para $\sigma \rightarrow \sigma(\bar{c}), \sigma \in D_\sigma^0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} = \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(c)] + O(1)$$

para $\sigma \rightarrow \sigma(c), \sigma \in D_\sigma^0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} = \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(\bar{c})] + O(1)$$

para $\sigma \rightarrow \sigma(\bar{c}), \sigma \in D_\sigma^0$.

De esta manera, ambas partes de la igualdad (2.19) son iguales a:

$$\begin{aligned} g[t(\sigma)] + \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(\bar{c})] \\ - \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(c)], \end{aligned}$$

Ecuación 2.20

En donde las ramas de los logaritmos son univalentes y continuas en G_σ^0 , y la función $g[t(\sigma)]$ es arbitraria, analítica en G_σ^0 y satisface la condición de Hölder [6,7,14,15] en G_σ . Las ramas continuas de los logaritmos en (2.20) existen, pues como nos muestra el gráfico 1.e) los puntos de ramificación $\sigma(c)$ y $\sigma(\bar{c})$ se los puede unir con el punto infinitamente alejado ∞ , utilizando cortes que yacen fuera de G_σ . De las igualdades (2.19) y (2.20) obtenemos la solución general del problema (2.17):

$$\begin{aligned} \Phi[t(\sigma)] = g[t(\sigma)] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} \\ + \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(\bar{c})] \\ - \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(c)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi[t(\sigma)] = -g[t(\sigma)] + \mu + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''_\sigma} \frac{\tilde{\eta}_0[t(\zeta)]d\zeta}{\zeta - \sigma} \\ - \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(\bar{c})] \\ + \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma - \sigma(c)] \end{aligned}$$

Pasando a la variable t , obtenemos la solución general del problema(2.14)-(2.15):

$$\Phi(t) = g(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'} \frac{\tilde{\eta}(\tau)d(\tau)}{\sigma(\tau)-\sigma(t)} + \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(\bar{c})] - \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(c)]$$

para $\left|t + \frac{a}{2}\right| \leq 1$, y en donde $\partial D' = \partial D \cap \{Re t \geq 0\}$, $\sigma(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$ es la función pegante;

$$\Psi(t) = -g(t) + \mu + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''} \frac{\tilde{\eta}(\tau)d(\tau)}{\sigma(\tau)-\sigma(t)} - \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(\bar{c})] + \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(c)]$$

Ecuación 2.21

para $\left|t - \frac{a}{2}\right| \leq 1$, y en donde $\partial D'' = \partial D \cap \{Re t \geq 0\}$, $\sigma(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$, es la función pegante.

3. RESULTADOS:

3.1. Teorema 2. Suponiendo que $1 < a < 2$ y que la función $\tilde{\eta}(t)$ analítica en D^0 satisface la condición de Hölder en D , tenemos que el problema (2.14)-(2.15) es soluble incondicionalmente. Su solución general viene dada por las 2 fórmulas (2.21), en donde $g(t)$ es una función arbitraria, analítica en el dominio $\left\{t + \frac{a}{2} < 1\right\} \cap \left\{t - \frac{a}{2} < 1\right\} \cap \left\{|Re t| < \frac{a}{2}\right\}$, hólderiana en G , y sobre el contorno de la franja $\left\{|Re t| < \frac{a}{2}\right\}$ satisface la igualdad $g(t) \equiv g(\bar{t})$.

3.2. Nuevamente sobre el caso $D \neq \emptyset$, $1 < a < 2$.

Nuevamente, suponiendo que $1 < a < 2$. Analicemos la ecuación (2.4) utilizando las representaciones (2.8)-(2.11) y el Teorema 2. De las desigualdades $1 < a < 2$ se desprende que la función $z(t) - a^2$ no se anula para $\left|t + \frac{a}{2}\right| \leq 1$, y la función $w(t) - a^2$ no se anula para $\left|t - \frac{a}{2}\right| \leq 1$. De esta manera, las funciones buscadas $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$ se las puede hallar directamente de las igualdades (2.8) y (2.9), respectivamente:

$$\begin{aligned} \xi(z, 0) &= \frac{\Phi(t)}{[z(t) - a^2]^2} \cdot \xi(w, 0) \\ &= \frac{\Psi(t)}{[w(t) - a^2]^2} \end{aligned}$$

Ecuación 2.22

Nos queda hallar el valor de la constante $\mu = a^4 \xi(0,0)$. Utilizando la calidad de la función g de ser arbitraria, exigimos que se cumpla la condición

$$\Phi\left(-\frac{a}{2}\right) = \Psi\left(\frac{a}{2}\right) = \mu,$$

Ecuación 2.23

Tomando en cuenta que $\left\{t = -\frac{a}{2}\right\} \rightarrow \{z = 0\}$ y $\left\{t = \frac{a}{2}\right\} \rightarrow \{w = 0\}$, obtenemos de (2.22):

$$\begin{aligned} \xi(z, 0)|_{z=0} &= \frac{\Phi\left(-\frac{a}{2}\right)}{a^4} = \xi(0, w)|_{w=0} \\ &= \frac{\Psi\left(\frac{a}{2}\right)}{a^4} = \frac{\mu}{a^4} = \xi(0,0), \end{aligned}$$

Ecuación 2.24

Finalmente es necesario asegurar la pertenencia de las funciones (2.22) al anillo W de Wiener. Exigimos que la función $\tilde{\eta}(t)$ cumpla la condición de Hölder [4, 17,19] con coeficiente $\lambda > 1/2$. Entonces, en base al teorema de S. Bernstein [14,15] las funciones (2.21) (en las variables z y w respectivamente) van a pertenecer al anillo W . De esta manera, queda establecido el siguiente:

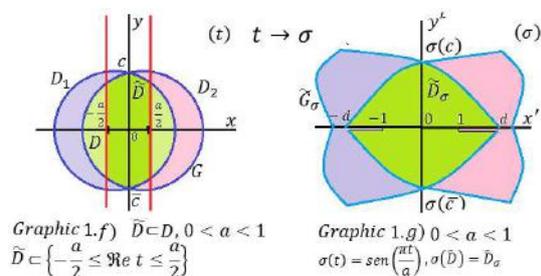
3.3. Teorema 3. Supongamos que $1 < a < 2$ y que la función $\tilde{\eta}$ cumple con la condición de Hölder con coeficiente $\lambda > 1/2$. Entonces, la ecuación (2.4) es soluble incondicionalmente, y su solución general viene dada por las igualdades (2.22), en donde las funciones Φ y Ψ se hallan de las fórmulas (2.21) y obedecen a la condición (2.23).

Colocando en el numerador de la parte derecha de (2.3) en lugar de $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$ la solución general de la ecuación (2.4), tenemos que el numerador se dividirá sin resto por el denominador, obteniéndose $\xi(z, w) = \sum_{i,j \geq 0} \xi_{ij} z^i w^j$.

3.4. Teorema 4. La condición necesaria y suficiente para la solubilidad de la ecuación (2.1) es el cumplimiento de la desigualdad $\sum_{i,j \geq 0} |\xi_{ij}| < \infty$, en donde ξ_{ij} son los coeficientes del desarrollo de la fracción (2.3) en serie de potencias, después de haber colocado en el numerador la solución general de la ecuación (4.4).

3.5. Caso $D \neq \emptyset$, $0 < a \leq 1$.

Pasamos ahora a analizar el caso cuando $0 < a \leq 1$ (ver gráficos 1.c), 1.f), 1.g). En este caso el análisis del problema (2.14)-(2.15) se complica, ante todo porque la intersección de los círculos $\left\{ \left| t + \frac{a}{2} \right| \leq 1 \right\} \cap \left\{ \left| t - \frac{a}{2} \right| \leq 1 \right\}$ no cabe en la franja $\left\{ |Re t| \leq \frac{a}{2} \right\}$. Por esto, como resultado del pegamiento conforme se obtiene una configuración más compleja que en el caso $1 < a < 2$ (ver gráfico 1.g). Precisamente aquí, la imagen del dominio cerrado \tilde{D} (es decir la intersección de los círculos y la franja) es el dominio simplemente conexo \tilde{D}_σ , el mismo que representa un cuadrilátero curvilíneo con vértices en los puntos $d, \sigma(c), -d, \sigma(\bar{c})$, y del cual están arrojados los segmentos $[-d, -1]$ y $[1, d]$. Sin embargo, en este caso, el método de la prolongación analítica, también funciona.



Resumiendo, los cálculos, formulamos solamente los resultados:

3.6. Teorema 5. Supongamos que $0 < a \leq 1$ y que la función $\tilde{\eta}$ analítica en D^0 de (2.14) cumple con la condición de Hölder con coeficiente $\lambda > 1/2$ en el dominio cerrado \tilde{D} . Entonces el problema (2.14)-(2.15) es soluble incondicionalmente y su solución general viene dada por las fórmulas:

$$\Phi(t) = g(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D'_\sigma} \frac{\tilde{\eta}(\tau) d(\tau)}{\sigma(\tau) - \sigma(t)} + \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(\bar{c})] - \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(c)],$$

para $\left| t + \frac{a}{2} \right| \leq 1, Re t < \frac{a}{2}$ y en donde $\partial D' = \partial \tilde{D} \cap \{Re t \geq 0\}$, $\sigma(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{a}\right)$ es la función pegante (ver gráfico 1.g));

$$\Psi(t) = -g(t) + \mu + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D''_\sigma} \frac{\tilde{\eta}(\tau) d(\tau)}{\sigma(\tau) - \sigma(t)} - \frac{\tilde{\eta}(\bar{c})}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(\bar{c})] + \frac{\tilde{\eta}(c)}{2\pi i} \ln[\sigma(t) - \sigma(c)],$$

Ecuación 2.25

para $\left| t - \frac{a}{2} \right| \leq 1, Re t < \frac{a}{2}$ y en donde $\partial D'' = \partial \tilde{D} \cap \{Re t \leq 0\}$, $\sigma(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{a}\right)$ es la función pegante (ver gráfico 1.g).

La función $g(t)$ es arbitraria, analítica en el dominio $\left\{ \left| t + \frac{a}{2} \right| < 1 \right\} \cup \left\{ \left| t - \frac{a}{2} \right| < 1 \right\} \cap \left\{ |Re t| \leq \frac{a}{2} \right\}$, cumple con la condición de Hölder en el dominio anterior cerrado y satisface la igualdad $g(t) = g(\bar{t})$.

Pasando al análisis de la ecuación (2.4) bajo las mismas condiciones, de las fórmulas (2.8) y (2.9) hallamos

$$\xi(0, z) = \frac{\Phi(t)}{[z(t) - a^2]^2}, \xi(0, w) = \frac{\Psi(t)}{[w(t) - a^2]^2},$$

Ecuación 2.26

Descomponiendo en factores los denominadores de (2.26), tenemos

$$\begin{aligned} [z(t) - a^2]^2 &= \left[\left(t + \frac{a}{2} \right)^2 - a^2 \right]^2 \\ &= \left(t - \frac{a}{2} \right)^2 \left(t + \frac{3a}{2} \right)^2 \\ [w(t) - a^2]^2 &= \left[\left(t - \frac{a}{2} \right)^2 - a^2 \right]^2 \\ &= \left(t + \frac{a}{2} \right)^2 \left(t - \frac{3a}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

En vista de que $0 < a < 1$, los puntos $t = \frac{a}{2}$ y $t = -\frac{3a}{2}$ yacen en el círculo $\left| t + \frac{a}{2} \right| \leq 1$, y los puntos $t = -\frac{a}{2}$ y $t = \frac{3a}{2}$ yacen en el círculo $\left| t - \frac{a}{2} \right| \leq 1$ es necesario exigir que los denominadores en (4.26) posean ceros de segundo orden en los puntos $\frac{a}{2}$, $-\frac{3a}{2}$ y $-\frac{a}{2}$, $\frac{3a}{2}$ respectivamente. Para esto, utilizando la arbitrariedad en la elección de la función g eso es posible hacerlo, y nosotros vamos a suponer que la cuestión de los ceros ya está hecha. Suponiendo adicionalmente que la función $\tilde{\eta}$ es de Hölder [6,7,10,15] con coeficiente $\lambda > 1/2$, nosotros conseguimos así que las dos funciones de (2.26) pertenezcan al anillo W de Wiener. Nos queda elegir la constante μ , de tal manera que cumpla

$$\xi(z, 0)|_{z=0} = \xi(0, w)|_{w=0} = \frac{\mu}{a^4} = \xi(0, 0),$$

Utilizando la relación (2.26), ponemos estas igualdades en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi\left(-\frac{a}{2}\right)}{a^4} &= \frac{\Psi\left(\frac{a}{2}\right)}{a^4} = \frac{\mu}{a^4} = \xi(0, 0) \text{ o } \mu = \Phi\left(-\frac{a}{2}\right) \\ &= \Psi\left(\frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

El cumplimiento de la primera igualdad es posible, utilizando la arbitrariedad en la elección de la función g y de esta manera encontrar el valor de μ . Así, tenemos el resultado:

3.7. Teorema 6. Sean $0 < a < 1$ y la función $\tilde{\eta}$ Hölder con coeficiente $\lambda > 1/2$. Entonces la ecuación (2.4) es soluble incondicionalmente. Su solución general viene dada por las formulas (2.26), en donde las funciones Φ y Ψ están dadas mediante (2.25) y la función g debe satisfacer las condiciones arriba ya indicadas.

Para concluir, notemos además que en el caso $0 < a < 1$ también es correcto el Teorema 4, pero no lo formularemos por ser evidente su contenido.

4. Conclusiones y Recomendaciones

Mediante las funciones generatrices (1.2) en el espacio l^1 , hemos transformado la ecuación bidimensional discreta de Wiener y Hopf (1.1) en un cuadrante del plano en la ecuación funcional (1.3) equivalente, con funciones pertenecientes al anillo $W_{z,w}$ de Wiener. La ecuación funcional (1.3) con el núcleo particular $A(z, w) = (az + bw + c)^n, n \in \mathbb{N}$, se resuelve completamente inicialmente mediante la uniformización (parametrización) del núcleo $A(z, w)$, transformándola en una nueva ecuación funcional equivalente (20) con variable $t \in \mathbb{C}$. Como resultado fundamental tenemos que la ecuación funcional (20) se la resuelve para todos sus casos, mediante el uso de técnicas del análisis complejo (uniformización, desarrollos en series de potencias, integral del tipo de Cauchy, problemas de contorno, prolongación analítica, otras). La ecuación funcional (1.3), en su caso general, está muy lejos de ser resuelta, pero los resultados parciales o particulares para distintos tipos de núcleos $A(z, w)$ son muy ricos por sus contenidos y métodos matemáticos.

Los métodos de análisis de la ecuación funcional (1.3), objeto de estudio del presente trabajo, tienen carácter teórico pero pueden ser aplicados al estudio de ecuaciones funcionales semejantes que aparecen en la teoría de colas, marchas aleatorias, ecuaciones del tipo de Wiener y Hopf

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1] "Random walks. The Wiener-Hopf equations in quadrant of the plane. Galois automorphisms. V. A. Malyshev. Moscow State University Press. 1970.
- [2] "Solución explícita de un caso particular de la ecuación bidimensional de Wiener y Hopf en un cuadrante".
- [3] E. Zverovich, E. Krushevski. *Simposium sobre los problemas contemporáneos de la física matemática.* Universidad de Tbilisi, Georgia, 1987 (en ruso).
- [4] "Investigación de ciertas ecuaciones funcionales lineales para funciones analíticas en el bicírculo utilizando el método de uniformización", Danilo Gortaire. Tesis previa a la obtención del título de candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas. Minsk, Belarus (Rusia Blanca), 1994 (en ruso).
- [5] Fayolle G. *On functional equations of one and two complex variables arising in the analysis of stochastic models, In: Math. Computer Performance and Reliability*, eds. Iazeola G., Courtois P. J. and Holdijk A., p. 55-75, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1984
- [6] Flatto L., McKean H. P. *Two queues in parallel.* Comm. Pure & Appl. Math, 30 (1977) 255-263.
- [7] "Problemas de contorno", F.D. Gájov. Editorial Mir, Moscú, 1980.
- [8] "Metodos de la teoría de las funciones de una variable compleja", L. Lavréntiev, B. Shabat. Editorial Mir, Moscú 1991.
- [9] "Teoría de la funciones analíticas", Tomos I y II. A. Markushevich. Editorial Mir, Moscú, 1978.
- [10] "Curso de Teoría de Funciones", J. Muños Díaz. Editorial Tecnos, Madrid, 1978.
- [11] "Análisis Real y Complejo", W. Rudin. Ed. Alhambra, Madrid, 1979.
- [12] "Complex Analysis", J. Bak, D. Newman. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1991.
- [13] "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables", L. Hörmander. D. Van-Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 1966.
- [14] "Functional Analysis", K. Yosida. Springer-Verlag, New York Inc., New York 1968.
- [15] "Fourier Series. A Modern Introduction", Vol I, II. R.E. Edwards. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1979.
- [16] "Trigonometric Series", A. Zigmund. Cambridge University Press, Chicago, New York, Edimburg, 1968.