Matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2018, Vol.16, No.2 **Publicado:2018-10-02**

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

(THEOREM OF THE FIXED POINT OF BROUWER)

Medina Viloria Jesús[1], Vivas Cortez Miguel[2]

Resumen: *En este artículo presentaremos una demostración breve y elegante del Teorema del punto fijo de Brouwer procedente de [3]. En dicha demostración solo se involucra el concepto de homotopía en términos de relación de equivalencias.*
Palabras claves: *Teorema de Brower, Punto fijo, Homotopía.*

Abstract: *In this article we will present a brief and elegant demonstration of Brouwer's Fixed Point Theorem from [3]. In this demonstration only the concept of homotopy is involved in terms of equivalence relation.*
Keywords: *Brower theorem, fixed point, homotopy.*

1. INTRODUCCION

Los teoremas de punto fijo son algunas herramientas matemáticas más utilizadas para probar la existencia de conceptos de solución, o de equilibrio, en la teoría económica (ver [2, 5]). Un punto fijo de una función $f: \Xi \to \Xi$ es un elemento $x \epsilon \Xi$ que satisface que $f(x) = x$, es decir, el punto fijo de una función es un punto $x \epsilon \Xi$ y cuya imagen bajo la misma función es el mismo x. El teorema de punto fijo que se desarrollará en este trabajo es el teorema de Brouwer, en honor al matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Este teorema es usado como herramienta principal para demostrar el famoso teorema de la curva de Jordan, debido a Maehara (ver [4]). La versión más útil del teorema (ver [1]) señala que:
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto y sea $f: K \to K$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo. En [3] los autores presentan la siguiente definición de homotopía y de aplicaciones homotópicas.

[1]*Departamento de Matemática, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela (Email: jesus.medina@ucla.edu.ve)*
[2]*Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Sede Quito. (Email: mjvivas@puce.edu.ec).*

Definición 1.1 ([3]). Sean Ξ e Ψ espacios topológicos. Una homotopía de Ξ a Ψ es una aplicación $H: \Xi \times \mathrm{I} \to \Psi$ continua, donde $I = [0, 1]$. Dos aplicaciones continuas $f, g : \Xi \to \Psi$ son homotópicas, y se denota $f \sim g$, si existe una homotopía H de Ξ en Ψ, tal que, $H_0 = f$ y $H_1 = g$, donde $H_t(x) = H(x,t), \forall (x,t) \in \Xi \times \mathrm{I}$.

En lo que sigue denotamos $\Delta_{(x_0,r)}$ el disco abierto o bola abierta con centro x_0 y radio r, Σ^1 es el círculo unitario.

2. RESULTADOS PRINCIPALES

El siguiente resultado establece la propiedad básica del concepto de homotopía.

Lema 2.1. *La relación de homotopía es de equivalencia.*

Proof. Sean $f, g, h : \Xi \to \Psi$ funciones continuas entre los espacios topológicos Ξ e Ψ.

a) Reflexiva.
Basta tomar $H(x,t) = f(x), \forall (x,t) \in \Xi \times \mathrm{I}$. Luego H es continua y además $H_0 = f = H_1$. Así, $f \sim f$.

b) Simétrica.
Si $f \sim g$ entonces existe una función continua en $H: \Xi \times \mathrm{I} \to \Psi$ con $F_0 = f,\ F_1 = g$ Ahora definamos $H: \Xi \times \mathrm{I} \to \Psi$ como $H(x,t) = F\ (x, 1-t)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} t \in \mathrm{I} &\Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \geq -t \geq -1 \\ &\Rightarrow 1 \geq 1-t \geq 0 \\ &\Rightarrow 1-t \in \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Así, H(x, t) es continua en $\Xi \times \mathrm{I}$ (ya que F es continua en $\Xi \times \mathrm{I}$) y $H_0 = F_1 = g$ y $H_1 = F_0 = f$.
Por lo tanto, $g \sim f$.

c) Transitiva.
Supongamos que $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces existen $F, G: \Xi \times \mathrm{I} \to \Psi$ continuas con $F_0 = f$, $F_1 = g, G_0 = g,\ G_1 = h$.
Definamos $H: \Xi \times \mathrm{I} \to \Psi$, como,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & si\ 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t-1) & si\ 1/2 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

La aplicación H está bien definida porque si $t = 1/2$ entonces, $F(x, 2t) = F_1 = g = G_0 = G(x, 2t - 1)$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} t \in [1/2, 1] &\Rightarrow 1/2 \leq t \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2t \leq 1 \\ &\Rightarrow 2t \in \mathrm{I} \end{aligned}$$

Luego, H es continua en $\Xi \times [0, 1/2]$, (ya que F lo es en $\Xi \times \mathrm{I}$).
Ahora,

$$\begin{aligned} t \in [1/2, 1] &\Rightarrow 1/2 \leq t \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq 2t \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2t - 1 \leq 1 \\ &\Rightarrow 2t - 1 \in \mathrm{I} \end{aligned}$$

Así, H también es continua en $\Xi \times [1/2, 1]$, (ya que G lo es en $\Xi \times \mathrm{I}$). Luego como H es continua en los dos subconjuntos cerrados, $\Xi \times [0, 1/2]$ y $\Xi \times [1/2, 1]$ de $\Xi \times \mathrm{I}$, entonces H es continua en $\Xi \times \mathrm{I}$ y además $H_0 = F_0 = f$ y $H_1 = G_1 = h$.
Por lo tanto, $f \sim h$.
El próximo lema es el primero de una serie de cuatro cuyo objetivo final es demostrar que la aplicación identidad de Σ^1 en Σ^1 no es homotópicas a una aplicación constante. El siguiente lema nos garantiza que las aplicaciones no sobreyectivas que llegan a S1 tienen un logaritmo continuo.
Lema 2.2. Si $f\colon \rightarrow \Sigma^1$ *es una aplicación continua con* $f(\Xi) \neq \Sigma^1$ *entonces* f *tiene un logaritmo continuo.*

Proof. Sea $q \in \mathbb{R}$, tal que $e^{iq} \notin f(\Xi)$ (pues por hipótesis existe $u \in \Sigma^1 \setminus f(\Xi)$). La aplicación exp: $(q, q + 2\pi) \rightarrow \Sigma^1 \setminus \{e^{iq}\}$, definida como $\exp(t) = e^{it} = (cost, sent)$ es un homeomorfismo y llamaremos L a su inversa, la cual es continua.
Luego como la imagen de f está dentro del dominio de L entonces podemos definir a $\emptyset\colon \Xi \rightarrow \mathbb{R}$, como $\emptyset(x) = L(f(x)), \forall x \in \Xi$, la cual es continua y además se cumple que,

$$e^{i\emptyset(x)} = e^{iL(f(x))} = f(x), \forall x \in \Xi.$$

Por lo tanto, f tiene un logaritmo continuo.
Lema 2.3. *Sean* f_1, f_2: $\Xi \rightarrow \Sigma^1$ *funciones continuas con*

$$|f_1 - f_2| = sup\{|f_1(x) - f_2(x)| : x \in \Xi\} \leq 1.$$

Entonces f_1 *tiene un logaritmo continuo si y sólo si* f_2 *también lo tiene.*

Proof. Definamos $h\colon \Xi \rightarrow \Sigma^1$ como,

$$h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Entonces,

$$|h(x) - 1| = \left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1\right| = |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1 - f_2| \leq 1.$$

Luego h no es sobreyectiva, ya que si $-1 \in h(x)$ entonces $|-1 - 1| = 2 > 1$, así $-1 \notin h(\Xi)$. Aplicando el lema anterior, existe $\emptyset\colon \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que, $h(x) = e^{i\emptyset(x)}$.
$(\Longrightarrow)$ Supongamos ahora que f_1 tiene un algoritmo continuo, es decir, existe $\emptyset_1 - \emptyset : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Luego,

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = h(x), \forall x \in \Xi \Longrightarrow \frac{e^{i\emptyset_1(x)}}{f_2(x)} = e^{i\emptyset(x)}, \forall x \in \Xi$$

$$\Longrightarrow f_2(x) = e^{i(\emptyset_1(x) - \emptyset(x))}, \forall x \in \Xi$$
$$\Longrightarrow f_2(x) = e^{i(\emptyset_1 - \emptyset)(x)}, \forall x \in \Xi.$$

Por lo tanto f_2 tiene un algoritmo continuo.

$(\Longrightarrow)$ Supongamos ahora que $(\Longrightarrow)$ tiene un logaritmo continuo, es decir, existe $\emptyset_2\colon \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que, $f_2(x) = e^{i\emptyset_2(x)}, \forall x \in \Xi$; entonces $\emptyset_2 - \emptyset : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Así,

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = h(x), \forall x \in \Xi \Longrightarrow \frac{f_2(x)}{e^{i\emptyset_2(x)}} = e^{i\emptyset(x)}, \forall x \in \Xi$$
$$\Longrightarrow f_1(x) = e^{i(\emptyset_2(x) + \emptyset(x))}, \forall x \in \Xi$$
$$\Longrightarrow f_1(x) = e^{i(\emptyset_2 + \emptyset)(x)}, \forall x \in \Xi.$$

Por lo tanto f_1 tiene un logaritmo continuo.

Lema 2.4. *Sea* Ξ *compacto y* $H\colon \Xi \times \mathrm{I} \rightarrow \Sigma^1$ *una homotopía. Entonces* H_0 *tiene un logaritmo continuo si y solo si* H_1 *tiene un logaritmo continuo.*

Proof. Como : $\Xi \times \mathrm{I}$ es compacto y H continua, entonces H es uniformemente continua, en particular existe $n \in \mathbb{N}$; tales que, para $(s, t) \in \mathrm{I}$,

$$|s - t| \leq 1/n \Longrightarrow |H(x, t) - H(x, s)| < 1, \forall x \in \Xi$$

Sea $f_j = H_{j/n}$, donde $j \in \{0, \dots, n\}$, y está bien definida ya que $j/n \in \mathrm{I}$, entonces,

$$|(j + 1)/n - j/n| = 1/n \Longrightarrow |H(x, (j + 1)/n)| < 1, \forall x \in \Xi$$

$$\Longrightarrow |f_{j+1}(x) - f_j(x)| < 1, \forall x \in \Xi.$$

Luego aplicando el Lema anterior, se tiene que f_{j+1} tiene un logaritmo continuo si y sólo si f_j tiene un logaritmo continuo, lo que reiterado el proceso desde 0 hasta n, se tiene que, $f_0 = H_0$

tiene un logaritmo continuo si y sólo si $f_n = H_1$ lo tiene.

Lema 2.5. *Sea* Ξ *compacto y* $f : \Xi \to \Sigma^1$ *una aplicación continua; f es homotópica a una aplicación constante si y sólo si f tiene un logaritmo continuo.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Sea $H: \Xi \times I \to \Sigma^1$ una homotopía con $H_0 = f$ y $H_1 = c$, constante. Como H_1 tiene un logaritmo continuo, ya que existe $\emptyset(x) = q, \forall x \in \Xi$, con $q \in \mathbb{R}, e^{iq} = c$. Así, $H_0 = f$ tiene un logaritmo continuo, (por el lema anterior).

($\Longleftarrow$)Supongamos que f tiene un logaritmo continuo, es decir, existe $\psi : \Xi \to \mathbb{R}$ continua, tal que, $f(x) = e^{i\psi(x)}$

Ahora definamos $G: \Xi \times I \to \Sigma^1$ como $G(x;\, t) = e^{i\psi(x)}$, es continua y además $G_0 = 1$ y $G_1 = f$.

Por lo tanto f es homotópica a una constante.

Corolario 2.6. *Sea* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *y sea* $\gamma_n(z) = z^n$. *Entonces n no es homotópicas a una aplicación constante.*

Proof. Supongamos por absurdo que γ_n es homotópicas a una aplicación constante entonces por el lema anterior γ_n tiene un logaritmo continuo, es decir, existe $\emptyset: \Xi \to \mathbb{R}$, continua, tal que, $\gamma_n(x) = e^{2\pi i \emptyset(x)}$ (donde $\emptyset$ es el resultado de dividir el logaritmo continuo que proporciona el lema anterior por 2π).

Luego dado $x \in \Sigma^1$, existe $\theta \in \mathbb{R}$, al que, $x = e^{2\pi i \theta}$, lo cual se sustituye en la igualdad anterior, se tiene que,

$$e^{2n\pi i \theta} = e^{2\pi i \emptyset(e^{2\pi i \theta})}$$

Así pues, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(\theta) = \emptyset(e^{2\pi i \theta})$, es continua y además,

$$\begin{aligned} e^{2n\pi i \theta} &= e^{2\pi i (\emptyset(e^{2\pi i \theta}) - n\theta)} \\ &= e^{2\pi i \emptyset(e^{2\pi i \theta}) - 2n\pi i \theta} \\ &= e^{2\pi i \emptyset(e^{2\pi i \theta})} e^{-2n\pi i \theta} \\ &= e^{2n\pi i \theta} e^{-2n\pi i \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así, $e^{2n\pi i \theta} = (cos 2\pi f(\theta), sen 2\pi f(\theta)) = (1, 0)$, lo que ocurre si y solo si $f(\theta)$ es entero, esto es, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$. Como f es continua, $\mathbb{R}$ es conexo y las únicas componentes conexas de $\mathbb{Z}$ son los puntos, entonces f es constante.

Pero,

$$f(0) = \emptyset(1) = \frac{Log(\gamma_n(1))}{2\pi i} = \frac{Log(1)}{2\pi i}$$
$$f(1) = \emptyset(e^{2\pi i}) - n = \emptyset(1) - n = -n$$

Lo cual contradice que f es constante.

Corolario 2.7. *La aplicación identidad de* Σ^1 *no es homotópicas a una aplicación constante.*

Proof. Haciendo $n = 1$ en el corolario anterior se obtiene lo pedido.

Con este último corolario tenemos todas las herramientas necesarias para la demostración que a continuación se presenta del Teorema del punto fijo de Brouwer.

3. TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

Teorema 3.1. (Teorema del punto fijo de Brouwer.)
Sea $f : \overline{\Delta}_{(0;1)} \to \mathbb{C}$ *una aplicación continua con* $f(\Sigma^1) \subset \overline{\Delta}_{(0;1)}$. *Entonces existe un punto* $x \in \overline{\Delta}_{(0;1)}$, *tal que,* $f(x) = x$.

Proof. Supongamos por absurdo que $f(x) \neq x, \forall x \in \overline{\Delta}_{(0;1)}$, y definamos $g: \Sigma^1 \to \Sigma^1$, como:

$$g(u) = r(u - f(u)),$$

donde $r : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \Sigma^1$, se define como:

$$r(z) = \frac{z}{|z|}.$$

Luego g es una composición de funciones continuas, y tal composición es posible ya que $u - f(u)$ no se anula para ningún $u \in \Sigma^1$,(puesto que $f(\Sigma^1) \subset \overline{\Delta}_{(0;1)}$ y en el $\overline{\Delta}_{(0;1)}$ no hay puntos fijos) así g está bien definida y es continua.

Sea $H: \Sigma^1 \times I \to \mathbb{C}$ la aplicación continua,

$$H(u;\, t) = u - tf(u).$$

Dicha aplicaci_on no se anula ya que:

- Si t = 1, entonces $H(u;\, 1) = u - tf(u) \neq 0, \forall u \in \Sigma^1$.
- Ahora si $t < 1$, entonces, $tf(u) \in int(\overline{\Delta}_{(0;1)})$, (ya que $u \in \Sigma^1$ y $f(\Sigma^1) \subset \overline{\Delta}_{(0;1)}$), que nunca sera igual a u ya que u esta en la frontera del disco.

Luego se puede definir $F = r\ o\ H : \Sigma^1 \times I \to \Sigma^1$ y además, $\forall u \in \Sigma^1$, se obtiene que:

$$F_0(u) = (r\ o\ H)_0(u) = r(H_0(u)) = r(u) = \frac{u}{|u|} = u,$$
$$F_1(u) = (r\ o\ H)_1(u) = r(u - f(u)) = g(u).$$

Así, $F_0 = i_{\Sigma^1}$ y $F_1 = g$, es decir,

$$i_{\Sigma^1} \sim g. \qquad (3.1)$$

Por otra parte, sea G: $\Sigma^1 \times \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ la aplicación continua,

$$G(u,t) = tu - f(tu).$$

Dicha aplicación no se anula ya que tu, con $0 < t < 1$, esta contenido en el disco y f no tiene puntos fijos en el. Así se puede definir la siguiente composición,

$$B = r \; o \; G : \Sigma^1 \times \mathrm{I} \to \Sigma^1.$$

Y además, $\forall u \in \Sigma^1$, se cumple que,

$$B_0(u) = (r \; o \; G)_0(u) = r\big(-f(0)\big), \textit{es una constante}$$
$$B_1(u) = (r \; o \; G)_1(u) = r\big(G_1(u)\big) = r\big(u - f(u)\big) = g(u).$$

Así se tiene que,

$$(3.2) \qquad r\big(-f(0)\big) \sim g.$$

Luego por (3.1) y (3.2) y usando la simetría y transitividad de la relación de homotopía,

$$i_{\Sigma^1} \sim r\big(-f(0)\big).$$

Lo que contradice el corolario anterior.

4. CONCLUSIONES

La principal contribución de este artículo ha sido la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer, este teorema tiene múltiples aplicaciones entre ellas el teorema de la curva de Jordan, teorema de no retracción de Borsuk y el teorema fundamental del Algebra (ver [3]). Esperamos que las ideas y técnicas utilizados en este trabajo puedan ser útiles para otros lectores interesados en explorar algunas nuevas aplicaciones de este teorema, tanto en ciencias aplicadas como en ciencias puras.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS Y ELECTRONICAS

[1] **K. Border**, *Fixed point theorems with applications to economics and game theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[2] **G. Delgado**, *Una introducción a los teoremas de punto fijo y a la existencia de equilibrios en economía*, Ecónoma Informa nm. 388 septiembre - octubre 2014 (1950), 22{35.

[3] **F. García and M Puertas**, *El Teorema de la Curva de Jordan, Divulgaciones Matemáticas* Vol. 6 N. 1 (1998), 43-60.

[4] **R. Maehara,** *the Jordan Curve Theorem via the brouwer _xed point theorem*, Amer. Math. Monthly 91 (1984), 641{643.

[5] **J. Nash**, Equilibrium points in n-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America vol. 36 nm. 1 (1950), 48-49.