matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2005, Vol. 3, No. 2

USO DE TRAZADORES CÚBICOS EN LOS MODELO ACTUARIALES DE RENTAS VITALICIAS FRACCIONADAS

Sandoya Fernando[1]

Resumen: *Una de las principales áreas de las matemáticas actuariales es el cálculo de los valores actuariales de las denominadas rentas de sobrevivencia, es decir de pagos periódicos fijos o variables realizados a un individuo de edad x bajo ciertas condiciones mientras este permanece vivo. Cuando los pagos son anuales, estos valores actuariales pueden expresarse sin mucha complicación en términos de los símbolos de conmutación, pero si los pagos tienen una frecuencia infra anual se deben desarrollar modelos que aproximen el valor actuarial de estos pagos periódicos en términos de los modelos de frecuencia anual. En la literatura se reportan modelos de aproximación que usan interpolación lineal, en este trabajo se establece el uso de trazadores cúbicos (Spline) como una aproximación más precisa de estos valores actuariales.*

Palabras clave: Matemáticas actuariales, Rentas de sobrevivencia fraccionadas, Trazadores cúbicos.

1. INTRODUCCIÓN

Dada una persona de edad x, representada con (x), una renta vitalicia es una sucesión de pagos que se realizan de manera periódica, en general anual, mientras el sujeto viva o se cumplan las estipulaciones del contrato. Se denominan prepagables o anticipadas si el pago se realiza al inicio de cada período y se denominan post pagables o vencidas cuando los pagos se realizan al final de cada período. En el caso de periodicidad anual, estas pueden ser expresadas en términos de los denominados símbolos de conmutación.

Por ejemplo, una *Renta vitalicia, anual, unitaria, inmediata, anticipada y temporal por n años para* (x), es una sucesión de pagos anuales de 1 unidad monetaria (u.m.), pagaderos a un individuo de edad *x* al inicio de cada año por n años o hasta que fallezca, lo que suceda primero.

El valor actual de estos pagos es representado con:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\begin{cases}\ddot{a}_{\overline{t}|} & ;\text{ con probabilidad } {}_{t-1/}q_x \quad t=0,1,\dots,n-1\\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & ;\text{ con probabilidad } {}_{n-1/}p_x\end{cases}$$

Y su valor actuarial, que no es otra cosa que el valor esperado del valor actual, sería:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=E\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)=\left(\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t-1/}q_x\,\ddot{a}_{\overline{t}|}\right)+\ddot{a}_{\overline{n}|}\;{}_{n-1}p_x$$

Que en términos de los símbolos de conmutación se puede calcular como:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$$

Y, para una *Renta vitalicia, anual, unitaria, anticipada de vida completa*, que no es otra cosa que una sucesión periódica de pagos anuales, al inicio de cada año, mientras el asegurado viva, el valor actual de los pagos se representa con: $\ddot{a}_x$ y es igual a:

$$\ddot{a}_x=\ddot{a}_{\overline{t}|}\quad\text{con probabilidad}\quad{}_{t-1/}q_x;\ t=0,1,2,\dots$$

Y así, su valor actuarial es:

$$\ddot{a}_x=E\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)=\sum_{t=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{t}|}\,{}_{t-1/}q_x$$

Lo que es expresado en términos de los símbolos de conmutación como:

$$\ddot{a}_x=E\left(\ddot{a}_x\right)=\sum_{t=0}^{\infty}{}_tE_x=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_x}{D_x}$$

Para el desarrollo detallado de esta expresión se puede revisar: "*Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros*",2005 Sandoya F., ESPOL

2. RENTAS VITALICIAS FRACCIONADAS

Además de las rentas vitalicias pagaderas anualmente, también hay que considerar el caso en que estas no se pagan anualmente, sino mensualmente, trimestralmente, etc., a este tipo de rentas se las denomina rentas fraccionadas.

Por ejemplo, para una renta fraccionada vitalicia (pagadera mientras sobrevive la persona) de 1/m u.m. al final de cada m-ésima fracción del año (vencida) inmediata, su valor actuarial es:

$$a_x^{(m)}=\frac{1}{m}\left[{}_{1/m}E_x+{}_{2/m}E_x+\dots+{}_{m+1/m}E_x+\dots\right]$$

[1] Sandoya Fernando, M.Sc., Profesor Agregado de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: fsandoya@espol.edu.ec)

Que se puede expresar como:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{m} {}_{n+t/m}E_x$$

Si usamos interpolación lineal para aproximar ${}_{n+t/m}E_x$, se tiene:

$${}_{n+t/m}E_x \cong {}_{n}E_x + \frac{t}{m}\left[{}_{n+1}E_x - {}_{n}E_x\right]$$

$$\Rightarrow a_x^{(m)} \cong \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{m} {}_{n}E_x + \frac{t}{m}\left[{}_{n+1}E_x - {}_{n}E_x\right]$$

Y resolviendo las sumas se obtiene fácilmente que:

$$a_x^{(m)} \cong a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Es decir la renta fraccionada es aproximadamente igual a la renta anual más un término de aproximación. Cabe indicar que el esquema de interpolación lineal usado es el más simple que se podría plantear; sería más preciso, pero a la vez más complejo llegar a un modelo que incluya mejores técnicas de interpolación como el uso de trazadores cúbicos usados en este trabajo, o a través del desarrollo en diferencias finitas de las funciones consideradas, con lo cual se obtienen las denominadas Fórmulas de Woolhouse.

3. USO DE TRAZADORES CÚBICOS EN EL ANÁLISIS DE RENTAS FRACCIONADAS

Como se mostró antes, en la literatura actuarial en general, se han establecido los valores de las rentas fraccionadas a través de interpolación lineal segmentaria, con lo cual se realizan las aproximaciones respectivas de los símbolos de conmutación que solo se conocen para edades enteras. Sin embargo, la aplicación de este tipo de interpolación, si bien es sencilla, tiene el inconveniente de que produce resultados un tanto imprecisos, y además lleva a situaciones como las de "no suavidad" de las funciones biométricas. En la actualidad en Análisis Numérico se disponen de modernas técnicas de interpolación, tales como los trazadores cúbicos o Splines, las cuales han sido incorporadas en este trabajo al tratamiento de rentas fraccionadas, y que por tanto permiten obtener resultados mas precisos.

El inconveniente de usar estas técnicas de interpolación más sofisticadas es que en cambio ya no se puede establecer una expresión explícita para los valores de las rentas, y hay que implementar su cálculo en un programa informático.

A continuación se determinan los valores que se obtienen de las primas fraccionadas con el uso de trazadores cúbicos naturales

3.1 INTERPOLACIÓN DE TRAZADORES CÚBICOS

Se conoce por el teorema de Weierstrass para funciones continuas que se puede aproximar, en un intervalo cerrado, cualquier función contínua, con la precisión que se quiera, por medio de un polinomio de cierto grado, es decir, a través del polinomio de interpolación de lagrange. Sin embargo, la naturaleza oscilatoria de los polinomios de alto grado y la propiedad de que una fluctuación en una parte pequeña de intervalo puede ocasionar importantes distorsiones en todo su dominio, limita su utilización o hace al resultado poco real.

Un procedimiento alterno consiste en dividir el intervalo en una serie de subintervalos, y en cada subintervalo construir un polinomio diferente de aproximación. A esta forma de aproximar por medio de funciones se le conoce como *aproximación polinómica segmentaria.*

La aproximación polinómica segmentaria más simple es la interpolación lineal segmentaria que consiste en unir una serie de puntos (datos):

$$\left\{(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\ldots\ldots,(x_n,f(x_n))\right\}$$

mediante una serie de segmentos de rectas. Obsérvese que esto es lo que se hizo en el paragrafo 2 para hallar el valor actuarial de una renta fraccionada vitalicia.

La aproximación por funciones lineales ofrece una desventaja: no se tiene la seguridad de que haya diferenciabilidad en los extremos de los subintervalos, lo cual dentro de un contexto geométrico significa que la función interpolante no es "suave" en dichos puntos. A menudo las condiciones físicas y biológicas indican claramente que se requiere esa condición y que la función aproximada debe ser continuamente diferenciable, en particular en el contexto que estamos tratando, las funciones biorúticas deben ser suaves por naturaleza.

Otro procedimiento consiste en emplear un polinomio fragmentario del tipo Hermite. Por ejemplo, si los valores de la función f y de f ' se conocen en los puntos $x_0 < x_1 < \ldots x_n$, podemos emplear un polinomio de Hermite de grado tres en cada uno de los subintervalos $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots\ldots\ldots,[x_{n-1},x_n]$ para obtener una función continuamente diferenciable en el intervalo $[x_0,x_n]$. Si queremos determinar el polinomio cúbico de Hermite apropiado en determinado intervalo, basta calcular $H_3(x)$ para ese intervalo. Puesto que los polinomios interpolantes de Lagrange necesarios para calcular H_3, son de primer grado, podemos hacer el cálculo sin gran dificultad. Sin embargo, para utilizar los polinomios fragmentarios de Hermite en la interpolación general, necesitamos conocer la derivada de la función que va a ser aproximada, lo cual, como en el caso de los símbolos de conmutación que solo se conocen para edades enteras, muchas veces no es posible.

En lo que resta de este sección estudiaremos la aproximación por medio de polinomios fragmentarios que no requieren información sobre la derivada, salvo, quizá, en los extremos del intervalo donde se aproxima la función.

La aproximación polinómica fragmentaria más común utiliza polinomios cúbicos entre cada par consecutivo de nodos y recibe el nombre de *interpolación de trazadores cúbicos*. Un polinomio cúbico general contiene cuatro constantes; así pues, el procedimiento del trazador cúbico ofrece suficiente flexibilidad para garantizar que el interpolante no sólo sea continuamente diferenciable en el intervalo, sino que además tenga una segunda derivada continua en el intervalo. Sin embargo, en la construcción del trazador cúbico no se supone que las derivadas del interpolante concuerdan con las de la verdadera función, ni siquiera en los nodos x_i.

3.2 EL TRAZADOR CÚBICO NATURAL

Dada una función f definida en [a, b] y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ un *interpolante de trazador cúbico* S para f es una función que cumple con las condiciones siguientes:

a) S(x) es un polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada j = 0,1,...,n- 1;
b) $S(x_j) = f(x_j)$ para cada j = 0, 1,..., n;
c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada j = 0, 1,..., n-2;
d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$para cada j=0, 1,...,n-2;
e) $S''_{j+1}(x_{j+1})=S''_j(x_{j+1})$para cada j=0, 1,...,n-2;
f) Se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones de frontera:
   i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (*Frontera libre o natural*)
   ii) $S'(x_0) = f(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (*Frontera sujeta*)

Aunque los trazadores cúbicos se definen con otras condiciones de frontera, las condiciones anteriores son suficientes en este caso. Cuando se presentan las condiciones de frontera libre, el trazador recibe el nombre de *trazador natural*, y su gráfica se aproxima a la forma que adoptaría una varilla larga y flexible si la hiciéramos pasar por los puntos (datos):

$$\{(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),.......,(x_n,f(x_n))\}$$

En términos generales, en las condiciones de frontera sujeta se logran aproximaciones más exactas ya que abarcan más información acerca de la función. Pero para que se cumpla este tipo de condición de frontera, se requiere tener los valores de la derivada en los extremos o bien una aproximación precisa de ellos.

Si queremos construir el interpolante del trazador cúbico de determinada función f, aplicamos las condiciones de la definición a los polinomios cúbicos.

$$S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2+d_j(x-x_j)^3$$

Para cada j = 0,1,...,n-1.

Puesto que los términos $(x_{j+1}-x_j)$ se utilizarán varias veces en este desarrollo, conviene introducir la notación más simple:

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

Para cada j =0,1,...n-1.si también definimos $a_n = f(x_n)$, entonces del sistema de ecuaciones:

$$h_{j-1}c_{j-1}+2(h_{j-1}+h_j)c_j+h_jc_{j+1}=\frac{3}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{3}{h_{j-1}}(a_j-a_{j-1})\text{P}$$

ermite hallar los valores de los coeficientes c_j. para cada j = 1,2,...,n−1. Nótese que este sistema contiene solo $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, como incógnitas, ya que los valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y de $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ están dados por el espaciado de los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ y los valores de f en estos.

Una vez que se conocen los valores de $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, se pueden encontrar el resto de las constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ y de $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ a partir de las ecuaciones:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_jh_j$$

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

Con lo cual quedan determinados los polinomios cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$.

3.3 IMPLEMENTACIÓN DE LOS TRAZADORES CÚBICOS EN EL CÁLCULO DE RENTAS FRACCIONADAS

Con la notación considerada en el punto 3.2, en el contexto de rentas fraccionadas tenemos que interpolar los puntos $\{(1, {}_1E_X), (2, {}_2E_x), \ldots, (n, {}_nE_x)\}$, con el interpolar S(x),

$$
S(t) = \begin{cases} S_0(t) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ S_1(t) & \text{si} \quad 1 < t \le 2 \\ \quad\vdots & \\ S_n(t) & \text{si} \quad n < t \le n+1 \end{cases}
$$

$$
\text{Con } S_j(t) = a_j + b_j(t + t_j) + c_j(t - t_j)^2 + d_j(t - t_j)^3
$$

Donde, como se dedujo en 3.2: $a_j = {}_jE_x;\ j = 0, \ldots, n$ y los valores que se pueden hallar a través de símbolos de conmutación como

$$
{}_jE_x = \frac{D_{x+j}}{D_x}
$$

Los valores de $b_j; c_j; d_j$ se calculan en base a las fórmulas deducidas en 3.2.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Como se dijo antes, el uso de trazadores trae consigo la desventaja de que los valores actuariales de las rentas ya no se pueden expresar de manera analítica a través de una fórmula explícita, sino que es necesario implementar el algoritmo y alimentarlo con los símbolos de conmutación calculados a la tasa de interés respectiva. En esta sección se presenta un ejemplo de la corrida para un caso específico, se puede realizar la comparación entre el valor obtenido mediante interpolación lineal segmentaria y la obtenida con trazadores cúbicos naturales. Es lógico pensar que la aproximación última es mas precisa ya que las funciones biométricas son suaves por naturaleza, y esto sólo puede ser garantizado (en su primera y segunda derivada) por el método de trazadores cúbicos.

Por ejemplo, para el caso de una renta vitalicia de 1/m u.m. pagaderas al finalizar cada 1/m fracción del año, vencida e inmediata, con tasa de interés i = 10%, x = 35 años, m= 6 (es decir pagos bimensuales), los resultados fueron:

- $a_{35}^{(6)} = 9.8862$ con el uso del modelo que usa interpoladores de trazador cúbico
- $a_{35}^{(6)} = 10.0528874$ con el uso del modelo que usa interpolares lineales.

FIG. 1

Uso de trazadores cúbicos en los modelo actuariales de rentas vitalicias fraccionadas

Esquema de la interpolación lineal segmentaria en el cálculo de los valores fraccionados $_{n+\frac{i}{m}}E'_x$ con m=2

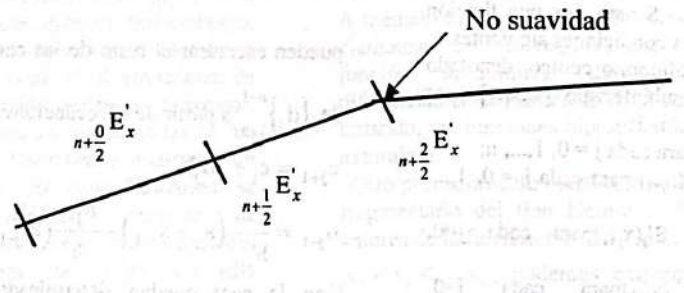
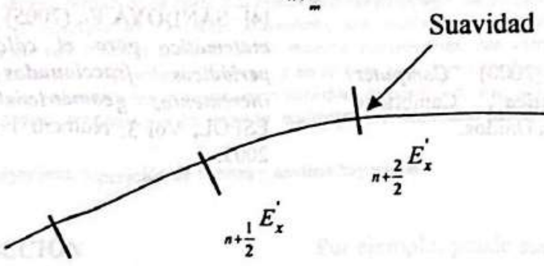


FIG. 2

Uso de trazadores cúbicos en los modelo actuariales de rentas vitalicias fraccionadas

Esquema de la interpolación de trazador cúbico en el cálculo de los valores fraccionados ${}_{n+\frac{i}{m}}E'_x$ con m=2



CONCLUSIONES

- **Los modelos actuariales para el cálculo de rentas de sobrevivencia fraccionadas deben incluir cierto tipo de aproximación, ya que los símbolos de conmutación con los que se calculan, únicamente se conocen para edades enteras. El uso de interpolación lineal segmentaria usado frecuentemente en la literatura para tratar estas rentas no es recomendable por dos razones: la precisión de la aproximación involucrada no es buena; y, por naturaleza las funciones biométricas son suaves, mientras que el uso de interpolación lineal segmentaria implica la no suavidad de la estimación de las mismas, como se observa en la FIGURA 1**
- **El uso de interpoladores cúbicos de trazador permite introducir la suavidad (en la primera y segunda derivadas) hace más natural al modelo, pues las funciones biométricas son suaves por naturaleza, como se observa en la FIGURA 2, la aproximación es más real.**
- **Otra posibilidad para desarrollar modelos mas precisos es la utilización de diferencias finitas para la determinación de modelos que contengan un término no lineal, con lo que se obtienen las denominadas fórmulas de Woolhouse, lamentablemente no hay un mecanismo que nos permita decidir cual de los dos modelos es más preciso: el desarrollado en este trabajo, o el de Woolhouse.**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1] BURDEN R., FAIRES D., (2002) ***"Análisis Numérico",*** séptima edición, Thomson Learning. México.

[2] MAEDER R., (2000) ***"Computer Science with Mathematica",*** Cambridge University press. Estados Unidos.

[3] SANDOYA F., (2005) ***"Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros",*** Escuela superior Politécnica del Litoral. Guayaquil, Ecuador.

[4] SANDOYA F., (2005) ***"Desarrollo de un modelo matemático para el cálculo actuarial de pagos periódicos fraccionados semestralmente con incrementos geométricos"*** **Revista Matemática,** ESPOL, Vol 3, Número 1 Guayaquil, Ecuador, Abril 2005.