matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2006, Vol. 4, No. 1

EL PROBLEMA DE LA COMPATIBILIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS

Bustamante Romero Edgar Johni[1], Sánchez Javier[2]

Resumen: *En ingeniería se usan modelos basados en probabilidad, en estos modelos la evaluación de la probabilidad conjunta es muy importante. Para los expertos suele ser más fácil determinar la matriz de distribución condicionada, y con esta determinar la matriz de probabilidad conjunta. Si se conoce la distribución conjunta entonces la distribución condicionada es siempre factible y también muy elemental determinarla, mientras que plantear el mismo problema en forma inversa, es decir construir la distribución conjunta a partir de las distribuciones condicionas es mas difícil y muchas veces imposible, naciendo así el criterio de compatibilidad, motivo de este trabajo.*

Palabras clave: Distribuciones Conjuntas, Distribuciones Condicionadas, Programación Lineal, Compatibilidad.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se construye la matriz de distribución conjunta de dos variables aleatorias discretas, a partir de las matrices de distribuciones condicionadas, asumiendo conocidas estas últimas.
Para los espacios probabilísticos de dimensión finita las distribuciones se expresan en forma matricial (dos variables), por tanto afrontaremos nuestro problema matricialmente y usaremos la programación lineal para presentar el modelo para el caso general de no compatibilidad.
Además se utiliza una métrica para cuantificar los niveles de compatibilidad.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y NOTACIÓN

Sea una variable bidimensional discreta y aleatoria *(X, Y)*, con dominio
$$N=\{(x_i,y_i),\ i=1,2,..I;\quad j=1,2,..J\}$$
donde X puede tomar los valores $x_1, x_2, \ldots, x_I$ y Y los valores $y_1, y_2, \ldots, y_J$.

Llamaremos P a la matriz de probabilidad conjunta. $P=(p_{ij})$,

Donde

$$p_{ij} = \text{Prob}[X = x_i, Y = y_j] \quad (1)$$

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij} \quad p_{.j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij} \quad (2)$$

Donde el punto se refiere a la suma en el índice correspondiente a su ubicación, las mismas que se denominan probabilidades marginales es de X y Y respectivamente.

Llamaremos A y B a las siguientes matrices condicionadas.

$$A=(a_{ij}) \qquad \text{y} \qquad B=(b_{ij})$$

$$a_{ij} = \text{Prob}[X = x_i \,/\, Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \quad (3)$$

$$b_{ij} = \text{Prob}[\, Y = y_j \,/\, X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \quad (4)$$

Nótese que las matrices A y B existen si:

$$\text{Prob}[Y = y_j] = p_{.j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij} \neq 0 \quad (5)$$

$$\text{Prob}[X = x_i] = p_{i.} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij} \neq 0 \quad (6)$$

Además se puede verificar que cumplen con los axiomas de probabilidad. Así la suma de las columnas de A y las filas de B deben sumar 1 y todas son positivas.
También podemos observar que si nos dan la matriz conjunta entonces determinar las matrices condicionadas es siempre posible e inmediato con ayuda de las formulas *(3)* y *(4)*.
Véase que las condiciones *(5)* y *(6)* en caso de no cumplirse significa que el evento es imposible por cuanto simplemente a este se lo elimina del modelo.
Mientras que si planteamos el problema en forma inversa:

---

[1] Bustamante Johni, Mat. *Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e_mail: jbustam@espol.edu.ec).*

[2] *Sánchez Javier, Ingeniero en Estadística Informática, (e-mil: javishh@yahoo.com)*

"Dado las distribuciones condiciones A y B determinar la distribución Conjunta P que satisface (3) y (4)". ***(7)***

Es un problema no muy evidente y objeto de este trabajo.

3. COMPATIBILIDAD EXACTA

Abordando el problema *(7)* se pueden tener matrices ***A*** y ***B*** tales que la matriz ***P*** simplemente no exista, en función de esta existencia se define la compatibilidad.

Es decir si la matriz ***P*** no existe diremos que ***A*** y ***B*** son incompatibles. Caso contrario se tiene compatibilidad exacta.

En consecuencia ***A*** y ***B*** son matrices compatibles si y sólo si existe una distribución conjunta ***P*** con ***A*** y ***B*** como sus matrices de probabilidad condicional. De tal forma que:

$$p_{ij} = a_{ij} p_{.j} \qquad \forall i, j \qquad (8)$$

$$p_{ij} = b_{ij} p_{i.} \qquad \forall i, j \qquad (9)$$

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{I} \left[\sum_{j=1}^{J} p_{ij} \right] = 1 \qquad (11)$$

El problema planteado en *(8) — (11)* como habíamos analizado puede no tener solución, pero en la vida real se puede aceptar una "pérdida de exactitud" (incompatibilidad) con el objeto de determinar un modelo que mejor se ajuste a la realidad para ello introduciremos la definición de:

4. CUASI COMPATIBILIDAD.

A continuación definiremos la compatibilidad usando un parámetro ε y unos coeficientes γ_{ij}, donde el primero medirá el grado o nivel de compatibilidad, y los segundos indicaran la importancia relativa de los errores que se está dispuesto a aceptar por la "pérdida de exactitud" para los valores p_{ij} respectivamente. Quedando el nuevo problema planteado de la siguiente forma:

$$\left| p_{ij} - a_{ij} p_{.j} \right| \leq \varepsilon \gamma_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (12)$$

$$\left| p_{ij} - b_{ij} p_{i.} \right| \leq \varepsilon \gamma_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{I} \left[\sum_{j=1}^{J} p_{ij} \right] = 1 \qquad (14)$$

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \qquad (15)$$

Teniendo asi un problema de programación inicial donde las restricciones *(12)* y *(13)* se las puede expresar con ayuda de dos restricciones sin el valor absoluto y la función objetivo a minimizar es $Z = \varepsilon$, evidentemente si obtenemos ε ***= 0*** estamos en el caso de un sistema lineal compatible (Compatibilidad exacta).

Caso (1)

```
SETS
I numero de filas/1*4/
J numero de columnas/1*4/;
ALIAS(I,I1);
ALIAS(J,J1);

SCALAR rho "desestabilizador" /0.0001/

TABLE A(I,J) probabilidad condicional de X dado Y
   1           2           3           4
1  0.14285714  0.33333333  0.27099237  0.16842105
2  0.14285714  0.08421053  0.18320611  0.33333333
3  0.00595238  0.24912281  0.45419847  0.24912281
4  0.70833333  0.33333333  0.09160305  0.24912281

TABLE B(I,J) probabilidad condicional de Y dado X
   1           2           3           4
1  0.10084034  0.39915966  0.29831933  0.20168067
2  0.12565445  0.12565445  0.25130890  0.49738220
3  0.00381679  0.27099237  0.45419847  0.27099237
4  0.38511327  0.30744337  0.07766990  0.22977346

VARIABLE
z valor de la funcion objetivo
epsilon Error maximo en la probabilidad conjunta;

POSITIVE VARIABLES
P(I,J) Probabilidad conjunta de X e Y

EQUATIONS
ZDEF1      Funcion a optimizar en el modelo 1
DESES      desestabiliza la compatibilidad
CONST111(I,J) Descomposicion valor absoluto de matriz A +
CONST112(I,J) Descomposicion valor absoluto de matriz A -
CONST121(I,J) Descomposicion valor absoluto de matriz B +
CONST122(I,J) Descomposicion valor absoluto de matriz B -
NORM1      P suma uno;

ZDEF1..          z=e=epsilon;
CONST111(I,J)..  P(I,J)-A(I,J)*sum(I1,P(I1,J))=l=epsilon;
CONST112(I,J)..  -epsilon=l=P(I,J)-A(I,J)*sum(I1,P(I1,J));
CONST121(I,J)..  P(I,J)-B(I,J)*sum(J1,P(I,J1))=l=epsilon;
CONST122(I,J)..  -epsilon=l=P(I,J)-B(I,J)*sum(J1,P(I,J1));
DESES..          rho=l=epsilon;

NORM1..  sum((I,J),P(I,J))=e=1;

MODEL model1/ZDEF1,CONST111,CONST112,CONST121,CONST122,NORM1/;


SOLVE model1 USING lp MINIMIZING z
DISPLAY A;
DISPLAY B;
DISPLAY Z.L;
DISPLAY P.L;
```

La solución: ***Caso (1)***

```
----55 VARIABLE z.L = 0.000 valor de
la funcion objetivo
----56  VARIABLE  P.L    Probabilidad
conjunta de X e Y

      1      2      3      4

1  0.024  0.095  0.071  0.048
2  0.024  0.024  0.048  0.095
3  0.001  0.071  0.119  0.071
4  0.119  0.095  0.024  0.071
```

Observamos que ***Z=0*** lo cual significa que el sistema es compatible.
Para analizar la cuasi compatibilidad realizaremos los siguientes cambios.

Caso (2)

```
SETS
I numero de filas/1*4/
J numero de columnas/1*4/;
ALIAS(I,I1);
ALIAS(J,J1);
TABLE  A(I,J)  probabilidad  condicional  de  X
dado Y
        1            2            3            4
1   0.14285714   0.33333333   0.27099237   0.16842105
2   0.14285714   0.08421053   0.18320611   0.33333333
3   0.00595238   0.24912281   0.45419847   0.24912281
4   0.70833333   0.33333333   0.09160305   0.24912281

TABLE  B(I,J)  probabilidad  condicional  de  Y
dado X
        1            2            3            4
1   0.25000000   0.25000000   0.25000000   0.25000000
2   0.12565445   0.12565445   0.25130890   0.49738220
3   0.00381679   0.27099237   0.45419847   0.27099237
4   0.38511327   0.30744337   0.07766990   0.22977346

VARIABLE
z valor de la funcion objetivo epsilon Error
maximo en la probabilidad conjunta;

POSITIVE VARIABLES
P(I,J) Probabilidad conjunta de X e Y

EQUATIONS
ZDEF1 Funcion a optimizar en el modelo 1

CONST111(I,J)   Descomposicion valor absoluto de matriz A +
CONST112(I,J)   Descomposicion valor absoluto de matriz A -
CONST121(I,J)   Descomposicion valor absoluto de matriz B +
CONST122(I,J)   Descomposicion valor absoluto de matriz B -

NORM1              P suma uno;
ZDEF1..           z=e=epsilon;
CONST111(I,J).. P(I,J)-A(I,J)*sum(I1,P(I1,J))=l=epsilon;
CONST112(I,J).. -epsilon=l=P(I,J)-
A(I,J)*sum(I1,P(I1,J));
CONST121(I,J).. P(I,J)-B(I,J)*sum(J1,P(I,J1))=l=epsilon;
CONST122(I,J).. -epsilon=l=P(I,J)-
B(I,J)*sum(J1,P(I,J1));

NORM1..  sum((I,J),P(I,J))=e=1;

MODEL
model1/ZDEF1,CONST111,CONST112,CONST121,CONST122,NORM1/;

SOLVE model1 USING lp MINIMIZING z
DISPLAY A;
DISPLAY B;
DISPLAY Z.L;
DISPLAY P.L;
```

Y el resultado:

```
----52 PARAMETER  B      probabilidad
condicional de Y dado X

        1        2        3        4

1  0.250   0.250   0.250   0.250
2  0.126   0.126   0.251   0.497
3  0.004   0.271   0.454   0.271
4  0.385   0.307   0.078   0.230

----53 VARIABLE z.L  = 0.011  valor de
la funcion objetivo

----54 VARIABLE P.L  Probabilidad
conjunta de X e Y

      1             2        3        4

1  0.040   0.063   0.053   0.050
2  0.030   0.017   0.055   0.124
3          0.057   0.116   0.080
4  0.133   0.086   0.014   0.083
```

6. METRICA O DISTANCIA

A continuación tomamos una métrica muy usual en el espacio vectorial de las matrices, con el objeto de cuantificar la proximidad de los resultados obtenidos, es decir: Cuantificar porcentualmente esta pérdida de exactitud, con ayuda de la proximidad de matrices, cuanto más próximas estén los resultados son mas aceptables.

d (A, B) = $\|A - B\|$ donde

$$\|A\|^2 = Tr(A.A^T)$$

En el caso *(1)* las matrices condicionadas

A_0

0.14285714	0.33333333	0.27099237
0.16842105	0.14285714	0.08421053
0.18320611	0.33333333	0.00595238
0.24912281	0.45419847	0.24912281
0.70833333	0.33333333	0.09160305
0.24912281		

B_0

0.10084034	0.39915966	0.29831933
0.20168067	0.12565445	0.12565445
0.25130890	0.49738220	0.00381679
0.27099237	0.45419847	0.27099237
0.38511327	0.30744337	0.07766990
0.22977346		

Estas matrices dan como resultado su respectiva matriz conjunta

P (ε=0)

0.024	0.095	0.071	0.048
0.024	0.024	0.048	0.095
0.001	0.071	0.119	0.071
0.119	0.095	0.024	0.071

Donde ***Z=0,*** por tanto $A_1=A_0$, $B_0=B_1$, donde las matrices A_1, B1 son las matrices de la distribuciones condicionadas generadas por la matriz ***P (ε=0)*** las cuales son siempre posible calcularlas.

Entonces ***d*** $(A_1, A_0)=0$ y ***d*** $(B_0, B_1)=0$

Dando una medida bastante lógica por cuanto las matrices condicionadas son compatibles.

En el caso *(2)*

A_0

0.143	0.333	0.271	0.168
0.143	0.084	0.183	0.333
0.006	0.249	0.454	0.249
0.708	0.333	0.092	0.249

B_0

0.250	0.250	0.250	0.250
0.126	0.126	0.251	0.497
0.004	0.271	0.454	0.271
0.385	0.307	0.078	0.230

Estas matrices dan como resultado su respectiva matriz conjunta

P (ε=0.011)

0.040	0.063	0.053	0.050
0.030	0.017	0.055	0.124
0.000	0.057	0.116	0.080
0.133	0.086	0.014	0.083

Con esta matriz conjunta generamos sus respectivas matrices condicionadas.

A_1

0,19704433	0,28251121	0,22268908
0,14836795	0,14778325	0,07623318
0,23109244	0,36795252	0,00000000
0,25560538	0,48739496	0,23738872
0,65517241	0,38565022	0,05882353
0,24629080		

B_1

0.19417476	0.30582524	0.25728155
0.24271845	0.13274336	0.07522124
0.24336283	0.54867257	0.00000000
0.22529644	0.45849802	0.31620553
0.42088608	0.27215190	0.04430380
0.26265823		

Por tanto:
Las distancias: ***d** (A_1, A_0)**=0,01979*** y ***d** (B_0, B_1)**= 0,02051***
Estas distancias y el valor de epsilon permiten tener una idea clara sobre que tan buena es la solución.

RELACIÓN *DISTANCIA, ε*

Desde el punto de vista Algebraico las matrices son vectores en un espacio en el cual se ha definido un producto interno y por tanto una norma, entonces la proximidad de un vector a otro lo mediremos con respecto a dos datos: la magnitud y el ángulo de separación.
La norma utilizada será:

$$\|A\|^2 = Tr(A.A^T)$$

En nuestro ejemplo Caso *(1)* es 0% cuasi - compatibles o lo mismo 100% compatibles

En el caso *(2)*

$$\|A_1\| = 1.408024 \qquad \|A_0\| = 1.419253$$

$$\alpha = 6.78$$

$$\|B_1\| = 1.323013 \qquad \|B_0\| = 1.246969$$

$$\beta = 7.04$$

α Ángulo entre A_1 y A_0
β Ángulo entre B_1 y B_0

$$\|A_1 - A_0\| = 0.01979$$

$$\|B_1 - B_0\| = 0.020511$$

$$\%Tamaño = \frac{\|A_1 - A_0\|}{\|A_1\|} * 100 = 11.86\% \qquad (16)$$

$$\%Tamaño \frac{\|B_1 - B_0\|}{\|B_1\|} * 100 = 12.45\% \qquad (17)$$

Se puede concluir que las matrices del caso *(2)* son 12,45% incompatibles o 87,55% compatibles con un ángulo de 7,04 grados.
Se puede observar que las matrices $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{B_1}$ generan un sistema compatible con la matriz ***P***, y las matrices $\mathbf{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$ son las matrices que generan la cuasi - compatibilidad (perdida de exactitud), por tanto para esta matriz ***P*** se pueden obtener otras matrices $\mathbf{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$ tales que las relaciones ***(16)*** y ***(17)*** pueden ser iguales, entonces el valor de alfa y beta (ángulos) permiten tomar la mejor solución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. ROMAN PEREZ –VILLALTA, (2000), ***"Variables Finitas Condicionalmente Especificadas"*** Universidad de Sevilla, Quesito, vol. 24.3, p. 425-448.

[2]. **ENRIQUE CASTILLO, ANTONIO CONEJO, PABLO PEDREGAL, RICARDO GARCÍA, NATALIA ALGUACIL,** (2002), ***"Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia"***, 20 de febrero de 2002.

[3]. PEREZ VILLALTA, R. (1997), ***"Distribuciones Bivariantes especificadas con condicionadas o Marginales"*** Trabajo de investigación Departamento de Economía Aplicada 1. 1997 Universidad de Sevilla.