MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2022, Vol. 20, No. 2 Julio - Diciembre

Análisis crítico del coeficiente de determinación (R^2), como indicador de la calidad de modelos lineales y no lineales

Critical analysis of the coefficient of determination (R^2), as an indicator of the quality of linear and non-linear models

Roxanna Patricia Palma

Recepción: 08/04/2022 **Aceptación:** 27/07/2022 **Publicación:** 31/07/2022

Abstract In almost all areas of science, data modeling has been used over the years for different purposes, mainly explanatory and predictive. To test whether the applied models fit the data, the coefficient of determination (R^2) is often used. In this bibliographic review are proposed the pros and cons of its use as an indicator of the quality of linear and non-linear models and the possible solutions to problems arising from its application. The need to test the parameters of the model and the applicability of the number of parameters to be considered within the model used is also analyzed, an aspect that influences the quality of the fit.The following databases were used: Science direct, Web of Science and Periodicos Capes. The articles were selected because they dealt with the subject of this review and contributed to the fulfillment of its purpose
Keywords Coefficient of determination, fit, model quality, parameters, variables.

Resumen En casi todas las áreas de la ciencia, el modelado de datos se ha utilizado a lo largo de los años con diferentes propósitos, principalmente explicativos y predictivos. Para probar si los modelos aplicados se ajustan a los datos, a menudo se usa el coeficiente de determinación (R^2). En esta revisión bibliográfica se proponen los pros y los contras de su uso como indicador de la calidad de los modelos lineales y no lineales y las posibles soluciones a los problemas derivados de su aplicación. También se analiza la necesidad de probar los parámetros del modelo y la aplicabilidad del número de parámetros a considerar dentro del modelo utilizado, aspecto que influye en la calidad del ajuste. Como bases de datos se utilizó: Science direct, Web of Science y Periodicos Capes. Los artículos fueron seleccionados debido a que trataban del tema objeto de esta revision y aportaban al cumplimiento de su propósito
Palabras Claves ajuste, calidad del modelo, coeficiente de determinación, parámetros, variables.

Roxanna Patricia Palma, Dra. en Agronomía
Facultad de Ciencias Pecuarias y Biológicas, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Av. Quito km. 1.5 vía a Santo Domingo de los Tsáchilas, Quevedo, Ecuador, CP 120301, e-mail: rpalma@uteq.edu.ec, https://orcid.org/0000-0001-9934-7343

1 Introducción

En los análisis estadísticos, el investigador siempre espera encontrar un modelo para el conjunto de datos, sin embargo, esto no siempre es posible. Una de las causas más comunes de este problema es que los datos no tienen una tendencia definida, es decir, son aleatorios y no se puede definir una relación de causa y efecto entre las variables bajo análisis. Una segunda causa es que los datos tienen una tendencia aparente, pero no es modelable.

Ante tales situaciones, en el análisis de tendencias y el modelado consecuente surge otra pregunta con respecto a la cantidad de parámetros del modelo a utilizar. A menudo, más parámetros simulan un mejor ajuste, pero el modelo resulta menos aplicable a la realidad, con dificultades de interpretación. Es necesario también considerar que estos parámetros, si bien pueden incrementar el valor de (R^2), también pierden significancia estadística dentro del modelo.

Además, el número de parámetros está asociado con número de observaciones disponibles para aplicar el modelo de regression (Austin y Steyerberg, 2015). Siendo que también el tamaño de muestra influye en el coeficiente de determinación (R^2) (Genç y Mendeş, 2021). Esto nos lleva a anlizar la utilidad de cada variable independiente como regresor del modelo, debido a que existen áreas donde puede ser difícil u oneroso disponer de grandes cantidades de datos, como por ejemplo en las ciencias biológicas y médicas (Jenkins y Quintana-Ascencio, 2020).

Con lo anterior, existe la necesidad de utilizar otros indicadores de calidad de ajuste del modelo. Dos de ellos son la determinación de los intervalos de confianza y el análisis de la significancia de cada parámetro del modelo de regression.

De esta forma, el propósito de esta revisión bibliográfica es analizar los pros y los contras del uso del coeficiente de determinación (R^2) como indicador de la calidad de los modelos lineales y no lineales; así como las posibles soluciones a los problemas derivados de su aplicación. Para ello, en las siguientes secciones se analiza críticamente el coeficiente de determinación (R^2) como indicador de la calidad del ajuste del modelo, seguido de la importancia de presentar los intervalos de confianza en el modelado y, finalmente, los aspectos más relevantes a la hora de decidir cuántos parámetros considerar dentro de los modelos aplicables.

Para cumplir con este propósito y previa planificación de los temas a abordar, se seleccionó como criterios de búsqueda: “regression model parameters”, “sample size regression models”, “confidence intervals regression models”, “quality indicator regression model”. Se utilizó como base de datos: ScienceDirect, Web of Science y Periódicos Capes. Luego de analizar los resultados de búsqueda, fueron escogidos los artículos con énfasis en los temas discutidos y que aportaban al cumplimiento del propósito de esta revisión.

2 Calidad de ajuste del modelo

Según Zulkifli, Sorooshian, y Anvari (2012), el análisis de regresión incluye cualquier técnica estadística para modelar y analizar la relación entre la variable dependiente y una o más variables independientes. Se puede decir, también, que el análisis de regresión busca determinar el efecto causal de una variable sobre otra. Después de ajustar el modelo, se evalúa la significancia estadística de las relaciones estimadas cercanas a las relaciones verdaderas.

En los modelos de regresión lineal que incluyen el término constante $ß_0$ (intercepto), el coeficiente de determinación (R^2), también conocido como estadística R-cuadrado, se toma como una medida de qué tan bien describe el modelo de regresión los datos observados (Hagquist y Stenbeck, 1998). Esto se interpreta, por la ecuación de regresión, como la proporción de varianza en la variable dependiente.

Se sabe que cuando R^2 es +1, existe una relación lineal perfecta entre x e y, es decir, el 100 % del cambio en y se explica por el cambio en x. Cuando es $0 < R^2 < 1$, existe una relación lineal más débil entre x e y, es decir, no toda la variación de y se explica por la variación de x. Se considera que la diferencia de proporción ($1 - R^2$) se debe a la variación individual y puede explicarse por otros factores que no se tuvieron en cuenta en el análisis (Cornell, 1987; Hagquist y Stenbeck, 1998; Kumaria y Yadav, 2018; Ohtani y Hasegawa, 1993; Paz et al., 2004; Ribeiro, 2014; Schneider, Hommel, y Blettner, 2010; Zulkifli et al., 2012).

2.1 Dificultades del uso de R^2

Los analistas han identificado algunos problemas tanto en la definición del R^2 como en su aplicación. Primero, este coeficiente puede aumentar artificialmente a medida que se incluyen más variables en el modelo; siendo que, este incremento no implica que estas variables independientes sean significativas e importantes para el modelo (Cornell, 1987; Saunders, Russell, y Crabb, 2012; Srivastava, Srivastava, y Ullah, 1995).

En segundo lugar, también está influenciado por el tamaño de la muestra o el número de observaciones utilizadas en la regresión (Cornell, 1987; Saunders et al., 2012; Srivastava et al., 1995). En tercer lugar, no existen criterios definidos para lo que universalmente representa un valor "bueno"de R^2. Por lo tanto, la única forma de evaluar dicho estadístico es comparándolo con otro modelo predictivo o utilizando otros parámetros estadísticos para evaluar la calidad del ajuste (Hagquist y Stenbeck, 1998; Saunders et al., 2012). En cuarto lugar, R^2 representa la variación explicada por el modelo solo cuando se tiene un modelo lineal con el término constante (Ribeiro, 2014).

Una advertencia adicional es que, dado que R^2 es independiente de la escala, puede ser utilizado para describir los resultados del análisis de regresión sin necesidad de conocer la naturaleza de la variable dependiente. Sin embargo, a diferencia del error estándar de la estimación y los intervalos de confianza derivados, R^2 como único parámetro estadístico no proporciona información directa sobre qué tan bien se puede usar la ecuación de regresión para la predicción (Hahn, 1973).

El coeficiente de determinación también presenta como problema la premisa referente a las observaciones. Ésta indica que todas las observaciones sobre el estudio y las variables explicativas se observen correctamente, no obstante, esto no siempre es posible. Así, cuando la magnitud de los errores de medida es grande, perturba las propiedades óptimas de los estimadores y el valor de R^2 obtenido. Ignorar tales errores puede conducir a inferencias estadísticas incorrectas (Cheng, Shalabh, y Garg, 2014).

2.2 *Alternativas de aplicación*

Una solución para los casos anteriores es utilizar el R^2 ajustado, que presenta menos sesgo que el R^2 y solo se planteará si las variables independientes tuvieron un efecto suficientemente grande, es decir, considera las variables explicativas en el modelo (Schneider et al., 2010; Srivastava et al., 1995). Un punto importante a tener en cuenta es el sentido de comparación que dan los intervalos de confianza, sin ellos la estadística R^2 ajustada tiene una utilidad limitada (Saunders et al., 2012).

Además, el R^2 ajustado no tiene la misma interpretación que el R^2 y, por lo tanto, se debe tener cuidado al interpretar y reportar esta estadística. Así, el R^2 ajustado puede ser útil en la futura etapa de selección del modelo (Zulkifli et al., 2012).

Una de las opciones para lograr un R^2 ajustado alto es eliminar variables independientes. El problema con esta opción es que se corre el riesgo de eliminar regresores del modelo que son estructuralmente relevantes pero que no contribuyen a elevar el R^2 ajustado (Hagquist y Stenbeck, 1998).

Por ejemplo, las simulaciones realizadas por Ohtani y Hasegawa (1993) mostraron con resultados numéricos que cuando solo hay una variable no observable pero importante, el R^2 ajustado puede ser más confiable que el R^2. Este efecto fue observado tanto desde el punto de vista del sesgo como del error cuadrático medio (MSE).

Para esto, Hahn (1973), ya estableció que un valor alto de R^2 no indica una ecuación de regresión estadísticamente significativa o útil. Cuando el número de observaciones excede el número de términos en la ecuación de regresión por solo un pequeño número, el coeficiente de determinación puede ser alto. Este resultado puede ocurrir incluso si no existe una verdadera relación entre las variables independientes y dependientes. El mismo autor determina que significado práctico y significado estadístico no son equivalentes, refiriéndose a ecuaciones de predicción. Por tanto, una ecuación de regresión particular puede explicar una gran proporción de la variabilidad total en la variable dependiente, generando así un valor alto de R^2. Sin embargo, la variabilidad total puede ser tan grande que la variabilidad restante no explicada, incluso si se ajustara la ecuación, será mayor de lo tolerable para una predicción útil.

Autores como Paz et al. (2004) sostienen que en modelos no lineales, R^2 puede ser utilizado como parámetro en la evaluación de la bondad de ajuste, calculándose en estos casos como:

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{residuo}}{SQ_{TotalCorregida}}$$

donde $SQ_{residuo}$ es la suma de cuadrados del resiguo y, $SQ_{Totalcorregida}$ es la suma de cuadrados total corregida para la media.

2.3 R^2 y el tamaño de muestra

Quinino, Kings, y Bessegato (2012) consideran que la utilidad de R^2 no solo dependen del número de regresores sino que además agregan el tamaño de la muestra. Estos autores establecieron una tabla con diferentes números de regresores y tamaño de muestra. Con esto se pretendía calcular el valor mínimo de R^2 necesario para ser considerado un modelo adecuado. Por ejemplo, para el nivel de significación del 5 % cuando el valor de R^2 es superior al 79 %, se considera el número de regresores igual a 5 (k = 5) y el tamaño de la muestra igual a 12 (n=12).

Cramer (1987), en su estudio realizó una serie de simulaciones sobre el tamaño de la muestra, sus promedios y variaciones. En resumen, el autor obtuvo los siguientes resultados: R^2 no es confiable debido a la dispersión de sus sesgos, que pueden ser sustanciales, incluso en muestras pequeñas. Con menos de cincuenta observaciones no tiene sentido citar a R^2, y una vez que superamos esa cantidad de muestras, el sesgo prácticamente ha desaparecido, es decir, R^2 tiene un sesgo definitivamente al alza. Sin embargo, este sesgo se reduce rápidamente a medida que aumenta el tamaño de la muestra. La razón de este breve descarte de sesgo es que es completamente imperceptible por la dispersión de R^2. Se determina que cuando la tendencia es evidente, el error estándar de R^2 es varias veces mayor.

Autores como Jenkins y Quintana-Ascencio (2020) consideran que el número de observaciones puede ser un inconveniente en estudios con resultados no concluyentes. Aún así, es difícil encontrar una recomendación sobre cuál es el tamaño de muestra para estudios de regresión.

Además de todo lo descrito, R^2 no es un indicador de buen ajuste en modelos no lineales ya que no se cumplen los supuestos necesarios para su aplicación. Uno de estos suspuestos establece que la suma de los residuales no es igual a cero (Archontoulis y Miguez, 2015; Yamanaka, 2018). Esto implica se pueden encontrar valores altos de R^2 tanto en modelos con buen ajuste como en aquellos en los que el ajuste no es aceptable.

Tanto R^2 como R^2 ajustado pueden no aumentar para mejores modelos no lineales, por lo que se puede elegir el modelo correcto con R^2 entre 28 % y 43 % (Sapra, 2014). En estos casos, se pueden utilizar otros criterios para elegir el modelo, tales como: error cuadrático medio (MSE), error de predicción medio (MPE), que corresponde al promedio de todos los errores de predicción (SE) y técnicas de validación cruzadas (Archontoulis y Miguez, 2015; Yamanaka, 2018).

De todos modos, R^2 se considera un estimador sesgado que aumenta a medida que se agregan variables al modelo, incluso si no tienen un valor predicho. Este sesgo es considerable cuando no hay equilibrio entre el número de covariables y el número de observaciones (Ricci, 2010). A pesar de ello, tanto en la regresión lineal como en la no lineal, el coeficiente de determinación es posiblemente el estadístico más utilizado para evaluar la adecuación de los modelos empíricos ajustados a los datos (Cheng et al., 2014; Cornell, 1987). Esto posiblemente se deba a que el valor de R^2 lo proporcionan todos los programas actuales para el análisis de regresión (Cheng et al., 2014).

3 ¿Es necesario probar los parámetros del modelo y presentar los intervalos de confianza de las curvas?

Probar los parámetros del modelo y determinar los intervalos de confianza (IC) son parte del diagnóstico posterior a la regresión. Este proceso permite evaluar la validez del modelo y confirmar que realmente es una representación razonable de la relación entre las variables exógenas y endógenas. Además, se pueden utilizar para comparar modelos y determinar el más adecuado. También nos permite revelar posibles deficiencias del modelo (parámetros de prueba). De este modo, parámetros que en principio son identificables con el modelo, pueden volverse insignificantes debido a la gran incertidumbre en los datos disponibles (Jaqaman y Danuser, 2006). Tanto la prueba de parámetros como el IC tienen más significado que el valor R^2 para determinar el ajuste del modelo (Hahn, 1973).

Debido a la interdependencia entre parámetros, reflejada por coeficientes de correlación cruzada no nulos, la significancia puede evaluarse solo para grupos de parámetros interdependientes y no para cada parámetro individualmente (Jaqaman y Danuser, 2006). Los mismos autores establecen que la agrupación de parámetros interdependientes en modelos grandes es ambigua, lo que hace que la prueba directa de significación de parámetros sea una tarea algo complicada. Para este caso se pueden utilizar herramientas estadísticas como la ortogonalidad.

Dado que los coeficientes de regresión β_0 y β_1 están sujetos a la incertidumbre del muestreo, no es posible estimar con precisión el valor real de estos parámetros utilizando los datos que determinan el modelo de regresión (Hagquist y Stenbeck, 1998). Para ello, es necesario determinar los IC para ambos parámetros. Si el IC no incluye ”0”, se puede considerar que las variables independiente y dependiente están relacionadas (Charter, 2009; Hagquist y Stenbeck, 1998; Maydeu-Olivares y García-Forero, 2010).

En la mayoría de los casos, la incertidumbre estadística de una medición (parámetros) viene dada por la desviación estándar, o matriz de covarianza (cuando se trata de más de un mensurando), de los valores medidos, que se obtuvieron en muchos experimentos repetidos. Si la distribución de probabilidad del valor medido no es normal, o si existen límites físicos cercanos al valor medido, se recomienda informar los intervalos de confianza para un valor de probabilidad específico (Lee, Lee, Park, y Lee, 2010). De este modo, la incertidumbre en la medida de una variable se predice considerando el rango de valores en el que pueden estar los datos (Blanco-Fernández, Colubi, y González-Rodríguez, 2012).

Establecer intervalos de confianza es fundamental para no predecir o estimar fuera del rango de valores de la variable independiente de la muestra (Dietrich, Dreyer, Hansch, y Bentley, 1980; Zulkifli et al., 2012). En la regresión, los intervalos de confianza simultáneos en g_i (β) son más informativos que las estimaciones puntuales. Dentro del alcance de una regresión lineal, los intervalos de confianza simultáneos se conocen como intervalos de Scheffè (Vecchia y Cooly, 1987).

Para Hagquist y Stenbeck (1998), tanto en regresión lineal como en logística factorial sobre datos individuales, la adecuación del ajuste no es aplicable. El modelo solo debe evaluarse frente a partes específicas de la variación que sean relevantes. De esta forma, probar la significancia de los parámetros y establecer el IC corresponde a probar la bondad del ajuste.

Asimismo, Archontoulis y Miguez (2015), al analizar el enfoque de Carroll y Ruppert (1988) sobre la importancia de los parámetros y el establecimiento de los IC, advierten que no se puede ignorar la heterogeneidad de la varianza, ya que puede resultar en IC engañosos o extremadamente conservadores. Finalmente, para Motulsky y Ransnas (1987), en funciones no lineales los errores no son ni aditivos ni simétricos, y no se pueden calcular límites de confianza exactos. Para estos autores, en una ecuación no lineal se subestimará la incertidumbre de todos los parámetros.

En resumen, los investigadores deben ser muy cuidadosos en la aplicabilidad de los análisis de regresión, especialmente cuando el foco está en obtener conclusiones sobre causa y efecto. Se debe considerar que todo lo que se puede probar (con cierto grado de incertidumbre) es correlacional, no causalidad, y por lo tanto se deben tomar acciones correctivas como resultado de tales conclusiones y evitar extrapolar más allá del alcance de los datos.

Una ecuación de regresión específica puede ser apropiada para hacer predicciones a partir de observaciones adicionales de la población de la que se obtuvieron los datos, pero puede ser poco confiable para otros propósitos, como explicar las razones de la variabilidad en la variable dependiente (Hahn, 1973).

4 Número de parámetros del modelo. ¿Qué es lo más deseable, modelo con más o menos parámetros?

Al decidir el número de regresores en el modelo, se deben considerar tres factores: el interés del investigador, el tipo de estudio y el tipo de modelo. Para esto es posible analizar desde dos circunstancias: cuando conocemos y cuando no conocemos las variables exógenas.

4.1 Cuando se conocen las variables exógenas

Cuando se conocen las variables exógenas junto con el significado de los parámetros, y el interés es analizar cuánto influyen en la variable respuesta, se pueden incluir todos estos parámetros siempre que cumplan con todos los ítems de calidad de ajuste elegidos (Esteves, 2008). También se debe considerar que la suma de muchos parámetros da como resultado un sobreajuste del modelo y, en consecuencia, produce valores altos de R^2 con baja capacidad de predicción (Sapra, 2014). Aunque, como se describió anteriormente, el valor del coeficiente de determinación no es la mejor estimación de la bondad de ajuste, pero es importante para muchos investigadores.

Para no perder la robustez del modelo, aún conociendo las variables de regresión, se deben incluir únicamente las variables independientes que explican gran parte de la varianza de la variable dependiente. Para ello es necesario hacer uso del conocimiento del investigador en el área y así tener una elección efectiva (Schneider et al., 2010).

4.2 Cuando no se conocen las variables exógenas

Como los modelos son aproximaciones de la realidad, es probable que más de un modelo ajuste los datos en un grado aceptable y cumpla con las estadísticas de bondad de ajuste. Generalmente, los modelos con una mayor cantidad de parámetros son más flexibles y ajustan mejor los datos que los modelos con una menor cantidad de parámetros.

Sin embargo, este mejor ajuste plantea el problema de que el grado de interdependencia entre los parámetros aumenta a medida que aumenta el número de parámetros en un modelo. Así, cuando el modelo no lineal que mejor se ajusta tiene parámetros que no se pueden interpretar fácilmente y, paralelamente, existe un modelo más sencillo y con menos parámetros que puede ofrecer una mejor explicación, se podría optar por el segundo en detrimento de cierta precisión en el ajuste. Entonces, la pregunta en este punto es si el mejor ajuste vale el costo en términos de grados de libertad perdidos después de incrementar el número de parámetros (Jaqaman y Danuser, 2006; Motulsky y Ransnas, 1987).

Archontoulis y Miguez (2015), al analizar el uso de modelos no lineales en el área agronómica, compararon un modelo no lineal de 3 parámetros, con una clara interpretación biológica, con un modelo lineal de 5 parámetros, que además de un mayor número de parámetros, no sería adecuado ni de fácil interpretación. Comparando las ventajas y desventajas de los modelos lineales y no lineales, llegaron a la conclusión de que las principales ventajas de los modelos no lineales son: primero que son parsimoniosos. Segundo, estos modelos son fáciles de interpretar; y, tercero tienden hacia más predicciones robustas, especialmente fuera del alcance de los datos observados. Sin embargo, los mismos autores establecen que la principal desventaja de los modelos no lineales es su falta de flexibilidad por no tener soluciones analíticas en la estimación de sus parámetros.

También, Motulsky y Ransnas (1987) explican que la regresión no lineal falla cuando, innecesariamente, se intenta ajustar los datos a una ecuación con muchos parámetros. Teniendo en cuenta que estimar todos los parámetros esenciales para el modelo puede ser difícil cuando el tamaño de la muestra es pequeño, lo que podría generar modelos sobreparametrizados (Yamanaka, 2018).

5 Conclusiones

El coeficiente de determinación no es un buen indicador de calidad de ajuste de un modelo de regression debido a que está influenciado principalmente por el número de parámetros del modelo y el tamaño de muestra. Por tanto, no se lo debe utilizar como medida única de ajuste de un modelo, independientemente de la universalidad de su uso.

Al mismo tiempo, el número de parámetros que se podrían incorporar al modelo está determinado por el número de observaciones realizadas. Por lo que decidir el número de parámetros del modelo no es sencillo. Se deben considerar todas las aristas involucradas en el modelado de datos y hacer uso de las herramientas existentes para probar modelos, y, lo más relevante: conocimiento en el campo del investigador.

El coeficiente de determinación no tiene una interpretación estándar definida sobre el nivel que refleja un ajuste óptimo, lo que hace su uso menos recomendado.

Es necesario calcular otros indicadores de calidad de ajuste del modelo de regresion, como el intervalo de confianza y probar estadísticamente cada parámetro determinado en el modelo. Los intervalos de confianza son necesarios para mantener las estimaciones dentro del rango de valores de la variable independiente de la muestra.

6 Recomendaciones

Ante la diversidad de recomendaciones sobre el número de observaciones necesarias para aplicar modelos de regresión, se recomienda realizar simulaciones con diferentes tamaños de muestra en diferentes campos de la ciencia.

Se recomienda también determinar la verdadera relación entre las variables para elegir únicamente aquellas que puedan explicar el comportamiento de la variable dependiente y evitar sobre estimar el valor de (R^2).

7 Agradecimientos

La autora agradece a la Dra. Denise Garcia de Santana por las sugerencias al estudio y a la Coordinación de Perfeccionamiento de Personas de Educación Superior (CAPES), Fundación de Apoyo a la Investigación del Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) y Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (CNPq) por el soporte financiero.

Referencias

Archontoulis, S. V., y Miguez, F. E. (2015). Nonlinear regression models and applications in agricultural research. *Agronomy Journal*, *107*(2), 786-798. doi: 10.2134/agronj2012.0506

Austin, P. C., y Steyerberg, E. W. (2015). The number of subjects per variable required in linear regression analyses. *Journal of Clinical Epidemiology*, *68*(1), 627-636. doi: 10.1016/j.jclinepi.2014.12.014

Blanco-Fernández, A., Colubi, A., y González-Rodríguez, G. (2012). Confidence sets in a linear regression model for interval data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, *146*(6), 1320-1329. doi: 10.1016/j.jspi.2011.09.017

Carroll, R. J., y Ruppert, D. (1988). *Transformation and weighting in regression*. Chapman and Hall/CRC.

Charter, R. A. (2009). Differences scores: regression-based reliable difference and the regression-based confidence interval. *Journal of Clinical Psychology*, *65*(4), 456-460. doi: 10.1002/jclp.20554

Cheng, C.-L., Shalabh, y Garg, G. (2014). Coefficient of determination for multiple measurement error models. *Journal of Multivariate Analysis*, *126*(1), 137-152. doi: 10.1016/j.jmva.2014.01.006

Cornell, J. (1987). Factors that influence the value of the coefficient of determination in simple linear and nonlinear regression models. *Phytopathology*, *776*(1), 63-70. doi: 10.1094/Phyto-77-63

Cramer, J. (1987). Mean and variance of R^2 in small and moderate samples. *Journal of Econometrics*, *35*(2-3), 253-266. doi: 10.1016/0304-4076(87)90027-3

Dietrich, S. W., Dreyer, N. D., Hansch, C., y Bentley, D. L. (1980). Confidence interval estimators for parameters associated with quantitative structureactivity relationships. *Journal of medicinal chemistry*, *23*(11), 1201-1205. doi: 10.1021/jm00185a010

Esteves, E. (2008). Nonlinear regression using the solver® tool from microsoft excel. *Technovision Electronics Series*, *18*(1), 1-13.

Genç, S., y Mendeş, M. (2021). Evaluating performance and determining optimum sample size for regression tree and automatic linear modeling. *Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia*, *73*(6), 1391-1402. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1678-4162-12413

Hagquist, C., y Stenbeck, M. (1998). Goodness of fit in regression analysis – R^2 and G^2 reconsidered. *Quality and Quantity*, *32*(1), 229-245. doi: 10.1023/A:1004328601205

Hahn, G. J. (1973). The coefficient of determination exposed. *Chemical Technology*, *3*(10), 609-612.

Jaqaman, K., y Danuser, G. (2006). Linking data to models: data regression. *Nature Reviews Molecular Cell Biology*, *7*(1), 813-819. doi: 10.1038/nrm2030

Jenkins, D. G., y Quintana-Ascencio, P. F. (2020). A solution to minimum sample size for regressions. *PLoS ONE*, *15*(2), 1-15. doi: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0229345

Kumaria, K., y Yadav, S. (2018). Linear regression analysis study. *Journal of the Practice of Cardiovascular Sciences*, *4*(1), 33-36. doi: 10.4103/jpcs.jpcs_8_18

Lee, K. B., Lee, J. M., Park, T. S., y Lee, S. H. (2010). Construction of classical confidence regions of model parameters in nonlinear regression analyses. *Applied Radiation Isotopes*, *68*(7-8), 1261-1265. doi: 10.1016/j.apradiso.2009.11.013

Maydeu-Olivares, A., y García-Forero, C. (2010). Goodness-of-fit testing. *International Encyclopedia of Education*, *7*(1), 190-196. doi: 10.1016/B978-0-08-044894-7.01333-6

Motulsky, H. J., y Ransnas, L. (1987). Fitting curves to data using nonlinear regression: a practical and nonmathematical review. *The FASEB Journal*, *1*(5), 365-374. doi: 10.1096/fasebj.1.5.3315805

Ohtani, K., y Hasegawa, H. (1993). On small sample properties of R^2 in a linear regression model with multivariate t errors and proxy variables. *Econometric Theory*, *9*(3), 504-515. doi: 10.1017/s0266466600007805

Paz, C. C., Packer, I. U., Freitas, A. R., Tambasco-Talhari, D., Regitano, L. C. A., Alencar, M. M., y Cruz, G. M. (2004). Ajuste de modelos não-lineares em estudos de associação entre polimorfismos genéticos e crescimento em bovinos de corte. *Revista Brasileira de Zootecnia*, *33*(6), 1416-1425. doi: 10.1590/S1516-35982004000600008

Quinino, R. C., Kings, E. A., y Bessegato, L. F. (2012). Using the coefficient of determination R^2 to test the significance of multiple linear regression., journal=Teaching Statistics, volume=35, number=2, pages="84-88", doi = 10.1111/j.1467-9639.2012.00525.x,.

Ribeiro, M. J. B. (2014). *Curva de crescimento de codornas ajustadas por modelos não lineares* [Master Thesis].

Ricci, L. (2010). Adjusted -squared type measure for exponential dispersion models. *Statistics and Probability Letters*, *80*(1), 1365-1368. doi: 10.1016/j.spl.2010.04.019

Sapra, R. L. (2014). Using R^2 with caution. *Current Medicine Research and Practice*, *4*(3), 130-134. doi: 10.1016/j.cmrp.2014.06.002

Saunders, L. J., Russell, R. A., y Crabb, D. P. (2012). The coefficient of determination: What determines a usefulR^2 statistic?. *Investigative Opthalmology and Visual Science*, *53*(11), 6830-6832. doi: 10.1167/iovs.12-10598

Schneider, A., Hommel, G., y Blettner, M. (2010). Linear regression analysis. *Deutsches Aerzteblatt Online*, *107*(44), 776-782. doi: 10.3238/arztebl.2010.0776

Srivastava, A. K., Srivastava, V. K., y Ullah, A. (1995). The coefficient of determination and its adjusted version in linear regression models. *Econometric Reviews*, *14*(2), 229-240. doi: 10.1080/07474939508800317

Vecchia, A. V., y Cooly, R. L. (1987). Simultaneous confidence and prediction intervals for nonlinear regression models with application to a groundwater flow model. *Water Resources Research*, *23*(7), 237-250. doi: 10.1029/WR023i007p01237

Yamanaka, S. E. (2018). *Modelos não lineares mistos em estudos de crescimentos de frango de corte* [Master Thesis].

Zulkifli, N., Sorooshian, S., y Anvari, A. (2012). Modeling for regressing variables. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, *1*(2), 1-8.