matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2009, Vol. 7, No. 1

REGRESIÓN LATENTE EN MODELOS DE RESPUESTA AL ÍTEM LOGÍSTICOS DE TRES PARÁMETROS

Cepeda Edilberto[1], Cervantes Víctor[2]

Resumen. *Se presenta la estimación máximo-verosímil para un modelo de regresión del atributo latente de los modelos de respuesta al ítem logísticos de tres parámetros empleando conjuntamente el modelo de medida IRT. Mediante simulaciones se comparan las estimaciones de los parámetros de regresión y de varianza residual obtenidos mediante el procedimiento propuesto con los que se obtendrían bajo la regresión de las estimaciones usuales del atributo como variable de respuesta. Se encontró que el modelo propuesto proporciona mejores estimaciones puntuales de los parámetros de regresión que las obtenidas mediante la regresión usual por OLS con habilidades estimadas como variable de respuesta. Sin embargo, los errores estándar asintóticos, así como la estimación de la varianza residual resultan muy pequeños.*

Palabras clave: Regresión latente, Teoría de Respuesta al Ítem, Modelación conjunta.

1. INTRODUCCIÓN

En la investigación aplicada en ciencias sociales es frecuente encontrarse con estudios en los que el atributo de interés es medido mediante un instrumento compuesto por un conjunto de preguntas o indicadores de dicho atributo, además de otro conjunto de variables explicativas con las que se desea relacionar. En estos casos, el investigador se enfrenta con el problema de dar cuenta de la medición del atributo a través de indicadores imperfectos del mismo y de la estimación del modelo estructural que lo relaciona con las variables explicativas. Para dar cuenta del modelo de medida, la teoría moderna de los tests cuenta entre sus principales modelos con los de la teoría de respuesta al ítem (TRI). Mientras que para dar cuenta de las relaciones estructurales, es frecuente la propuesta de un modelo de regresión del atributo sobre las variables explicativas. Así, el uso de ambos modelos es una respuesta natural para dar cuenta del problema de investigación.

Frecuentemente, esta respuesta toma la forma de la utilización del modelo de medida basado en la TRI del atributo para, en un primer momento, obtener estimaciones del atributo; y en un segundo momento, emplear el modelo de regresión tomando estas estimaciones de la variable repuesta como conocidas. Esta respuesta es, en general, criticada porque las estimaciones de los coeficientes de regresión pueden resultar sesgados y sus errores estándar ser muy pequeños [Adams et al., 1997, Christensen et al., 2004]. Este sesgo se relaciona con el error de medición en el atributo [Thomas and Lu, 2005], o en términos de la teoría clásica de los tests (TCT), a que la confiabilidad del cuestionario usado para la medición del atributo no es perfecta [Adams et al., 1997].

Otra forma de dar esta respuesta se encuentra en la combinación y estimación conjunta de ambos modelos. Esta segunda aproximación se ha mostrado, en general, más apropiada en la estimación de los efectos de interés, en especial de los efectos principales de las variables explicativas [Adams et al., 1997, Mislevy, 1985, Kamata, 2001, Fox and Glas, 2001, Fox and Glas, 2003, Fox, 2004, Wang et al., 2002]. Esta segunda aproximación se ha empleado, en particular, en conjunción con los modelos TRI de ojiva normal [Fox and Glas, 2003, Fox, 2004, Fox, 2005], con los modelos TRI logísticos de la clase de modelos de Rasch para estimar simultáneamente los parámetros de dificultad del modelo de Rasch y los parámetros del modelo de regresión [Adams et al., 1997, Raudenbush et al., 2003, de Boeck and Wilson, 2004], en estudios longitudinales de calidad de vida empleando el modelo de Rasch [Bacci, 2007]; y, en menor medida, con los modelos TRI logísticos de 1, 2 o 3 parámetros para respuestas dicótomas para estimar los parámetros del modelo de regresión conjunto con un modelo TRI cuyos parámetros de ítems son conocidos [Mislevy, 1985, Cepeda C. and Peláez A., 2004, Pinto, 2006, Antal, 2007].

En la sección 2 se presenta el modelo conjunto de medida del atributo empleando modelos TRI 3-PL y de regresión sobre un conjunto arbitrario de variables explicativas. En la sección 2.1 se presenta la obtención de las ecuaciones de estimación del modelo. En la sección 3 el modelo presentado es comparado con la primera aproximación mediante simulaciones de Monte Carlo. Finalmente, en la sección 4 se ofrecen las conclusiones del estudio.

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE REGRESIÓN LATENTE

Teniendo en cuenta que en los modelos TRI 3-PL, como en los demás modelos TRI unidimensionales, la habilidad pertenece a los

[1] *Cepeda Cuervo Edilberto, Departamento de Estadística. Universidad Nacional de Colombia. (e_mail: ecepedac@unal.edu.co)*
[2] *Cervantes Víctor H., Departamento de Estadística. Universidad Nacional de Colombia. (e_mail: vhcervantesb@unal.edu.co)*

reales, la forma planteada para esta relación ha sido la de un modelo lineal de la habilidad sobre los predictores; esto es, se propone $\theta_j = X_j^t\beta + \varepsilon_j$, con $E(\varepsilon) = 0$ [Adams et al., 1997, Wang et al., 2002, Fox and Glas, 2001, Fox, 2004, Cepeda C. and Peláez A., 2004, Pinto, 2006]. En este caso, la probabilidad de que un indviduo acierte cierto ítem se puede expresar como:

$$p_{ij} : \Pr(U_{ij} = 1 \mid X_j, \beta, \varepsilon_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(X_j^t\beta + \varepsilon_j - b_i)}} \quad (1)$$

donde $\zeta_i = (a_i, b_i, c_i)$ son los parámetros conocidos de los ítems. Si, para el término ε_j se asume una distribución $g(\varepsilon_j \mid \eta)$, donde η es el vector de parámetros que describe la distribución de ε_j, entonces la probabilidad de que el individuo j acierte al ítem se puede expresar como:

$$P_{ij} := \Pr(U_{ij} = 1 \mid X_j, \beta, \eta, \zeta_i) = \int_{\Re} p_{ij}\, g(\varepsilon_j \mid \eta)\, d\varepsilon_j \quad (2)$$

mientras que la probabilidad de que dicho individuo no acierte al ítem se igual a $Q_{ij} := 1 - P_{ij}$. Así, la función de verosimilitud correspondiente a los patrones de respuesta **u** dados por una muestra de n sujetos a un conjunto I de ítems es igual a

$$L(\beta, \eta, \zeta \mid \mathrm{U} = \mathrm{u}, \mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} \quad (3)$$

donde ζ corresponde a los parámetros $\zeta_i = (a_i, b_i, c_i)$ de todos los I ítems, **u** a la matriz de respuestas observadas y **X** a la matriz de diseño de las variables explicativas conocidas. En lo subsiguiente se supondría que todos los $\varepsilon_j \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$, con lo cual η será simplemente σ^2.

Esta forma de plantear el modelo de regresión para la habilidad puede encontrarse bajo la denominación de regresión latente [Cepeda C. and Peláez A., 2004, Antal, 2007, Wilson and de Boeck, 2004]. Este caso se presenta, por ejemplo, cuando se utiliza una prueba estandarizada y calibrada mediante la TRI, por lo que se considera que los parámetros ξ de los ítems son constantes conocidas para el análisis [Mislevy et al., 1992].

2.1. ECUACIONES DE ESTIMACIÓN

Las ecuaciones de estimación de máxima verosimilitud del modelo presentado se pueden obtener al derivar el logaritmo de la función de verosimilitud (4) respecto a cada uno de los parámetros. En esta sección el vector de todos los parámetros desconocidos se denotaría por $\xi^t = (\beta^t, \sigma^2)$.

$$l(\xi) = L(\xi) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n}\left\{u_{ij}\log P_{ij} + (1 - u_{ij})\log Q_{ij}\right\} \quad (4)$$

Definiendo $p_{ij}^* = \left(1 + e^{-Da_i(X_j^t\beta + \varepsilon_j - b_i)}\right)^{-1}$ y $q_{ij}^* = 1 - p_{ij}^*$, derivando respecto a cada uno de los parámetros e igualando a 0 se obtienen las ecuaciones de verosimilitud:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_r} = D\sum_{i=1}^{I} a_i(1 - c_i)\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij}Q_{ij}}\int_{\Re} x_{jr}\, p_{ij}^* q_{ij}^*\, g(\varepsilon_j \mid \sigma^2)\, d\varepsilon_j\right\} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij}Q_{ij}}\int_{\Re}\frac{p_{ij}}{2\sigma^2}\left[\frac{\varepsilon_j^2}{\sigma^2} - 1\right] g(\varepsilon_j \mid \sigma^2)\, d\varepsilon_j\right\} = 0 \quad (6)$$

De este modo, los estimadores máximo-verosímiles se obtienen por la solución simultánea de las ecuaciones (5) y (6). La solución de estas ecuaciones se puede obtener por el método de Newton-Rhapson; por este procedimiento, la solución para la iteración n–ésima del algoritmo se define por $\hat{\xi}^{(n)} = \hat{\xi}^{(n-1)} + H^{-1}\left(\hat{\xi}^{(n-1)}\right)U\left(\hat{\xi}^{(n-1)}\right)$, donde ξ es el vector de todos los parámetros desconocidos, y $H^{-1}\left(\hat{\xi}^{(n-1)}\right)$ y $U\left(\hat{\xi}^{(n-1)}\right)$ son la inversa de la matriz hessiana y el vector de derivadas parciales en el lado izquierdo de las ecuaciones de verosimilitud en (5) y (6), respectivamente, evaluadas en las estimaciones obtenidas en la iteración $n-1$. Los elementos de la matriz hessiana $\left(H^{-1}\left(\hat{\xi}^{(n-1)}\right)\right)$ no se presentan en este documento.

2.2 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

El modelo fue implementado en el lenguaje R [R Development Core Team, 2008], junto con los paquetes maxLik y glmmML [Toomet and Henningsen, 2008, Broström, 2008]. Para la implementación del algoritmo, se reparametrizó el modelo de tal forma que los parámetros de pseudo-azar y el parámetro de la varianza tuvieran rango en $\Re$. La reparametrización se llevó a cabo con las siguientes trasformaciones 1 a 1 de los parámetros: $\gamma_i = \text{logit}(c_i)$ y $\phi = \log(\sigma^2)$.

3. RECUPERACIÓN DE PARÁMETROS

A continuación se presenta un estudio de simulación en el que se evalúa la recuperación de los parámetros originales mediante diferentes formas de realizar los análisis. Los modelos que se ajustan en las simulaciones son los siguientes:

1. Regresión por mínimos cuadrados ordinarios (OLS), sobre las variables explicativas, de las estimaciones de la habilidad obtenidas con parámetros de los ítems conocidos.
2. Regresión (OLS), sobre las variables explicativas, de las estimaciones de la habilidad obtenidas con parámetros de los ítems estimados a partir de las respuestas que producen las estimaciones de la habilidad.
3. Modelo de regresión latente con parámetros de los ítems conocidos.
4. Modelo de regresión latente con parámetros de los ítems estimados.
5. Regresión (OLS), sobre las variables explicativas, de los valores conocidos de la habilidad.

Cada uno es una posible manera de analizar de tres casos que se pueden presentar en la realidad. Los modelos 1 y 3 son posibles en el caso en que una prueba calibrada ha sido utilizada para la medición de la habilidad. Los modelos 2 y 4 son posibles en el caso en que no se conocen los parámetros de los ítems de la prueba utilizada para la medición de la habilidad. Finalmente, el modelo 5 sirve para comparar las estimaciones que se obtienen en los dos casos anteriores a partir de información indirecta, bajo el hipotético caso de conocer los valores de la habilidad.

En estas simulaciones se busca, además, evaluar la recuperación de los parámetros por cada uno de los modelos dados diferentes longitudes de prueba y tamaños de muestra.

4. PROCEDIMIENTO

Se consideró un diseño factorial con tres longitudes de prueba (I = 10,30,50) y cuatro tamaños de muestra (n = 200,400,600,800). Para cada nivel de longitud de prueba elegido se simuló una prueba de características similares tomando una muestra de parámetros de los ítems que la conforman bajo las siguientes distribuciones: a) Discriminación: $a \sim U(0.6, 1.5)$; b) Dificultad: $b \sim U(-2, 2)$, los valores simulados fueron estandarizados para facilitar la comparación de las estimaciones teniendo en cuenta la indeterminación de la escala; y c) Pseudoazar: los c_i fueron simulados a partir de una distribución uniforme discreta con masa 0.5 en los valores 0.1 y 0.2. Para cada tamaño de muestra se simuló una matriz de diseño **X** de tamaño $n \times 3$, donde cada $X_j^t = (1, x_{j,2}, x_{j,3})$, donde $X_2 \sim U(-1,1)$ y $X_3 \sim U(0,5)$. Los parámetros de regresión para todas las condiciones fueron $\beta = (0.5, -1.5, -0.2)$ y un vector de errores ε, donde cada ε_j fue simulado de una distribución normal con varianza $0.3 (\phi = \log(0.3)) = -1.20)$.

En cada una de las doce condiciones se simularon 20 réplicas de matrices de respuesta que fueron empleadas para estimar los modelos. Para los modelos 2 y 4 los parámetros de los ítems fueron estimados empleando el paquete Bilog 3.11 [Mislevy and Bock, 1997]. Todas las estimaciones de los ítems fueron trasformadas de forma que la media de las dificultades fuera cero con desviación estándar uno.

Para evaluar la recuperación de los parámetros de regresión conseguida con cada modelo se tomó la estimación de Monte Carlo del sesgo y del error cuadrático medio (ECM) de cada coeficiente y de la varianza residual en cada una de las doce condiciones; además, se obtuvo la proporción de réplicas para las cuales el intervalo aproximado del 95% de confianza incluyó al parámetro de interés; este intervalo se obtuvo para cada replica como $\hat{\beta}_i \pm z_{1-\alpha/2} SE(\hat{\beta}_i)$, donde α se fijó en 0.05; el error estándar se obtuvo a partir de $\widehat{Var}(\xi) = -H^{-1}(\xi)$.

5. RESULTADOS

En la Tabla I se presentan las medias de las estimaciones obtenidas de los parámetros de regresión, el error estándar, el ECM y la proporción de inclusión en el intervalo de confianza para los parámetros en cada condición mediante cada uno de los modelos. En la Tabla II se presentan las medias de las estimaciones y el ECM del parámetro ϕ.

Se puede apreciar que las estimaciones obtenidas por OLS empleando estimaciones de la habilidad presentan el mayor sesgo en la estimación de los parámetros de la regresión, mientras que las estimaciones obtenidas por el modelo de regresión latente son mucho más cercanas a los parámetros originales, y las estimaciones obtenidas por OLS empleando los valores conocidos de las habilidades parecen insesgados.

También es posible observar que las estimaciones del modelo de regresión latente son muy cercanas a las estimaciones del modelo OLS con habilidades conocidas. Lo anterior ocurre especialmente cuando los parámetros de los ítems son conocidos, y parece que las estimaciones por regresión latente son también insesgadas. Además, puede verse que el sesgo de las estimaciones OLS empleando estimaciones de la habilidad se reduce a medida que se incrementa el tamaño de la muestra, aun cuando todavía parece considerable para longitudes de prueba de 50 ítems.

En cuanto a las estimaciones del modelo de regresión latente empleando valores estimados de los parámetros de los ítems, sobresale que la estimación del intercepto es más cercana a la obtenida mediante la estimación OLS con habilidades estimadas y que parece mostrar un sesgo que no disminuye con mayores tamaños de muestra ni mayores longitudes de prueba.

Relacionado directamente con el sesgo mostrado previamente, se evidencia que las estimaciones mediante el modelo OLS empleando estimaciones de la habilidad presenta el mayor ECM, aunque para longitudes de prueba de 30 o más y parámetros de los ítems conocidos éste es tan pequeño como en los otros casos. El ECM para las estimaciones obtenidas por el modelo de regresión latente resulta sólo ligeramente mayor que el obtenido mediante el modelo OLS con habilidades conocidas.

En cuanto a las proporciones de inclusión encontradas a partir de las 20 réplicas de cada condición mediante la estimación OLS con habilidades conocidas, parece corresponder con la proporción nominal del 95%, mientras que mediante los otros modelos no parece ser así en todos los casos.

Mediante el modelo OLS empleando estimaciones de la habilidad como variable de respuesta cuando los ítems son conocidos, la proporción de inclusión del intercepto parece corresponder al valor nominal; sin embargo, para los otros parámetros de regresión se observa una clara subcobertura del parámetros que se corrige a medida que aumenta la longitud de la prueba. Mediante el modelo OLS que emplea estimaciones de la habilidad a partir de las estimaciones de los ítems, se presenta también una subcobertura del parámetro que parece corregirse a medida que aumenta la longitud de la prueba, aunque en la prueba de longitud 50 es aún bastante grande.

Con respecto a la cobertura de los intervalos obtenidos para los modelos de regresión latente parece haber una ligera subcobertura de los parámetros cuando los ítems son conocidos. La subcobertura de los parámetros parece, además, acentuarse en este caso cuando se incrementa la longitud de prueba. En cambio, cuando los parámetros de los ítems han sido estimados, la cobertura obtenida mediante el modelo de regresión latente es especialmente baja para el intercepto. Mediante este modelo también presenta subcobertura de los otros parámetros de regresión; sin embargo, en este caso ésta no parece disminuir ni aumentar a medida que se aumentan la longitud de la prueba o el tamaño de la muestra.

Respecto a la estimación de la varianza residual del modelo se puede apreciar que la estimación mediante el modelo OLS con habilidades conocidas sobreestima la varianza de forma consistente para los diferentes tamaños de muestra y longitudes de prueba. Los modelos OLS con habilidades estimadas sobre estiman la varianza, pero este sesgo disminuye a medida que se incrementa la longitud de prueba aproximándose a la estimación obtenido por el modelo OLS con habilidades conocidas. Por su parte, mediante los modelos de regresión latente subestiman la varianza residual, y parece que este sesgo no disminuya con el aumento del tamaño de la muestra o la longitud de prueba.

Los errores cuadráticos medios reflejan lo observado en cuanto al sesgo presentado por cada uno de los modelos para la estimación de la variabilidad residual.

6. CONCLUSIONES

Mediante las simulaciones realizadas se ha encontrado que el modelo de regresión latente propuesto proporciona estimaciones aparentemente insesgadas de los parámetros estructurales de interés. Tanto en el caso en que los parámetros de los ítems son conocidos como en el que no, el modelo de regresión latente supera a la alternativa de emplear estimaciones de la habilidad como variable de respuesta del modelo de regresión usual mediante mínimos cuadrados. Sin embargo, a diferencia de estudios anteriores empleando el modelo de Rasch, [Adams et al., 1997, Christensen et al., 2004] no se encontró que los errores estándar de estos últimos fueran muy pequeños; en cambio, los errores estándar obtenidos para el modelo de regresión latente sí fueron muy pequeños produciendo una subcobertura de los parámetros reales.

Por lo anterior, es claro que cuando el objetivo es aproximarse a la relación entre la habilidad y las variables explicativas, lo recomendable es emplear el modelo de regresión latente, incluso cuando los parámetros de los ítems de la prueba que permite evaluar la habilidad son desconocidos. Sin embargo, si el objetivo es decidir si la relación entre una variable explicativa y la habilidad es significativa, debe procederse con prudencia, especialmente en el caso en que los parámetros de los ítems no son conocidos pero han sido estimados en la misma muestra, pues las bajas proporciones de cobertura indican que la probabilidad de cometer un error tipo I en estos casos se ve incrementada por encima del valor nominal.

TABLA I

Regresión latente en modelos de respuesta al ítem logísticos de tres parámetros

Recuperación de los parámetros de regresión

			β_0				β_1				β_2			
Modelo	Longitud	Muestra	$\hat{\beta}$	SE	CME	% IC	$\hat{\beta}$	SE	CME	% IC	$\hat{\beta}$	SE	CME	% IC
1	10	200	0.58	0.23	0.05	0.95	−2.45	0.44	1.01	0.50	−0.34	0.10	0.03	0.70
		400	0.59	0.17	0.03	1.00	−2.50	0.30	1.11	0.15	−0.34	0.07	0.03	0.35
		600	0.57	0.14	0.02	0.95	−2.52	0.24	1.11	0.00	−0.33	0.06	0.02	0.35
		800	0.60	0.13	0.02	0.90	−2.59	0.21	1.24	0.00	−0.34	0.05	0.02	0.10
	30	200	0.51	0.11	0.02	0.85	−1.74	0.22	0.10	0.85	−0.23	0.05	0.00	0.90
		400	0.53	0.09	0.01	0.95	−1.80	0.16	0.10	0.55	−0.23	0.04	0.00	0.95
		600	0.56	0.07	0.01	0.90	−1.73	0.12	0.06	0.50	−0.25	0.03	0.00	0.70
		800	0.56	0.07	0.01	0.85	−1.75	0.11	0.06	0.45	−0.24	0.03	0.00	0.70
	50	200	0.56	0.10	0.01	0.95	−1.66	0.19	0.07	0.80	−0.24	0.04	0.00	0.85
		400	0.53	0.07	0.00	1.00	−1.60	0.13	0.02	0.95	−0.22	0.03	0.00	1.00
		600	0.55	0.06	0.01	0.85	−1.61	0.10	0.02	0.90	−0.23	0.03	0.00	0.85
		800	0.52	0.05	0.00	0.95	−1.66	0.09	0.03	0.65	−0.22	0.02	0.00	0.75
2	10	200	0.09	0.24	0.22	0.70	−2.55	0.46	1.24	0.45	−0.35	0.10	0.03	0.65
		400	0.05	0.18	0.23	0.25	−2.59	0.32	1.30	0.10	−0.35	0.07	0.03	0.40
		600	0.05	0.15	0.23	0.20	−2.61	0.25	1.30	0.00	−0.35	0.06	0.03	0.30
		800	0.12	0.13	0.16	0.15	−2.72	0.22	1.52	0.00	−0.35	0.06	0.03	0.15
	30	200	0.29	0.12	0.07	0.65	−1.77	0.24	0.12	0.85	−0.23	0.05	0.00	0.90
		400	0.34	0.10	0.04	0.60	−1.89	0.17	0.17	0.35	−0.24	0.04	0.00	0.85
		600	0.38	0.08	0.02	0.65	−1.84	0.14	0.13	0.25	−0.27	0.04	0.01	0.55
		800	0.35	0.07	0.03	0.45	−1.89	0.12	0.17	0.15	−0.26	0.03	0.00	0.45
	50	200	0.40	0.11	0.01	0.95	−1.69	0.21	0.10	0.80	−0.24	0.05	0.00	0.85
		400	0.37	0.08	0.02	0.60	−1.66	0.14	0.05	0.85	−0.23	0.03	0.00	0.80
		600	0.39	0.07	0.02	0.65	−1.69	0.11	0.04	0.70	−0.24	0.03	0.00	0.70
		800	0.37	0.06	0.02	0.40	−1.78	0.10	0.09	0.25	−0.24	0.03	0.00	0.65
3	10	200	0.54	0.15	0.03	0.85	−1.45	0.22	0.04	1.00	−0.20	0.05	0.00	0.85
		400	0.53	0.10	0.01	0.95	−1.47	0.15	0.04	0.90	−0.20	0.04	0.00	0.95
		600	0.52	0.08	0.01	0.90	−1.48	0.12	0.02	0.90	−0.20	0.03	0.00	0.90
		800	0.53	0.07	0.01	0.85	−1.51	0.11	0.01	0.90	−0.20	0.03	0.00	0.95
	30	200	0.50	0.08	0.01	0.75	−1.51	0.12	0.03	0.90	−0.19	0.03	0.00	0.85
		400	0.51	0.06	0.01	0.85	−1.53	0.09	0.01	0.90	−0.19	0.02	0.00	0.75
		600	0.53	0.05	0.00	0.85	−1.48	0.07	0.01	0.90	−0.21	0.02	0.00	0.85
		800	0.52	0.04	0.00	0.90	−1.50	0.06	0.01	0.70	−0.20	0.01	0.00	0.85
	50	200	0.61	0.07	0.02	0.60	−1.54	0.10	0.04	0.65	−0.22	0.02	0.00	0.65
		400	0.55	0.05	0.01	0.50	−1.49	0.07	0.01	0.85	−0.20	0.02	0.00	0.95
		600	0.54	0.04	0.01	0.60	−1.49	0.06	0.01	0.85	−0.21	0.01	0.00	0.70
		800	0.54	0.03	0.00	0.65	−1.54	0.05	0.01	0.80	−0.20	0.01	0.00	0.75
4	10	200	0.38	0.12	0.04	0.60	−1.32	0.20	0.08	0.80	−0.18	0.04	0.00	0.85
		400	0.35	0.08	0.03	0.60	−1.36	0.14	0.07	0.70	−0.18	0.03	0.00	0.90
		600	0.34	0.07	0.04	0.45	−1.36	0.11	0.05	0.60	−0.18	0.03	0.00	0.80
		800	0.38	0.06	0.02	0.50	−1.43	0.10	0.03	0.70	−0.19	0.02	0.00	0.90
	30	200	0.34	0.07	0.05	0.40	−1.35	0.11	0.06	0.65	−0.17	0.02	0.00	0.60
		400	0.35	0.05	0.03	0.20	−1.44	0.08	0.02	0.80	−0.18	0.02	0.00	0.75
		600	0.39	0.04	0.02	0.45	−1.42	0.07	0.01	0.80	−0.20	0.02	0.00	0.90
		800	0.37	0.04	0.02	0.15	−1.44	0.06	0.01	0.55	−0.20	0.01	0.00	0.90
	50	200	0.44	0.06	0.01	0.65	−1.45	0.09	0.04	0.55	−0.21	0.02	0.00	0.65
		400	0.40	0.04	0.02	0.40	−1.44	0.07	0.02	0.60	−0.19	0.02	0.00	0.85
		600	0.43	0.04	0.01	0.50	−1.47	0.06	0.01	0.80	−0.21	0.01	0.00	0.70
		800	0.40	0.03	0.01	0.25	−1.54	0.05	0.01	0.75	−0.20	0.01	0.00	0.75
5	10	200	0.50	0.07	0.00	0.95	−1.49	0.14	0.02	0.95	−0.20	0.03	0.00	0.95
		400	0.49	0.05	0.00	1.00	−1.50	0.10	0.01	1.00	−0.19	0.02	0.00	0.95
		600	0.50	0.04	0.00	0.85	−1.52	0.08	0.00	1.00	−0.20	0.02	0.00	0.90
		800	0.51	0.04	0.00	1.00	−1.50	0.07	0.00	0.95	−0.20	0.02	0.00	1.00
	30	200	0.50	0.07	0.01	0.85	−1.50	0.14	0.03	0.90	−0.20	0.03	0.00	0.85
		400	0.50	0.05	0.00	0.95	−1.52	0.10	0.01	1.00	−0.20	0.02	0.00	0.95
		600	0.50	0.04	0.00	1.00	−1.48	0.08	0.01	0.95	−0.20	0.02	0.00	1.00
		800	0.50	0.04	0.00	1.00	−1.49	0.07	0.01	0.95	−0.20	0.02	0.00	1.00
	50	200	0.54	0.07	0.00	1.00	−1.51	0.14	0.01	1.00	−0.22	0.03	0.00	0.90
		400	0.51	0.05	0.00	0.95	−1.48	0.10	0.01	1.00	−0.20	0.02	0.00	0.95
		600	0.53	0.05	0.00	0.95	−1.49	0.08	0.00	1.00	−0.21	0.02	0.00	1.00
		800	0.51	0.04	0.00	1.00	−1.52	0.07	0.01	0.95	−0.20	0.02	0.00	0.95

TABLA II

Regresión latente en modelos de respuesta al ítem logísticos de tres parámetros

Recuperación de ϕ

			phi	
Modelo	Longitud	Muestra	$\hat{\phi}$	CME
1	10	200	0.55	3.09
		400	0.54	3.03
		600	0.54	3.04
		800	0.54	3.04
	30	200	−0.15	1.12
		400	−0.09	1.24
		600	−0.12	1.18
		800	−0.11	1.20
	50	200	−0.27	0.87
		400	−0.31	0.81
		600	−0.30	0.81
		800	−0.30	0.82
2	10	200	0.60	3.24
		400	0.59	3.22
		600	0.59	3.21
		800	0.59	3.22
	30	200	−0.06	1.31
		400	−0.00	1.45
		600	−0.02	1.42
		800	0.01	1.48
	50	200	−0.20	1.01
		400	−0.21	0.98
		600	−0.21	1.00
		800	−0.18	1.05
3	10	200	−2.99	4.22
		400	−2.78	3.46
		600	−2.54	2.92
		800	−2.77	3.32
	30	200	−2.64	3.17
		400	−2.20	2.32
		600	−2.13	2.02
		800	−2.13	2.15
	50	200	−2.81	3.80
		400	−2.31	2.72
		600	−1.78	1.18
		800	−2.50	3.03
4	10	200	−2.11	2.57
		400	−2.00	2.05
		600	−2.59	3.28
		800	−2.11	2.13
	30	200	−2.59	3.09
		400	−1.66	1.10
		600	−2.15	2.16
		800	−1.66	1.13
	50	200	−2.29	2.56
		400	−2.00	1.99
		600	−2.02	2.01
		800	−2.01	1.96
5	10	200	−0.60	0.37
		400	−0.61	0.36
		600	−0.61	0.36
		800	−0.61	0.35
	30	200	−0.60	0.37
		400	−0.59	0.37
		600	−0.61	0.35
		800	−0.59	0.37
	50	200	−0.61	0.36
		400	−0.60	0.37
		600	−0.60	0.37
		800	−0.61	0.36

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **MISLEVY, R. J.** (1985) Estimation of latent group effects. *Journal of the American Statistical Association*, 80(392):993–997.

[2]. **MISLEVY, R. J. ET AL.** (1992) Estimating population characteristics from sparse matrix samples of item responses. *Journal of Educational Measurement*, 29(2):133–161.

[3]. **ADAMS, R. J., WILSON, M., & WU, M.** (1997) Multilevel item response models: An approach to errors in variables regression. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 22:47–76.

[4]. MISLEVY, R. J. & BOCK, R. D. BILOG 3 for windows.

[5]. FOX, J.-P. & GLAS, C. A.W. (2001) Bayesian estimation of a multilevel IRT model using Gibbs sampling. *Psychometrika*, 66(2):271–288.

[6]. KAMATA, A. (2001) Item analysis by the hierarchical generalized linear model. *Journal of Educational Measurement*, 38(1):79–93.

[7]. WANG, C., DOUGLAS, J., & ANDERSON, S. (2002) Item response models for Joint analysis of quality of life and survival. *Statistics in Medicine*, 21:129–142.

[8]. FOX, J.-P. & GLAS, C. A.W. (2003) Bayesian modeling of measurement error in predictor variables using item response theory. *Psychometrika*, 68:169–191.

[9]. RAUDENBUSH, S. W., JOHNSON, C., & SAMPSON, R. J. (2003) A multivariate, multilevel Rasch model with application to self-reported criminal behavior. *Sociological Methodology*, 33:169–211.

[10]. CEPEDA C., E. & PELA´ EZ A., J. M. (2004) Modeling abilities in 3-IRT models. *Revista Colombiana de Estadística*, 27(1):27–41.

[11]. CHRISTENSEN, K. B. ET AL. (2004) Latent regression in log linear Rasch models. *Communications in statistics: Theory and Methods*, 33(6):1295–1313.

[12]. PAUL DE BOECK & MARK WILSON, (ED.) (2004) *Explanatory Item Response Models: A Generalized Linear and Nonlinear Approach*. Springer-Verlag, New York.

[13]. FOX, J.-P. (2004) Applications of multilevel IRT modeling. *School Effectiveness and School Improvement*, 15:261–280.

[14]. WILSON, M. & DE BOECK, P. (2004) Descriptive and explanatory item response models. In Paul de Boeck and Mark Wilson, editors, *Explanatory Item Response Models: A Generalized Linear and Nonlinear Approach*, pages 43–74. Springer-Verlag, New York.

[15]. FOX, J.-P. (2005) Multilevel IRT using dichotomous and polytomous response data. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 58:145–172.

[16]. THOMAS, D. R. & LU, I. R. R. Two-step regression with latent variables, revisited. Proceedings of Statistics Canada Symposium 2005 - Methodological Challenges for Future Information Needs.

[17]. PINTO HEYDLER, M. Teoría de respuesta al item: Estimaci´on y modelaci´on. 2006.

[18]. ANTAL, T. On the latent regression model of Item Response Theory. Technical Report RR-07-12, Educational Testing Service, USA.

[19]. BACCI, S. (2007) Analysis of longitudinal HrQoL using latent regression in the context of Rasch modelling. In Catherine Huber, Nikolaos Limnios, Mounir Mesbah, and Mikhail Nikulin, editors, *Mathematical Methods in Survival analysis, reliability and Quality of Life*. Wiley-ISTE, Inglaterra.

[20]. BROSTRÖM, G. *glmmML: Generalized linear models with clustering*. R package version 0.72-0.

[21]. R DEVELOPMENT CORE TEAM (2008): *A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL http://www.R-project.org.

[22]. TOOMET, O. & HENNINGSEN, A. (2008). *maxLik: Maximum Likelihood Estimation.*

[23]. URL http://CRAN.Rproject.org,http://www.maxLik.org. R package version 0.5-2.