matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2009, Vol. 7, No. 1

APLICACIONES INDUSTRIALES DE LA FUNCIÓN DE PERDIDA DE CALIDAD DE TAGUCHI MULTIVARIANTE

Salvador-Jijón Marcelo[1]

Resumen. *Tradicionalmente, los costos de la calidad se han estimado en base a un solo resultado o característica, es de ahí que surgió la Función de Perdida de Calidad de Taguchi. Pero en la práctica industrial la evaluación de la calidad, que determina su costo, debido a que depende del cumplimiento de muchas especificaciones es no solo multidimensional sino multivariante, lo que significa que puede depender de varias dimensiones en diferentes puntos como sucede en la industria automotriz. En otras industrias ocurre algo similar como en el caso de la producción de aluminio o acero. Por tanto, se requiere de una función de Perdida de Calidad Multivariante. Existen varios abordajes al problema. En este artículo se describen algunos enfoques y sus aplicaciones a una industria automovilística (General Motors de Ecuador) y a una industria de producción metálica. Para esta última aplicación se presenta un modelo de optimización no lineal con variables intervalarias para optimizar la mezcla de materias primas y proveedores.*

Palabras clave: Función de Perdida de Calidad Multivariante, Métodos de Taguchi, Industria Automovilística, Industrias de Producción Metálica, Características de Calidad, Costos de Calidad, General Motors, Optimización no Lineal, Variables Intervalarias, Optimización de Mezcla de Materias Primas y Proveedores.

1. INTRODUCCIÓN

Hace algunos meses, dos problemas fueron puestos bajo mi consideración. Uno de ellos fue la evaluación de la calidad del ensamblaje en la planta de la General Motors en Ecuador. El método tradicional de hacerlo ha sido medir las localizaciones de 200 puntos respecto a un centro en los tres ejes de coordenadas y verificar que estén en los rangos especificados. Si no lo están se realiza un proceso de retrabajo. Este método permite establecer si el automóvil ha sido ensamblado correctamente, pero no permite evaluar si hay mejoría o no en la calidad del ensamblaje. El segundo problema que me ha sido propuesto fue la selección óptima de proveedores y la cantidad que debemos comprar a cada uno de ellos para producir aluminio de determinadas características. Este problema es clásico en Investigación de Operaciones y se llama el problema de la mezcla de materias primas y puede ser resuelto usando un modelo de programación lineal con variables intervalarias (es decir que solo pueden tomar valores en un intervalo o cero).

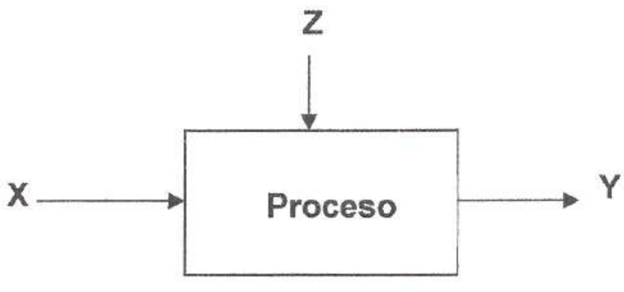
Lo que tienen en común estos dos problemas es que pueden ser abordados también con la ayuda de la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi Multivariante. En el primer caso, se pueden elaborar cartas de control basadas en esta función y medir si hay mejora o no de la calidad del ensamblaje, que no significa solamente la reducción de los retrabajos sino también de la mejoría de la percepción de la calidad por parte del usuario final (al apreciar un automóvil más ajustado a las especificaciones del diseño). En el segundo problema, un modelo de optimización que utilice la Función de Pérdida de Calidad Multivariante puede permitir mediante optimización no lineal ajustar las características del metal producido a su composición ideal con un pequeño sacrificio en el costo.

Para ambos problemas, se presentan ejemplos numéricos que demuestran que el abordaje mediante esta función puede tener utilidad en la toma de decisiones en la industria.

2. PROCESOS Y FUNCIONES DE PÉRDIDA DE CALIDAD

Un proceso de producción puede ser visto como una caja negra de acuerdo al siguiente esquema:

FIGURA 1
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Esquema de caja negra



En este esquema **x** es el vector que representa las variables de control del proceso, **z** las variables de ruido o no controlables e **y** las variables de salida, $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$, siendo $\mathcal{D}$ las especificaciones de diseño $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Una función de pérdida es una función desde el espacio de eventos, es decir desde los valores posibles de **y** a un número real que representa el costo económico o arrepentimiento asociado con el evento, en este caso el valor de las variables **y**. Por tanto, el valor de la función de la perdida de

[1] *Salvador-Jijón Marcelo Departamento de Ciencias Administrativas. Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador. (e_mail: xsalmar@hotmail.com)*

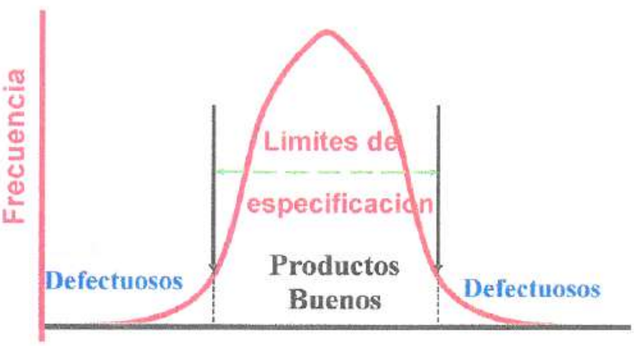
calidad de y depende del espacio de especificaciones $\mathcal{D}$.

La función pérdida de calidad es complementaria a la función utilidad U, es decir $L = g(c-U)$, donde c es una constante. Conceptualmente U es la utilidad percibida por un cliente. Si las variables **Y** siguen una distribución probabilística, es decir cuando existen las variables de ruido **Z**, entonces U y por consiguiente L son variables aleatorias.

3. LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA DE CALIDAD ESCALONADA DE UNA SOLA VARIABLE

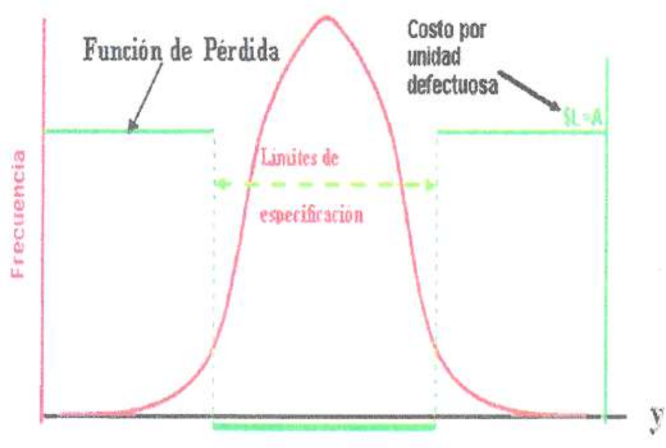
Si el proceso está bajo control la variable **y** (si es continua) debería seguir una distribución normal. Por tanto, la situación se puede describir en el siguiente gráfico:

FIGURA 2
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Proceso bajo control



El enfoque clásico y que es el más usado en la industria es el de una función de pérdida de calidad escalonada como la que se muestra en el gráfico:

FIGURA 3
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Función de Pérdida de calidad escalonada



Por tanto, la Función de Perdida Escalonada (unitaria) se define así:

$$L(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } LSL \le y \le USL \\ A & \text{de otra manera} \end{cases}$$

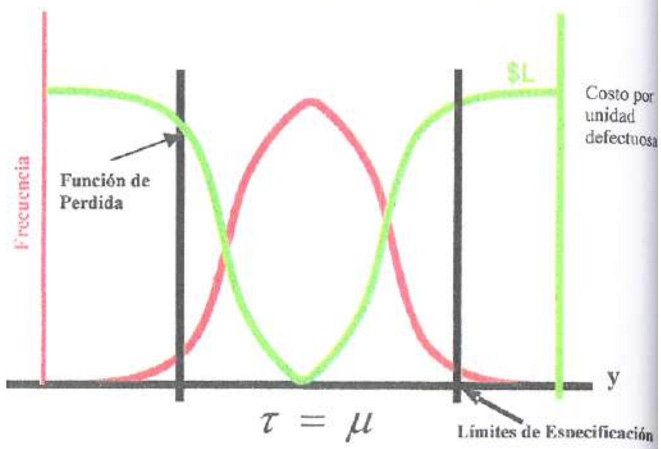
donde A es el costo por unidad rechazada en el proceso.

4. FUNCIÓN DE PERDIDA NORMAL INVERTIDA (UPSIDE- DOWN NORMAL LOSS)

Las variaciones respecto al valor objetivo τ, cuando están dentro de los límites de especificación no causan a la organización ningún costo interno. Entonces si solo se consideran estos costos, el enfoque de la función de pérdida escalonada es correcto. Sin embargo se ha observado que aún desviaciones dentro de los límites de especificación y mucho más fuera pueden causar insatisfacción del cliente o costos adicionales en el proceso subsiguiente, cuando este es considerado el cliente.

Existen varios enfoques para abordar este problema, uno de ellos (no el primero), pero el intuitivamente más claro es el de la Función de Pérdida de Calidad Normal Invertida, la cual se puede ver en el gráfico siguiente:

FIGURA 4
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Función de Pérdida de calidad normal invertida



Matemáticamente la función de pérdida de calidad se define así:

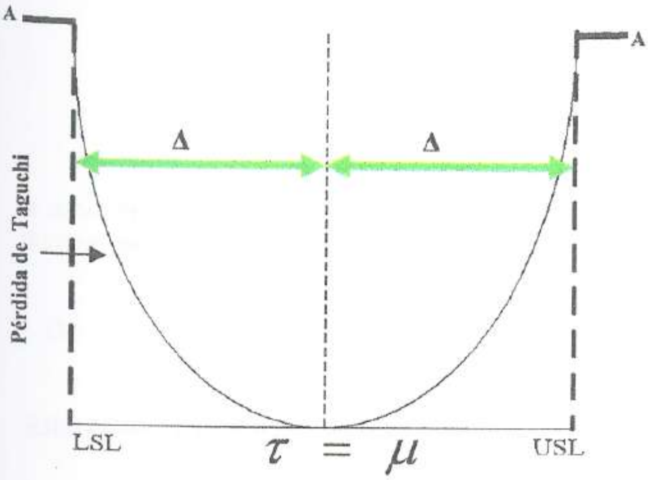
$$L(y) = 1 - e^{-\frac{(y-\tau)^2}{2\lambda^2}} \qquad (1)$$

donde τ es el valor nominal especificado y λ es un parámetro que debe ser estimado. Lo ideal es que $\tau = \mu$ pero λ es un parámetro que debe ser estimado.

5. LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA DE CALIDAD DE TAGUCHI

La Función de Pérdida de Calidad de Taguchi es similar a la anterior. En efecto, puede ser considerada una aproximación de la misma (a pesar de que apareció primero). A continuación se puede ver un gráfico de la función de Taguchi:

FIGURA 5
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Función de Pérdida de calidad de Taguchi



Matemáticamente se define la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi de la siguiente manera:

$$L(y) = \begin{cases} k(y-\tau)^2 & \text{si } LSL \le y \le USL \\ A & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2)$$

Aparte de la simplicidad del uso de esta función, existe un procedimiento sencillo propuesto por Taguchi para estimar el parámetro k.
Sea Δ = ½(*USL- LSL)* la tolerancia, como $L(USL)=L(LSL)=A$ por continuidad, entonces:

$$A = k\Delta^2 \Rightarrow k = \frac{A}{\Delta^2} \quad (3)$$

6. LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA DE CALIDAD DE TAGUCHI MULTIVARIANTE

Se puede extender al caso multivariante:

$$L(\mathbf{y}) = \begin{cases} (\mathbf{y}-\tau)^T \mathbf{C} (\mathbf{y}-\tau) & \text{si } \mathbf{y} \in \mathcal{D} \\ A(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{y} \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (4)$$

donde:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ Es el vector de variables de salida del proceso;

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}$$ Es el vector de valores nominales especificados;

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$ Es la matriz simétrica de costos;

$\mathcal{D}$ es el espacio de especificaciones de diseño, y $A(\mathbf{y})$ es una función multiescalonada, es decir constante en cada región de $\mathbf{y}$ donde es admisible. A continuación se puede ver un gráfico de una Función de Pérdida de Calidad de Taguchi Multivariante:

FIGURA 6
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Función de Pérdida de calidad Bivariante

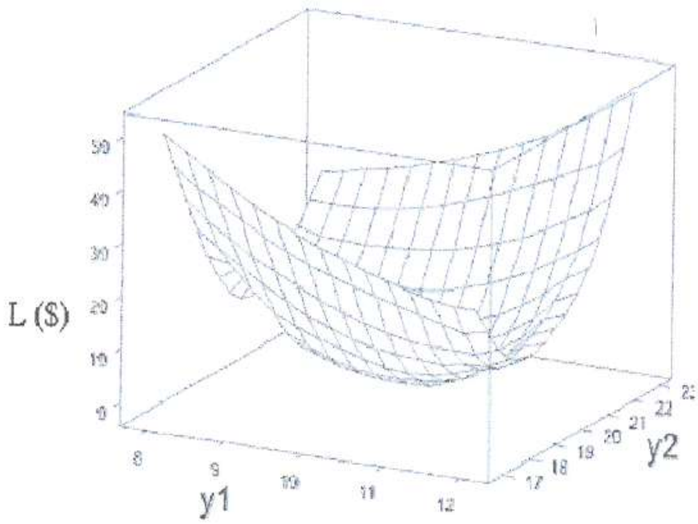
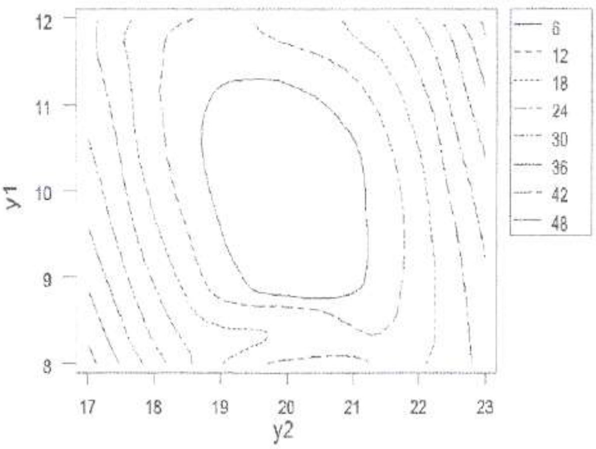


FIGURA 7
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Curvas de nivel de una Función de Perdida de Calidad Bivariante



Sin embargo, estimar la matriz **C** es un procedimiento complejo, algunos autores (Chan 2) sugieren regresión o el uso del modelo lineal general (Erdbrugge, Kuhnt 3).

Para nuestra aplicación usaremos un modelo más simple, que aunque puede no reflejar totalmente la Perdida de Calidad es mucho más manejable en la práctica. Supóngase que:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = k\cdot\mathbf{I}$$

Entonces:

$$L(\mathbf{y}) = \begin{cases} k\cdot \mathrm{d}^2(\mathbf{y},\tau) & \text{si } \mathbf{y}\in\mathcal{D} \\ A & \text{si } \mathbf{y}\notin\mathcal{D} \end{cases}$$

Donde $\mathrm{d}\,(\mathbf{y},\tau)$ es la distancia euclidiana entre los vectores $\mathbf{y}$ y τ . k puede ser fácilmente calculada por el método de Taguchi:

$$A = k\Delta^2 \Rightarrow k = \frac{A}{\Delta^2} \qquad (5)$$

Donde:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \max_{\mathbf{w},\mathbf{z}\in\mathcal{D}} \{d(\mathbf{w},\mathbf{z})\}$$

7. FUNCIÓN DE PERDIDA DE CALIDAD MULTIDIMENSIONAL

En la práctica industrial la evaluación de la calidad, que determina su costo, depende del cumplimiento de muchas especificaciones, por tanto es también multidimensional, lo que significa que puede depender de varias dimensiones en diferentes puntos como sucede en la industria del ensamblaje automotriz donde se evalúa el ajuste geométrico del ensamblaje de un automóvil en múltiples puntos del mismo.

En este o en similares casos se puede usar la Función de Perdida de Calidad Multidimensional que se define así:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1(\mathbf{y}_1) \\ L_2(\mathbf{y}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_m(\mathbf{y}_m) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Si se definen pesos $w_1, w_2, \dots, w_m$, entonces, se puede calcular la L_t global de la siguiente manera:

$$L_t(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot L_i(\mathbf{y}_i) \qquad (7)$$

8. APLICACIÓN A GENERAL MOTORS ECUADOR

Una de las partes fundamentales de un vehiculo es la carrocería, la cual soporta todo el sistema motriz, funcional, de seguridad y confort del mismo, por esto es importante implementar un sistema de análisis y control dimensional. Esto hace que sea necesario mantener un estricto control de estos parámetros. El sistema de medición consiste en un proceso de palpación de la pieza a medir con la cual se obtiene un dato (X,Y,Z). Este sistema se conoce como CMM (Coordinates Measure Machine).

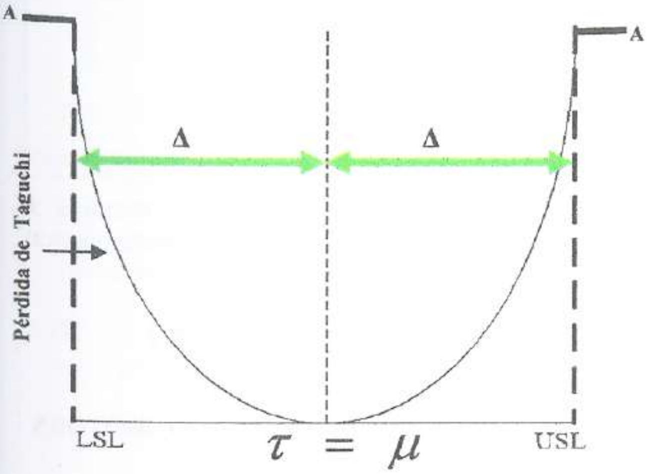
FIGURA 8
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Palpador

que $\tau = \mu$ pero λ es un parámetro que debe ser estimado.

5. LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA DE CALIDAD DE TAGUCHI

La Función de Pérdida de Calidad de Taguchi es similar a la anterior. En efecto, puede ser considerada una aproximación de la misma (a pesar de que apareció primero). A continuación se puede ver un gráfico de la función de Taguchi:

FIGURA 5
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Función de Pérdida de calidad de Taguchi



Matemáticamente se define la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi de la siguiente manera:

$$L(y) = \begin{cases} k(y-\tau)^2 & \text{si } LSL \le y \le USL \\ A & \text{de otra manera} \end{cases} \qquad (2)$$

Aparte de la simplicidad del uso de esta función, existe un procedimiento sencillo propuesto por Taguchi para estimar el parámetro *k*.
Sea **Δ = ½(*USL*- *LSL*)** la tolerancia, como *L(USL)=L(LSL)=A* por continuidad, entonces:

$$A = k\Delta^2 \Rightarrow k = \frac{A}{\Delta^2} \qquad (3)$$

6. LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA DE CALIDAD DE TAGUCHI MULTIVARIANTE

Se puede extender al caso multivariante:

$$L(\mathrm{y}) = \begin{cases} (\mathrm{y}-\tau)^{\mathrm{T}} \mathrm{C} \, (\mathrm{y}-\tau) & \text{si } \mathrm{y} \in \mathcal{D} \\ \mathrm{A}(\mathrm{y}) & \text{si } \mathrm{y} \notin \mathcal{D} \end{cases} \qquad (4)$$

donde:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ Es el vector de variables de salida del proceso;

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}$$ Es el vector de valores nominales especificados;

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$ Es la matriz simétrica de costos;

$\mathcal{D}$ es el espacio de especificaciones de diseño, y $\mathrm{A}(\mathbf{y})$ es una función multiescalonada, es decir constante en cada región de **y** donde es admisible. A continuación se puede ver un gráfico de una Función de Pérdida de Calidad de Taguchi Multivariante:

FIGURA 6
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Función de Pérdida de calidad Bivariante

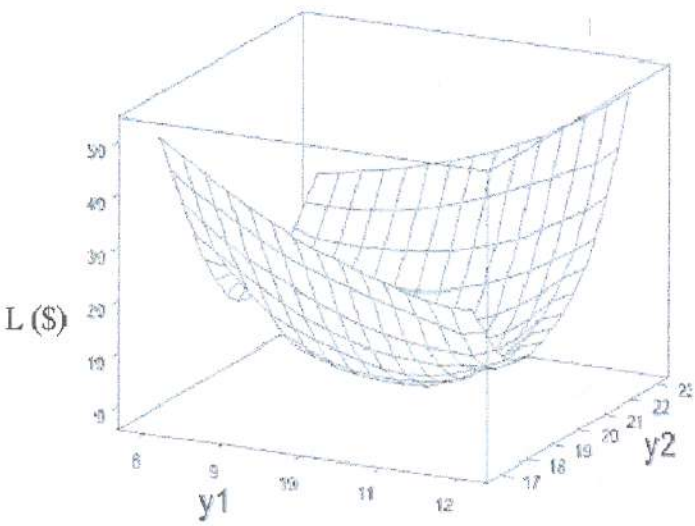
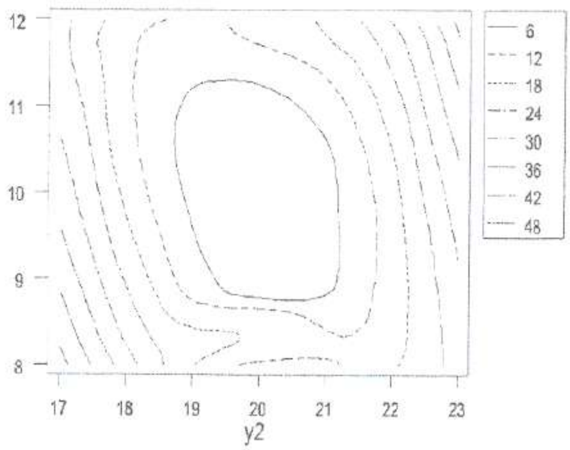


FIGURA 7
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Curvas de nivel de una Función de Perdida de Calidad Bivariante



Sin embargo, estimar la matriz **C** es un procedimiento complejo, algunos autores (Chan 2) sugieren regresión o el uso del modelo lineal general (Erdbrugge, Kuhnt 3).

Para nuestra aplicación usaremos un modelo más simple, que aunque puede no reflejar totalmente la Perdida de Calidad es mucho más manejable en la práctica. Supóngase que:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=k\cdot\mathbf{I}$$

Entonces:

$$L(\mathbf{y})=\begin{cases} k\cdot d^2(\mathbf{y},\tau) & \text{si } \mathbf{y}\in\mathcal{D} \\ A & \text{si } \mathbf{y}\notin\mathcal{D} \end{cases}$$

Donde $d(\mathbf{y},\tau)$ es la distancia euclidiana entre los vectores $\mathbf{y}$ y τ . k puede ser fácilmente calculada por el método de Taguchi:

$$A = k\Delta^2 \Rightarrow k = \frac{A}{\Delta^2} \qquad (5)$$

Donde:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \max_{\mathbf{w},\mathbf{z}\in\mathcal{D}} \{d(\mathbf{w},\mathbf{z})\}$$

7. FUNCIÓN DE PERDIDA DE CALIDAD MULTIDIMENSIONAL

En la práctica industrial la evaluación de la calidad, que determina su costo, depende del cumplimiento de muchas especificaciones, por tanto es también multidimensional, lo que significa que puede depender de varias dimensiones en diferentes puntos como sucede en la industria del ensamblaje automotriz donde se evalúa el ajuste geométrico del ensamblaje de un automóvil en múltiples puntos del mismo.

En este o en similares casos se puede usar la Función de Perdida de Calidad Multidimensional que se define así:

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} L_1(\mathbf{y}_1) \\ L_2(\mathbf{y}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_m(\mathbf{y}_m) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

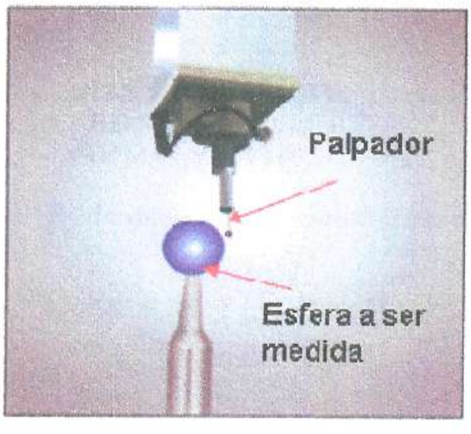
Si se definen pesos $w_1, w_2, \dots, w_m$, entonces, se puede calcular la L_t global de la siguiente manera:

$$L_t(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_m)=\sum_{i=1}^{m} w_i\cdot L_i(\mathbf{y}_i) \qquad (7)$$

8. APLICACIÓN A GENERAL MOTORS ECUADOR

Una de las partes fundamentales de un vehiculo es la carrocería, la cual soporta todo el sistema motriz, funcional, de seguridad y confort del mismo, por esto es importante implementar un sistema de análisis y control dimensional. Esto hace que sea necesario mantener un estricto control de estos parámetros. El sistema de medición consiste en un proceso de palpación de la pieza a medir con la cual se obtiene un dato (X,Y,Z). Este sistema se conoce como CMM (Coordinates Measure Machine).

FIGURA 8
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Palpador



El sistema tiene definido su propio origen de las mediciones definido como coordenada: (0,0,0) y a partir de este origen se establecen las coordenadas (x,y,z) .

FIGURA 9
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Origen de las mediciones

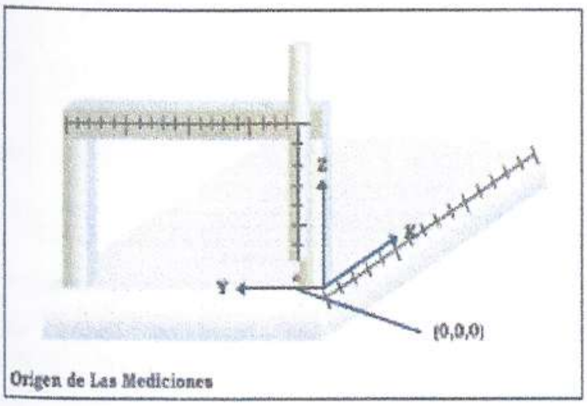


FIGURA 10
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Localuización del Palpador

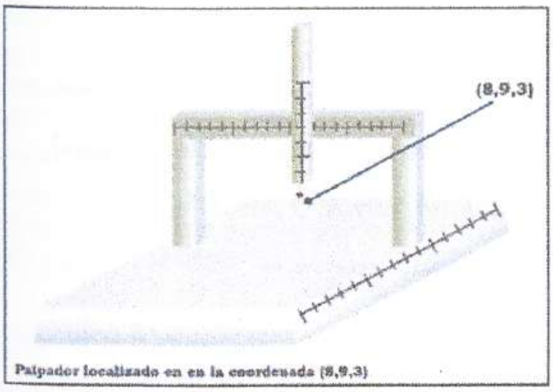


FIGURA 11
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Sala de Medición

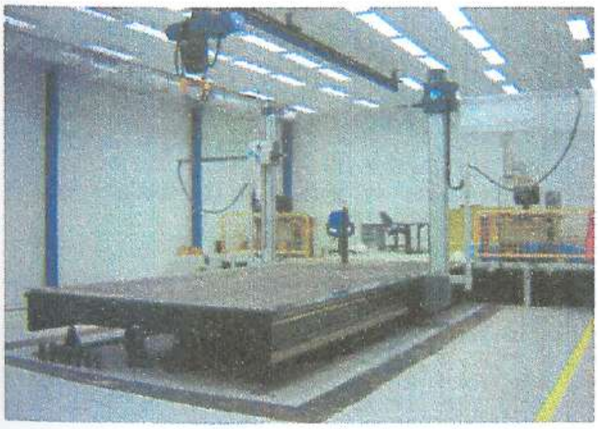
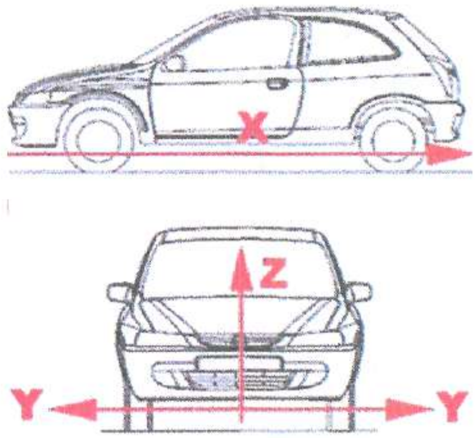


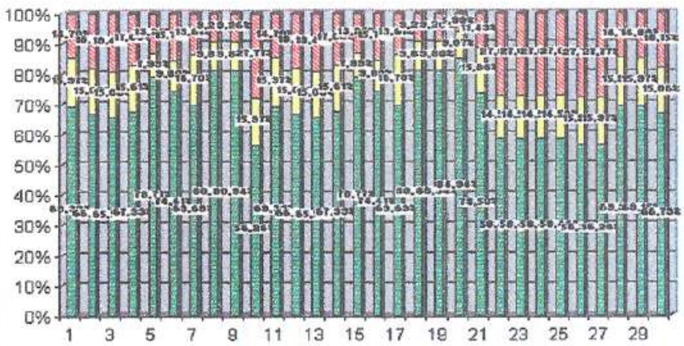
FIGURA 12
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Coordenadas



En la planta GM se han establecido varios indicadores de la calidad dimensional del ensamblaje, el principal es el siguiente, que es en realidad un conjunto de indicadores de no muy fácil lectura ni interpretación

% de puntos dentro de especificación.- % de puntos se encuentran dentro de tolerancia de +/- 1mm, presentado en la figura 13 en color verde, % de puntos que se encuentran dentro de la tolerancia de +/-1mm a +/- 1.5mm en amarillo y % de puntos que se encuentran con una desviación del valor nominal mayor a 1.5mm (inaceptable).

FIGURA 13
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
% de puntos dentro de especificación



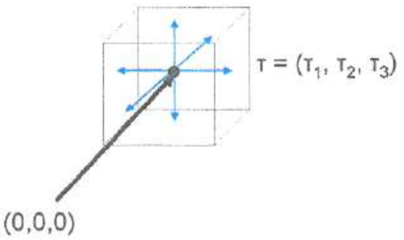
OBJETIVO		Q1	Q2	Q3	Q4
0 A 1.0 mm		45%	52%	59%	66%
1 A 1.5mm		20%	18%	16%	14%
> 1.5 mm		35%	30%	25%	20%

En vez de este indicador, se propone el uso de la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi multidimensional, obtenida por el siguiente procedimiento:

Una vez medidas las coordenadas, mediante software especializado se convierten a una hoja en Excel. Por cada carrocería se miden aproximadamente 600 coordenadas que se transforman en 200 vectores.

Sin embargo, debido a la complejidad del problema, se han fijado 20 puntos críticos en la carrocería. La distancia euclidiana para cada punto de especificación se calcula con la formula:

$$d = \sqrt{(x_1 - \tau_1)^2 + (x_2 - \tau_2)^2 + (x_3 - \tau_3)^2}$$



(8)

Donde τ es el centro del cubo que forman los límites de especificación, en los tres ejes, de las coordenadas (X,Y,Z) que conforman al vector.

El valor de K se calcula para cada punto con la fórmula:

$$k = \frac{A}{\Delta^2} = \frac{\text{costo de falta de calidad}}{\frac{1}{2}(3^2 + 3^2 + 3^2)} = \frac{\text{costo de retrabajo}}{13.5}$$

(9)

La Función de Perdida de Calidad Multidimensional se calcula a partir de los 20 puntos:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1(\mathbf{y}_1) \\ L_2(\mathbf{y}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{20}(\mathbf{y}_{20}) \end{pmatrix} \qquad (10)$$

La L_t global se calculó de la siguiente manera:

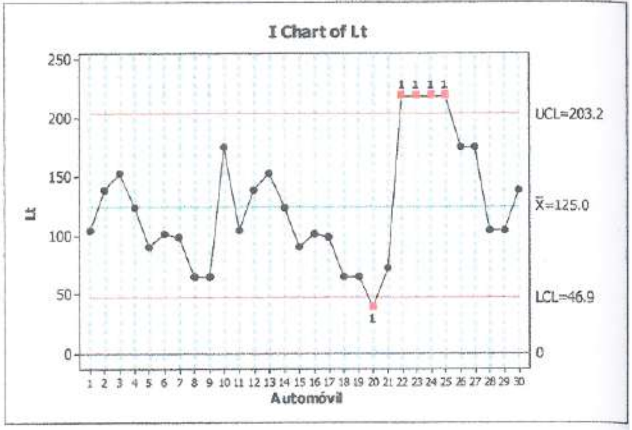
$$L_t(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{20}) = \sum_{i=1}^{20} L_i(\mathbf{y}_i) \qquad (11)$$

Este cálculo se ha realizado para cada uno de los 30 automóviles investigados (una muestra) y con estos datos construimos el siguiente gráfico de control:

FIGURA 14

Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante

Gráfico de Control de la Función de Taguchi



Por último mediante regresión lineal, se investiga la relación entre ***Lt*** y los porcentajes de rojo y amarillo.

De este análisis resultó que la variable "Amarillo" (porcentaje en amarillo) resultó altamente correlacionada con "Rojo", razón por la cual se usó solamente esta última, dándonos una regresión bastante buena con R-squared de 93.4% y valor-p=0.

FIGURA 15

Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante

Resultados de la Regresión Lineal (Minitab)

Regression Analysis: Lt versus Rojo

```
The regression equation is
Lt = - 6.23 + 761 Rojo


Predictor    Coef   SE Coef      T      P
Constant   -6.234    6.901   -0.90  0.374
Rojo       760.81    37.50   20.29  0.000


S = 13.1584   R-Sq = 93.6%   R-Sq(adj) = 93.4%


Analysis of Variance

Source          DF     SS     MS       F      P
Regression       1  71279  71279  411.67  0.000
Residual Error  28   4848    173
Total           29  76127


Sum of squares for pure error is (nearly) zero.
Cannot do pure error test.


Unusual Observations

Obs   Rojo      Lt     Fit  SE Fit  Residual  St Resid
 10  0.278  176.00  205.03    4.62    -29.03    -2.36R
 26  0.278  176.00  205.03    4.62    -29.03    -2.36R
 27  0.278  176.00  205.03    4.62    -29.03    -2.36R

R denotes an observation with a large standardized residual
```

El hecho de que las observaciones 10, 26 y 27 no se ajusten a la regresión se podría explicar porque corresponden a puntos de alta pérdida de calidad, pero no como los las carrocerías 21 a 25, a pesar de que el indicador de colores es similar, lo que podría representar que estos últimos casos son peores, lo que no se puede ver en los indicadores de colores. Esto nos induce a pensar que la función de Taguchi es mejor para evaluar la calidad, admitiéndose que se necesita de más investigación.

9. EL PROBLEMA DE LA MEZCLA ÓPTIMA DE MATERIAS Y PROVEEDORES

Este problema es un caso especial del problema general, descrito en la sección 2. En este caso las variables de decisión o de control son las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que son las cantidades de materias primas compradas a cada uno de los proveedores con costos $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Cada una de estas cantidades deben ser mayores que los valores $m_1, m_2, \ldots, m_n$ que son las cantidades mínimas que nos pueden proveer y menores que $M_1, M_2, \ldots, M_n$ que son los valores máximos que podemos obtener de los proveedores. Por ello es que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman variables intervalarias. Las variables **y** pueden depender lineal o no linealmente de las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pero deben cumplir la condición $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$.

Además se debe satisfacer una demanda d.
Por tanto, el modelo general puede ser formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i \\
\text{sujeto a:} \quad & \delta_1 \, m_1 \le x_1 \le \delta_1 \, M_1 \\
& \delta_2 \, m_2 \le x_2 \le \delta_2 \, M_2 \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \delta_n \, m_n \le x_n \le \delta_n \, M_n \\
& \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2 \text{ variables binarias} \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = d \\
& \mathbf{y(x)} \in \mathcal{D}
\end{aligned}
$$

10. EL PROBLEMA DE LA MEZCLA ÓPTIMA UTILIZANDO LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA DE CALIDAD MULTIVARIANTE

Hay varias posiblidades de incorporar la Función de Pérdida de Calidad Multivariante, la más general es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = w_1 \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i + w_2 \cdot L(\mathbf{y(x)}) \\
\text{sujeto a:} \quad & \delta_1 \, m_1 \le x_1 \le \delta_1 \, M_1 \\
& \delta_2 \, m_2 \le x_2 \le \delta_2 \, M_2 \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \delta_n \, m_n \le x_n \le \delta_n \, M_n \\
& \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2 \text{ variables binarias} \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = d \\
& \mathbf{y(x)} \in \mathcal{D}
\end{aligned}
$$

donde w_1 y w_2 son pesos arbitrariamente asignados.

11. APLICACIÓN A MEZCLAS DE MATERIAS PRIMAS Y PROVEEDORES EN LAS INDUSTRIAS DE PRODUCCIÓN METÁLICA

Las industrias de producción metálica como las que producen varillas de hierro o láminas de acero o perfiles de aluminio son un caso especial de los modelos anteriores. La especificidad consiste en que $\mathbf{y(x)} \in \mathcal{D}$ se traduce en la proporción en la que elementos como sílice, cromo, aluminio, hierro, etc. en la mezcla deben estar dentro de determinados rangos dependiendo de las especificaciones del producto. También existe un valor ideal especificado (valor nominal).

Para modelar este problema, se definen:

$$
\mathbf{USL} = \begin{pmatrix} USL_1 \\ USL_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ USL_m \end{pmatrix}; \ \mathbf{LSL} = \begin{pmatrix} LSL_1 \\ LSL_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ LSL_m \end{pmatrix}; \ \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tau_m \end{pmatrix}
$$

donde $USL_1, USL_2, \ldots, USL_m$ y $LSL_1, LSL_2, \ldots, LSL_m$ son los límites superiores e inferiores de las proporciones de contenido de cada de los elementos en la mezcla respectivamente y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ los valores ideales (nominales) de especificación. Se define:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} \qquad (12)$$

donde a_{ij} es la proporción del elemento i en la materia prima j. Por tanto:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \left[a_{i.}\right] \cdot \mathbf{x} = y_i(\mathbf{x})$$

es la cantidad total del elemento en la mezcla. Luego:

$$\begin{aligned} LSL_i &\le 1/d \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \\ &= 1/d \cdot \left[a_{i.}\right] \cdot \mathbf{x} = y_i(\mathbf{x}) \le USL_i \end{aligned}$$

De lo que se deduce que:

$$\mathbf{LSL} \le \mathbf{y(x)} = 1/d \cdot \mathbf{Ax} \le \mathbf{USL} \qquad (13)$$

Además, si se usa la función L definida con la distancia euclidiana, entonces: $L(\mathbf{y}) = k \cdot \mathrm{d}^2(\mathbf{y}, \tau)$, la cual es una función cuadrática. Se pueden definir tres modelos de optimización para resolver este problema:

MODELO 1:
Clásico de la Investigación Operativa

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \\ \text{sujeto a:} \quad & \delta_1\, m_1 \le x_1 \le \delta_1\, M_1 \\ & \delta_2\, m_2 \le x_2 \le \delta_2\, M_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \qquad\qquad\qquad (14) \\ & \cdot \\ & \delta_n\, m_n \le x_n \le \delta_n\, M_n \\ & \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2 \text{ variables binarias} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = d \\ & \mathbf{LSL} \le \mathbf{y(x)} = 1/d \cdot \mathbf{Ax} \le \mathbf{USL} \end{aligned}$$

MODELO 2:
Minimización de la Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante (Euclidiana)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = L(\mathbf{x}) = k \cdot \mathrm{d}^2(\mathbf{y}, \tau) = k \sum_{i=1}^{m} (y_i(\mathbf{x}) - \tau_i)^2 \\ \text{sujeto a:} \quad & \delta_1\, m_1 \le x_1 \le \delta_1\, M_1 \\ & \delta_2\, m_2 \le x_2 \le \delta_2\, M_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \qquad\qquad\qquad (15) \\ & \cdot \\ & \delta_n\, m_n \le x_n \le \delta_n\, M_n \\ & \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2 \text{ variables binarias} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = d \end{aligned}$$

Este es un modelo de optimización no lineal, con variables binarias (o intervalarias).

MODELO 3: Mixto

$$\begin{aligned} \min \quad z &= w_1 \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + w_2 \cdot L(\mathbf{x}) \\ &= w_1 \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + w_2 \cdot k \cdot \mathrm{d}^2(\mathbf{y}, \tau) \\ &= w_1 \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + w_2 \cdot k \sum_{i=1}^{m} (y_i(\mathbf{x}) - \tau_i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad & \delta_1\, m_1 \le x_1 \le \delta_1\, M_1 \\ & \delta_2\, m_2 \le x_2 \le \delta_2\, M_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \qquad\qquad\qquad (16) \\ & \cdot \\ & \delta_n\, m_n \le x_n \le \delta_n\, M_n \\ & \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2 \text{ variables binarias} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = d \\ & \mathbf{LSL} \le \mathbf{y(x)} = 1/d \cdot \mathbf{Ax} \le \mathbf{USL} \end{aligned}$$

Donde w_1 y w_2 son pesos arbitrariamente asignados. Este es un modelo de optimización no lineal, con variables binarias (o intervalarias).

12. EJEMPLO NUMÉRICO

Una compañía de producción de acero ha recibido una orden para producir 500 Tm de planchas de acero que serán usadas para construir buques en un astillero. Estas planchas deben tener las siguientes características (grados que son porcentajes de contenido de un elemento):

TABLA I
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Características de las planchas

Elemento Químico	*Grado Mínimo*	*Grado Máximo*	Grado Óptimo
Carbono (C)	2.0	3.0	2.5
Cobre (Cu)	0.4	0.6	0.5
Manganeso (Mn)	0.9	1.7	1.5

La compañía puede comprar hasta siete materias primas, conforme se muestra en la tabla siguiente:

TABLA II
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Características de las planchas

Materia Prima	*C%*	*Cu%*	*Mn%*	*Mínimo Disponible*	*Máximo Disponible*	Costo por TM
Iron 1	2.5	0	1.3	0	200	200
Iron 2	3	0	0.8	30	300	250
Iron 3	0	0.3	0	20	600	150
Cooper 1	0	90	0	0	500	220
Cooper 2	0	96	4	0	200	240
Aluminium 1	0	0.4	1.2	60	300	200
Aluminium 2	0	0.6	0	0	260	165

Donde mínimo y máximo disponible son las restricciones de los proveedores. Es decir algunos de ellos si nos proveen solo nos pueden vender en el rango especificado, en otros casos, ya tengo disponible el recurso en inventario, por ello el mínimo es cero. Un objetivo puede ser minimizar el costo total, para lo cual puedo utilizar el modelo clásico de la Investigación de Operaciones. Los resultados, que fueron realizados con Solver de Excel, se muestran a continuación:

FIGURA 16
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Resolución en Solver de Excel con el
MODELO1

	DESCRIPCION	C [%]	Cu [%]	Mn [%]	Al [%]	Subtotal	Fe [%]	disponibilidad x periodo MIN	disponibilidad x periodo MAX	Costo x tm [USD]	Costo Total	Cantidad [tm]	Delta	Delta MIN	Delta MAX
1	Iron 1	2.500		1.300		3.800	96.200		200	200	40000	200	1	0	200
2	Iron 2	3.000		0.800		3.800	96.200	30	300	250	41667	167	1	30	300
3	Iron 3		0.300			0.300	99.700	20	600	150	10742	72	1	20	600
4	Cooper 1		90.000			90.000	10.000		500	220	378	2	1	0	500
5	Cooper 2		96.000	4.000		100.000	0.000		200	240	0	0	0	0	0
6	Aluminium 1		0.400	1.200	98.400	100.000	0.000	60	300	200	12000	60	1	60	300
7	Aluminium 2		0.600		99.400	100.000	0.000		250	165	0	0	0	0	0
		[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]			Costo MatPrima	[illegible]	[illegible]			

	C	Cu	Mn	Al	Subtotal	Fe
Optimo	2.500	0.500	1.500		1.595	98.405
Rango	2.000	0.400	0.900			
	3.000	0.600	1.700			
Desv. Optimo	0.500	0.100	0.569			
Desv. Cuadrado	0.250	0.010	0.324		0.584	
Desv. Maxima	1.000	0.200	0.800			
Desv Max. Cuadrado	1.000	0.040	1.849		1.880	
K					29.762	
Costo Producción					50.000	

	500	Costo Lotes	[illegible]
	demanda	Costo total	[illegible]
Costo por TM	210		
Calidad/costo	559		

FIGURA 17
Aplicaciones industriales de la Función de Perdida de Calidad de Taguchi Multivariante
Resolución en Solver de Excel con el MODELO 2

	DESCRIPCION	C [%]	Cu [%]	Mn [%]	Al [%]	Subtotal	Fe [%]	disponibilidad x periodo MIN	disponibilidad x periodo MAX	Costo x tm [USD]	Costo Total	Cantidad [tm]	Delta	Delta MIN	Delta MAX
1	Iron 1	2.500		1.300		3.800	96.200		200	200	40000	200	1	0	200
2	Iron 2	3.000		0.800		3.800	96.200	30	300	250	58396	238	1	30	300
3	Iron 3		0.300			0.300	99.700	20	600	150					
4	Cooper 1		90.000			90.000	10.000		500	220			0	0	0
5	Cooper 2		96.000	4.000		100.000	0.000		200	240	580	2	1	0	200
6	Aluminium 1		0.400	1.200	98.400	100.000	0.000	60	300	200	12000	60	1	60	300
7	Aluminium 2		0.600		99.400	100.000	0.000		250	165	0	0			
		2.425	0.512	1.063		4.001	95.999			Costo MatPrima	[illegible]	[illegible]			

	C	Cu	Mn	Al	Subtotal	Fe
Optimo	2.500	0.500	1.500		1.595	98.405
Rango	2.000	0.490	0.800			
	3.000	0.600	1.700			
Desv. Optimo	0.075	0.012	0.437			
Desv. Cuadrado	0.006	0.000	0.191		0.196	
Desv. Maxima	1.000	0.200	0.800			
Desv Max. Cuadrado	1.000	0.040	0.640		1.680	
K					29.762	
Costo Producción					50.000	

	500	Costo Lotes	[illegible]
	demanda	Costo total	[illegible]
Costo por TM	224		
Calidad/costo	1 141		

En los dos modelos se ha calculado k con la siguiente fórmula:

$$k = \frac{\text{Costo de producción}}{\Delta^2} \qquad (17)$$

También hemos calculado un indicador de calidad que permite evaluar los dos modelos:

$$\text{Calidad/Costo} = \frac{\text{Costo unitario}}{d^2(\mathbf{y}, \tau)} \qquad (18)$$

El valor de este indicador es 1141 para el MODELO 2 (con la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi) mientras para el MODELO 1 (clásico) es de solo 359, lo que muesta un aumento significativo de calidad, mientras el costo por TM en la aplicación con el MODELO 2 es de 224 y con el MODELO 1 es de 210, es decir hay una variación de apenas 6.66 %, mientras la variación del indicador de calidad es del orden de 317%.

13. CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado dos aplicaciones de la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi multivariante. En la primera (General Motors- Ecuador) se presenta la Función de Pérdida de Calidad como un nuevo indicador que es probablemente mejor que los indicadores usuales de la empresa. Es evidente que se necesita una muestra mayor y también se deben investigar las correlaciones entre los puntos medidos para obtener una función más apropiada.

En la segunda aplicación se muestra como la Función de Pérdida de Calidad de Taguchi multivariante puede ayudar a tener una mejor mezcla de materias primas y proveedores en industrias donde esto es fundamental como las industrias metálicas. Esté método puede aplicarse a otro tipo de empresas como puede verse también en Pi (5), aunque en ese trabajo se utilizan otras herramientas matemáticas más simples.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **CALVACHE HUMBERTO, LARCO LUIS.** (2008). *Análisis Dimensional con el uso de herramientas estadísticas y Seis Sigma para el mejoramiento de la calidad en el proceso de ensamblaje de carrocerías. Caso de estudio: General Motors*, Proyecto de Titulación. Facultad de Ciencias Administrativas. Carrera de Ingeniería en Administración de Procesos.

[2]. **CHAN, W.M., IBRAHIM, R. N.,** (2004). "Evaluating the quality of a product with multiple quality characteristics", Internacional Journal of Advanced Manufacuring Technology.

[3]. **ERDBRUGGE, M., KUHNT, S.** "Strategies for Multi-Response Parameter Design using Loss Function and Joint Optimization Plots" working paper, Department of Statistics, University of Dormont.

[4]. **SPIRING, FRED.** (1993). "The reflected normal loss function", The Canadian Journal of Statistics, Vol 21, No. 3, pp. 321-330.

[5]. **WEI-NING PI, CHINYAO LOW.** (2004). "Supplier evaluation and selection using Taguchi loss functions", Internacional Journal of Advanced Manufacuring Technology.

[6]. **LUENBERGER, D.** (1989). *Programación lineal y no lineal.* Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, Delaware, Estados Unidos de América.

[7]. **LIEM FERRYANTO.** (2006). "Why is Quality Job No. 1", Six Sigma Forum Magazine.

[8]. http://en.wikipedia.org./wiki/Loss_function