

Función de Green en una franja horizontal infinita de amplitud π con frontera mixta Dirichlet-Neumann usando el método parqueting-reflections

Green's function on an infinite horizontal strip of amplitude π with Dirichlet-Neumann mixed frontier using the parqueting-reflections method

Carlos Vélez Cantos y Carmen Vanegas Espinoza

Recepción: 30/03/2022 **Aceptación:** 26/06/2022 **Publicación:** 31/07/2022

Abstract This article deals with the construction of a Green harmonic function in a domain consisting of an infinite horizontal band in \mathbb{C} of amplitude π whose bounded is mixed under the Dirichlet-Neumann conditions, such a function will be generated using analytical processes based on the method of reflections. The ideas produced in this research can be used in other types of mixed problems and other partial differential equations whose domains are delimited or not. The Green function generated allows obtaining the Poisson Kernel, which leads to the production of integral representations of solutions of boundary value problems in partial differential equation.


Keywords: Green's Harmonic Function, Reflections Method, Dirichlet's Boundary Condition, Neumann's Boundary Condition, Mixed boundary condition.

Resumen: En el presente artículo se aborda la construcción de una Función armónica de Green para un dominio consistente en una banda horizontal infinita en \mathbb{C} de amplitud π cuya frontera es mixta bajo las condiciones Dirichlet-Neumann, tal función se generará empleando procesos analíticos basados en el método de las reflexiones. Las ideas producidas en esta investigación se pueden utilizar en otros tipos de problemas mixtos y otras ecuaciones en derivadas parciales cuyos dominios sean delimitados o no. La función de Green generada permite la obtención del Kernel de Poisson, insumo importante en la producción de representaciones integrales de soluciones de problemas de valores de frontera.


Palabras Claves: Función Armónica de Green, Método de Reflexiones, Condición

Carlos Eduardo Vélez Cantos, Ing. Mecánico

Estudiante, Maestría Académica con Trayectoria de Investigación en Matemática, Instituto de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Manabí, Ecuador, e-mail: cevelezc@utm.edu.ec,

 <https://orcid.org/0000-0001-9774-9760>

Carmen Judith Vanegas Espinoza, Doctora en Matemática

Docente, Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Técnica de Manabí, Manabí, Ecuador, e-mail: carmen.vanegas@utm.edu.ec,  <https://orcid.org/0000-0003-0748-5963>

de frontera de Dirichlet, Condición de frontera de Neumann, Condición de frontera mixta.

1 Introducción

La ingeniería es una de las ciencias con muchas aplicaciones matemáticas donde se estudian las soluciones a la mayoría de problemas sobre mecánica (sólidos y fluidos), fenómenos relacionados al calor, acústica, electromagnetismo, mecánica cuántica, entre otros (Nagle, 2017); tales fenómenos pueden modelarse para obtener soluciones óptimas a partir de problemas con valores en la frontera para Ecuaciones en Derivadas Parciales. Es sabido que un problema de valor de frontera involucra una ecuación diferencial y unas condiciones de borde cuya solución resuelven un fenómeno determinado.

La función armónica de Green es solución fundamental para el operador de Laplace $\Delta u = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}u$ para dominios regulares en el plano \mathbb{D} con valores de frontera que se anulan, existe para cualquier dominio en el cual el problema de Dirichlet sobre funciones armónicas con datos de límites continuos tiene solución. Así, en principio, la existencia de la función armónica de Green está garantizada para una amplia clase de dominios (incluso \mathbb{C}). Por lo tanto, dado que a través de la función de Green se proporciona la solución al problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson, es importante conocerla explícitamente (Begehr y Vaitsiakhovich, 2010a). La función armónica de Green para dominios simplemente conexos en \mathbb{C} puede obtenerse por varias vías (Begehr y Vaitsiakhovich, 2010b): usando el método de invarianza conforme a través del mapeo conforme en dominios acotados o no acotados, conexos o múltiplemente conexos (Vergara y Vanegas, 2021), luego en dominios poligonales este mapeo se obtiene por medio de la fórmula de Schwarz-Christoffel (Cedeño y Vanegas, 2022; Abdymanapov y Tungatarov, 2005; Wang y Wang, 2010; Driscoll y Trefethen, 2002), sin embargo a veces estos mapeos conformes resultan ser algo complicados, para estos casos se recurre al método de las reflexiones (Begehr, 2015; Begehr y Vaitsiakhovich, 2013), citado por primera vez por (Villat, 1911) y usado ampliamente en (Begehr, 2005; Lin, 2020; Vaitsiakhovich, 2008; Shupeyeva, 2013b; Wang, 2011) y que consiste básicamente en construir un mosaico en el plano \mathbb{C} a partir de las sucesivas reflexiones de un punto a través de las fronteras, los puntos que forman este mosaico según las condiciones de frontera producen una función meromorfa (Shupeyeva, 2016; Natanzon, 2019) que es insumo necesario para formar una función armónica de Green, esto sumado a representaciones integrales que involucran la función de Green, proporcionan una solución a un problema de valor de frontera con condiciones de borde mixtas. El método funciona para varios dominios especiales cuya frontera se compone de arcos circulares o líneas rectas, por ejemplo discos, sectores circulares, medios planos, bandas, medias bandas, conos, anillos concéntricos, franjas hiperbólicas y otros más (Vaitekhovich, 2008; Begehr y Vaitsiakhovich, 2010b; Lin, 2020; Taghizadeh y Mohammadi, 2017; Begehr y Vai-

tekhovich, 2013; Begehr, 2014; Shupeyeva, 2013a; Begehr y Vaitekhovich, 2012; Akel y Begehr, 2016; Anas, Abd Albasset, y Hasan, 2018).

Con este antecedente en la presente investigación se plantea:

Obtener explícitamente la Función Armónica de Green $G_1(z, \zeta)$ para un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ consistente en una banda horizontal infinita de amplitud π en cuyas fronteras se plantean condiciones de Dirichlet y condiciones de Neumann, usando el método de las reflexiones.

Para cumplir tal objetivo se esbozan los siguientes objetivos específicos:

1. Aplicar el método de las reflexiones en la generación de los puntos (ceros y polos) a partir de un $z \in \Omega$ bajo las diferentes condiciones de borde.
2. Generar y comprobar la función meromorfa resultante quien es la base en la construcción de la candidata a función de Green.

El desarrollo del presente artículo conlleva la siguiente estructura: En la sección 2 se dan las principales definiciones y teoremas que sirven de base teórica en la construcción de una función de Green como son: la definición del método de las reflexiones, las propiedades que cumple una función de Green y la definición de la solución fundamental; en la sección 3 y en respuesta a lo planteado en el objetivo específico 2, se aplica la reflexión de un ζ sobre dos fronteras que hacen las veces de espejos: $Im(z) = 0$ con condiciones de borde de Dirichlet y $Im(z) = \pi$ cuyas condiciones de borde obedecen a las condiciones de Neumann. En base a lo propuesto en el objetivo específico 3, la generación de una serie de polos y ceros da paso a un mosaico en el plano \mathbb{C} y consecuentemente a una función meromorfa, ingrediente principal en la construcción de una expresión que es candidata a función armónica de Green, con la aplicación de las condiciones necesarias se logra establecer lo planteado en el objetivo principal.

2 Preliminares

2.1 Función Armónica de Green

Definición. (Begehr, 1994) Una función $G(z, z_0)$ en un dominio simplemente conexo Ω de \mathbb{C} que tiene como propiedades:

1. $G(z, z_0)$ es armónica en $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$,
2. $\log|z - z_0| + G(z, z_0)$ es armónica en la vecindad de z_0 ,
3. $\lim_{z \rightarrow t \in \partial\Omega} G(z, z_0) = 0$;

Se la denomina función de Green en Ω para el operador de Laplace, además:

Teorema. La función de Green cumple adicionalmente:

1. $G(z, z_0) > 0$,
2. $G(z, z_0) = G(z_0, z)$

2.2 *Parqueting-Reflections Principle*

Una de las herramientas más importantes para construir funciones armónicas de Green para el operador de Laplace Δ , es el llamado *Parqueting-Reflections Principle* o principio de las reflexiones, éste se aplica a un dominio plano \mathbb{D} en \mathbb{C} si su frontera consiste en arcos de círculos o líneas rectas, tales que las reflexiones continuas de un punto del dominio en las fronteras conducen a un mosaico de \mathbb{C} o de varias muestras de \mathbb{C} . El método se describe completamente en numerosos artículos de H. Begehr y otros autores (Begehr, Burgumbayeva, Dauletkulova, y Lin, 2020).

Es conocido que en el plano complejo \mathbb{C} , los círculos y líneas rectas se representan mediante ecuaciones de la forma (Begehr, 2015):

$$\Gamma = \alpha z \bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + \beta = 0, \quad 0 < a\bar{a} - \alpha\beta, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Definición. Para $z \in \mathbb{C}$, el punto z_r que satisface:

$$\alpha z_r \bar{z} + \bar{a}z_r + a\bar{z} + \beta = 0, \quad (2)$$

es llamada la reflexión del punto z sobre Γ .

Seguidamente en la subsección (2.3) se muestra un ejemplo (Gamelin, 2001) de una función de Green para el semiplano superior mediante la reflexión de $\zeta \in \mathbb{H}$:

2.3 *Función de Green en $\mathbb{H} \subset \mathbb{C} = \text{Im}(z) > 0$*

Para $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$, la función de Green toma la forma:

$$\begin{aligned} G(z, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \left(\log |z - \zeta| - \log |z - \bar{\zeta}| \right) \\ G(z, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| \end{aligned} \quad (3)$$

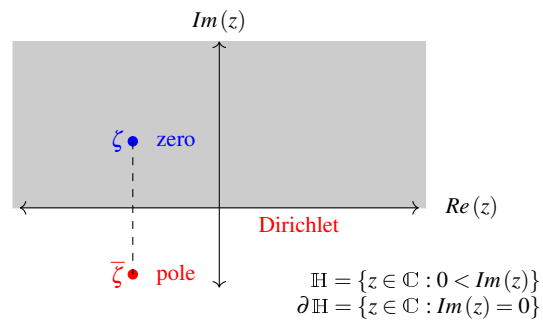


Figura 1: Función de Green para \mathbb{H}
Fuente: Creación propia

2.4 Convergencia para productos infinitos

Definición. Sea $(z_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos. Si $\prod_{j=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces $\prod_{j=1}^{\infty} z_n$ converge (Trench, 1999). En otros términos, si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1| < +\infty, \quad \text{entonces} \quad \prod_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{converge}$$

3 Resultados

3.1 Construcción de la función candidata a función de Green en

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}(z) < \pi\}$$

Para generar el mosaico (parquet) infinito en el dominio, tómesese $\zeta \in \Omega$, quien será sometido al proceso de reflexión en ambas fronteras, estas son espejos que generan imágenes, en este caso las reflexiones de ζ sobre $\Gamma_1 : \text{Im}(z) = \pi$ y sobre $\Gamma_2 : \text{Im}(z) = 0$ dan como resultado los puntos ζ_u y ζ_d respectivamente, al repetir el proceso con estos puntos sobre Γ_1 y Γ_2 y a su vez con todos los puntos reflejados, proporcionan un entramado que cubre \mathbb{C} , cada punto será etiquetado como un *polo* o un *cero* de acuerdo a las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann (Lin, 2021). En la Figura (2) se muestra el proceso geométrico de construcción de cada punto.

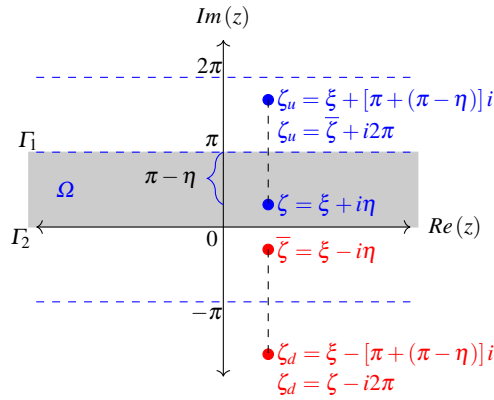


Figura 2: Reflexiones de $\zeta \in \Omega$ sobre Γ_1 y Γ_2
Fuente: Creación propia

Al continuar indefinidamente el proceso se obtiene un parquet que cubre completamente el plano complejo:

La Figura (3) permite observar de forma notable un patrón de recurrencias de puntos que son resultado de la reflexión de ζ a ambos lados de las fronteras, estos puntos (ceros y polos) se los clasifica y etiqueta como:

- **Ceros:** $\zeta, \bar{\zeta} \pm i2\pi, \zeta \pm i4\pi, \bar{\zeta} \pm i6\pi, \zeta \pm i8\pi, \bar{\zeta} \pm i10\pi, \zeta \pm i12\pi, \dots$
- **Polos:** $\zeta, \zeta \pm i2\pi, \bar{\zeta} \pm i4\pi, \zeta \pm i6\pi, \bar{\zeta} \pm i8\pi, \zeta \pm i10\pi, \bar{\zeta} \pm i12\pi, \dots$

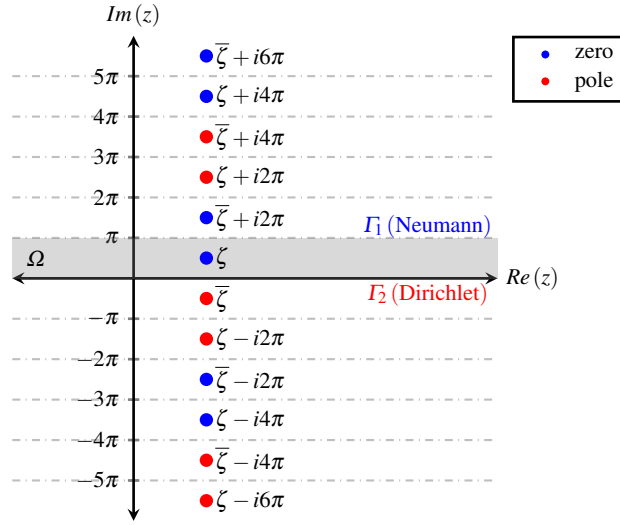


Figura 3: Cubrimiento de polos y ceros sobre \mathbb{C}
Fuente: Creación propia

Por lo que una *candidata* a Función de Green para Ω es:

$$G_{1\Omega}(z, \zeta) = \log \left| \frac{(z - \zeta) \prod_{k=0}^{\infty} (z - \bar{\zeta} - 2(2k+1)\pi i) (z - \bar{\zeta} + 2(2k+1)\pi i)}{(z - \bar{\zeta}) \prod_{k=0}^{\infty} (z - \zeta - 2(2k+1)\pi i) (z - \zeta + 2(2k+1)\pi i)} \right|$$

$$\times \left| \frac{(z - \zeta - 2(2k+2)\pi i) (z - \zeta + 2(2k+2)\pi i)}{(z - \bar{\zeta} - 2(2k+2)\pi i) (z - \bar{\zeta} + 2(2k+2)\pi i)} \right| \quad (4)$$

3.2 Comprobación de las propiedades para $G_{1\Omega}$ como Función Armónica de Green

Al manipular algebraicamente $G_{1\Omega}$ mostrada en (4) se llega a:

$$G_{1\Omega}(z, \zeta) = \log \left| \frac{(z - \zeta) \prod_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{z - \bar{\zeta}}{2\pi(2k+1)} \right)^2 + 1 \right) \left(\left(\frac{z - \zeta}{4\pi(k+1)} \right)^2 + 1 \right)}{(z - \bar{\zeta}) \prod_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{z - \zeta}{2\pi(2k+1)} \right)^2 + 1 \right) \left(\left(\frac{z - \bar{\zeta}}{4\pi(k+1)} \right)^2 + 1 \right)} \right| \quad (5)$$

Tratando los productos de (5) por separado y basados en la Definición 2.4 sobre convergencia se comprueba que estos convergen por lo tanto la productoria incluida en (4) converge :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - \bar{\zeta}}{2\pi(2k+1)} \right)^2 < +\infty &\implies \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{z - \bar{\zeta}}{2\pi(2k+1)} \right)^2 + 1 \right) \text{ converge} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - \zeta}{4\pi(k+1)} \right)^2 < +\infty &\implies \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{z - \zeta}{4\pi(k+1)} \right)^2 + 1 \right) \text{ converge} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - \zeta}{2\pi(2k+1)} \right)^2 < +\infty &\implies \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{z - \zeta}{2\pi(2k+1)} \right)^2 + 1 \right) \text{ converge} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - \bar{\zeta}}{4\pi(k+1)} \right)^2 < +\infty &\implies \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{z - \bar{\zeta}}{4\pi(k+1)} \right)^2 + 1 \right) \text{ converge} \end{aligned}$$

Con el uso de propiedades (Gamelin, 2001), la expresión (4) es escrita en forma de sumatoria:

$$\begin{aligned} 2G_{1\Omega}(z, \zeta) &= \log \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \log \left| \frac{(z - \bar{\zeta} - 2(2k+1)\pi i)}{(z - \zeta - 2(2k+1)\pi i)} \right. \\ &\quad \times \frac{(z - \bar{\zeta} + 2(2k+1)\pi i)(z - \zeta - 2(2k+2)\pi i)}{(z - \zeta + 2(2k+1)\pi i)(z - \bar{\zeta} - 2(2k+2)\pi i)} \\ &\quad \left. \times \frac{(z - \zeta + 2(2k+2)\pi i)}{(z - \bar{\zeta} + 2(2k+2)\pi i)} \right|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Con esto se procederá a comprobar la Definición 2.1:

3.2.1 $G_{1\Omega}$ es armónica en $\Omega \setminus \{\zeta\}$.

Demostración. Manipulando convenientemente $G_{1\Omega}$ en (4) se tiene:

$$\begin{aligned}
 2G_{1\Omega}(z, \zeta) &= \log(z - \zeta) - \log(z - \bar{\zeta}) \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} - 2(2k+1)\pi i] + \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} + 2(2k+1)\pi i] \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta - 2(2k+2)\pi i] + \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta + 2(2k+2)\pi i] \\
 &- \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta - 2(2k+1)\pi i] - \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta + 2(2k+1)\pi i] \\
 &- \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} - 2(2k+2)\pi i] - \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} + 2(2k+2)\pi i] \quad (7)
 \end{aligned}$$

Al aplicar $\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}$ a la expresión (7) se concluye que:

$$\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} [2G_{1\Omega}] = 0$$

□

3.2.2 $2G_{1\Omega}(z, \zeta) - \frac{1}{2} \log|z - \zeta|^2$ es armónica en Ω con $\zeta \in \Omega$:

Demostración. Sea $\mathcal{M} = 2G_{1\Omega}(z, \zeta) - \log|z - \zeta|$, operando se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \log(z - \zeta) - \log(z - \bar{\zeta}) - \log|z - \zeta| \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} - 2(2k+1)\pi i] + \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} + 2(2k+1)\pi i] \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta - 2(2k+2)\pi i] + \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta + 2(2k+2)\pi i] \\
 &- \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta - 2(2k+1)\pi i] - \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \zeta + 2(2k+1)\pi i] \\
 &- \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} - 2(2k+2)\pi i] - \sum_{k=0}^{\infty} \log[z - \bar{\zeta} + 2(2k+2)\pi i] \quad (8)
 \end{aligned}$$

Nótese que la expresión (8) posee a $\bar{\zeta}$ y a los puntos de las formas: $\bar{\zeta} \pm 2(2k+1)\pi i$, $\zeta \pm 2(2k+2)\pi i$, $\zeta \pm 2(2k+1)\pi i$ y $\bar{\zeta} \pm 2(2k+2)\pi i$. Por lo tanto \mathcal{M} no posee singularidades en el dominio, concluyendo que es armónica en Ω . \square

3.2.3 $G_{1\Omega}(z, \zeta) = 0$ en Γ_2 , es decir que: $\lim_{\zeta \rightarrow t \in \Gamma_2} G_{1\Omega}(z, \zeta) = 0$.

Demostración. Si $G_{1\Omega}$ se anula en Γ_2 , implica que: $\lim_{\zeta \rightarrow t \in \Gamma_2} G_1(z, \zeta) = 0$. Por lo tanto

$\zeta \rightarrow t$ y además $\bar{\zeta} \rightarrow \bar{t}$, con $t \in \Gamma_2$, obsérvese adicionalmente que $\Gamma_2 = \text{Re}(z)$ de donde $\zeta = \bar{\zeta} = t = x + 0i$, hecho que es visible en la Figura (4).

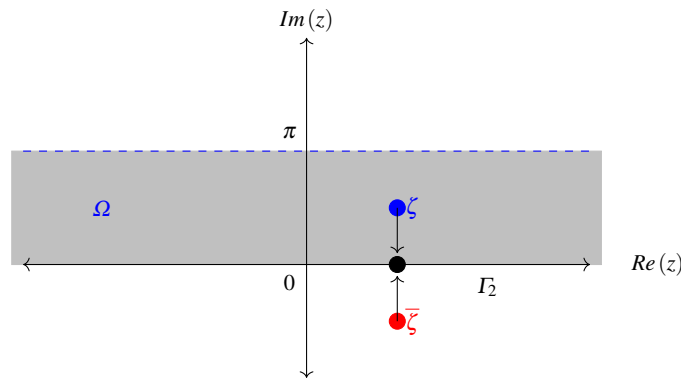


Figura 4: Condición de borde de Dirichlet.

Fuente: Creación propia

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow t \in \Gamma_2} G_{1\Omega}(z, \zeta) &= \log \left| \frac{z-t}{z-t} \right|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \log \left| \frac{(z-t-2(2k+1)\pi i)}{(z-t-2(2k+1)\pi i)} \right. \\ &\quad \times \frac{(z-t+2(2k+1)\pi i)(z-t-2(2k+2)\pi i)}{(z-t+2(2k+1)\pi i)(z-t-2(2k+2)\pi i)} \\ &\quad \left. \times \frac{(z-t+2(2k+2)\pi i)}{(z-t+2(2k+2)\pi i)} \right|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Concluyendo que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow t \in \Gamma_2} G_1(z, \zeta) = 0$$

\square

Observación 1. Las propiedades del Teorema 2.1 están garantizadas para $G_{1\Omega}$

3.2.4 Condición de frontera de Neumann

Se debe recordar que:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = h, \quad \text{además} \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} = \langle \vec{n}, \nabla G \rangle, \quad \text{con} \quad \vec{n} = (0, 1)$$

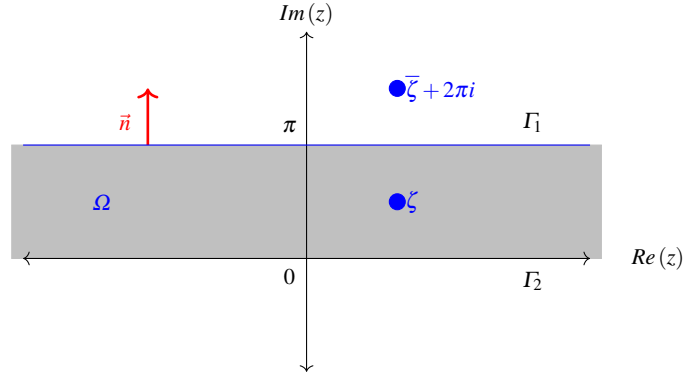


Figura 5: Condición de frontera de Neumann
Fuente: Creación propia

Demostración. Sea un $\zeta = \xi + i\eta$, los puntos ζ y $\bar{\zeta} + 2\pi i$ tienden a Γ_1 , por lo que: $\zeta = \bar{\zeta} + 2\pi i = \xi + \pi i$, además tomando para este caso la función meromorfa: $P_k(z, \zeta)$, y designando: $a_k = 2(2k+1)\pi i$, y $b_k = 2(2k+2)\pi i$:

$$P_k(z, \zeta) = \frac{(z - \bar{\zeta} - a_k)(z - \bar{\zeta} + a_k)(z - \zeta - b_k)(z - \zeta + b_k)}{(z - \zeta - a_k)(z - \zeta + a_k)(z - \bar{\zeta} - b_k)(z - \bar{\zeta} + b_k)} \quad (10)$$

La derivada direccional para este caso puede definirse como: $\vec{\partial}_v = \partial_y$

$$-i\partial_y = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) - \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) = \partial_z - \partial_{\bar{z}}$$

$$\begin{aligned} \partial_z \left(\log |P_k(z, \zeta)|^2 \right) &= \partial_z \left(\log P_k(z, \zeta) + \overline{\log P_k(z, \zeta)} \right) = \partial_z \log P_k(z, \zeta) \\ \partial_z \log P_k(z, \zeta) &= \frac{1}{z - \bar{\zeta} - a_k} + \frac{1}{z - \bar{\zeta} + a_k} + \frac{1}{z - \zeta - b_k} + \frac{1}{z - \zeta + b_k} \\ &\quad - \frac{1}{z - \zeta - a_k} - \frac{1}{z - \zeta + a_k} - \frac{1}{z - \bar{\zeta} - b_k} - \frac{1}{z - \bar{\zeta} + b_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}} \left(\log |P_k(z, \zeta)|^2 \right) &= \partial_{\bar{z}} \left(\log P_k(z, \zeta) + \log \overline{P_k(z, \zeta)} \right) = \overline{\partial_z \log P_k(z, \zeta)} \\ \overline{\partial_z \log P_k(z, \zeta)} &= \frac{1}{\bar{z} - \zeta + a_k} + \frac{1}{\bar{z} - \zeta - a_k} + \frac{1}{\bar{z} - \zeta + b_k} + \frac{1}{\bar{z} - \zeta - b_k} \\ &\quad - \frac{1}{\bar{z} - \zeta + a_k} - \frac{1}{\bar{z} - \zeta - a_k} - \frac{1}{\bar{z} - \zeta + b_k} - \frac{1}{\bar{z} - \zeta - b_k}\end{aligned}$$

De tal forma que para $z = x + i\pi$ con $x \in \mathbb{R}$ y $d_k = (4k+1)\pi i$, $e_k = (4k+3)\pi i$, $f_k = (4k+5)\pi i$, se tiene:

$$\begin{aligned}-i\partial_y \left(\log |P_k(z, \zeta)|^2 \right) &= \frac{1}{x - \zeta - d_k} + \frac{1}{x - \zeta + e_k} + \frac{1}{x - \zeta - e_k} + \frac{1}{x - \zeta + f_k} \\ &\quad - \frac{1}{x - \zeta - d_k} - \frac{1}{x - \zeta + e_k} - \frac{1}{x - \zeta - e_k} - \frac{1}{x - \zeta + f_k} \\ &\quad - \frac{1}{x - \zeta + d_k} - \frac{1}{x - \zeta - e_k} - \frac{1}{x - \zeta + e_k} - \frac{1}{x - \zeta - f_k} \\ &\quad + \frac{1}{x - \zeta + d_k} - \frac{1}{x - \zeta - e_k} - \frac{1}{x - \zeta + e_k} - \frac{1}{x - \zeta - f_k}\end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned}-2i\partial_y G_1(z, \zeta) &= \frac{1}{x - \zeta + \pi i} - \frac{1}{x - \zeta + \pi i} - \frac{1}{x - \zeta - \pi i} + \frac{1}{x - \zeta - \pi i} \\ &\quad + \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta - d_k} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta + d_{k+1}} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta - d_k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta + d_{k+1}} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta + d_k} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta - d_{k+1}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta + d_k} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta - d_{k+1}}\end{aligned}$$

Designando $d_0 = \pi i$, $f_k = d_{k+1}$ y además $k \mapsto k-1$

$$\begin{aligned}
-2i\partial_y G_1(z, \zeta) &= \frac{1}{x - \zeta + d_0} - \frac{1}{x - \bar{\zeta} + d_0} - \frac{1}{x - \bar{\zeta} - d_0} + \frac{1}{x - \zeta - d_0} + \frac{1}{x - \bar{\zeta} - d_0} \\
&+ \sum_{k=1}^N \frac{1}{x - \bar{\zeta} - d_k} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{x - \zeta + d_k} + \frac{1}{x - \zeta + d_{N+1}} - \frac{1}{x - \zeta - d_0} \\
&- \sum_{k=1}^N \frac{1}{x - \zeta - d_k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{x - \bar{\zeta} + d_k} - \frac{1}{x - \bar{\zeta} + d_{N+1}} - \frac{1}{x - \zeta + d_0} \\
&- \sum_{k=1}^N \frac{1}{x - \zeta + d_k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{x - \bar{\zeta} - d_k} - \frac{1}{x - \bar{\zeta} - d_{N+1}} + \frac{1}{x - \bar{\zeta} + d_0} \\
&+ \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \bar{\zeta} + d_k} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{x - \zeta - d_k} + \frac{1}{x - \zeta - d_{N+1}}
\end{aligned}$$

Simplificando y manipulando algebraicamente:

$$\begin{aligned}
-2i\partial_y G_1(z, \zeta) &= \frac{1}{x - \zeta + d_{N+1}} - \frac{1}{x - \bar{\zeta} + d_{N+1}} - \frac{1}{x - \bar{\zeta} - d_{N+1}} + \frac{1}{x - \zeta - d_{N+1}} \\
&= \frac{x - \bar{\zeta} - d_{N+1} - x + \zeta - d_{N+1}}{(x - \zeta + d_{N+1})(x - \bar{\zeta} - d_{N+1})} + \frac{x - \bar{\zeta} + d_{N+1} - x + \zeta + d_{N+1}}{(x - \zeta - d_{N+1})(x - \bar{\zeta} + d_{N+1})} \\
&= \frac{\zeta - \bar{\zeta} - 2d_{N+1}}{|x + d_{N+1} - \zeta|^2} + \frac{\zeta - \bar{\zeta} + 2d_{N+1}}{|x - d_{N+1} - \zeta|^2}
\end{aligned}$$

Obsérvese que $d_{N+1} = (4N + 5)\pi i$, se tendría:

$$\begin{aligned}
-2i\partial_y G_1(z, \zeta) &= \frac{\zeta - \bar{\zeta} - 2(4N + 5)\pi i}{|x + (4N + 5)\pi i - \zeta|^2} + \frac{\zeta - \bar{\zeta} + 2(4N + 5)\pi i}{|x - (4N + 5)\pi i - \zeta|^2} \\
&= \frac{-8N\pi i + (\zeta - \bar{\zeta} - 10\pi i)}{|(x - \zeta + 5\pi i) + 4N\pi i|^2} - \frac{-8N\pi i + (\bar{\zeta} - \zeta - 10\pi i)}{|(x - \zeta - 5\pi i) - 4N\pi i|^2} \\
&= \frac{-\frac{8\pi i}{N} + \frac{\zeta - \bar{\zeta} - 10\pi i}{N^2}}{\left|\frac{x - \zeta + 5\pi i}{N} + 4\pi i\right|^2} - \frac{-\frac{8\pi i}{N} + \frac{\bar{\zeta} - \zeta - 10\pi i}{N^2}}{\left|\frac{x - \zeta - 5\pi i}{N} - 4\pi i\right|^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{N \rightarrow +\infty} -2i\partial_y G_1(z, \zeta) = 0 \quad \text{para} \quad \zeta = \xi + \pi i$$

□

4 Discusión

La función de Green presentada en este trabajo de investigación para el dominio descrito, ha sido construida empleando uno de los métodos con los que usualmente se construye este tipo de funciones (Begehr y Vaitsiakhovich, 2010b), como son: la invarianza conforme, la fórmula de Schwarz-Christoffel y el método de las reflexiones. Cada uno de los métodos presenta ventajas y desventajas de acuerdo al dominio en que se plantea, esto nos lleva a pensar que no existe un método infalible con el cual construir una función de Green, sin embargo, los autores no han encontrado dentro de la literatura científica trabajos en donde se construya una función de Green para fronteras mixtas en dominios regulares como el presentado en este artículo. Los trabajos de Begehr y sus discípulos muestran una utilidad importante pero enfocados en dominios bajo condiciones de frontera única, por tanto, he allí la importancia de este trabajo de investigación.

5 Conclusiones

Con el uso del método de las reflexiones para el dominio Ω se ha establecido una serie de puntos que han dado como consecuencia una función, la que sometida a las argumentaciones y pruebas respectivas dan cuenta de una Función de Green ($G_{1\Omega}(z, \zeta)$) para la banda horizontal en \mathbb{C} con ancho π y cuyas fronteras obedecen a condiciones de borde mixta. La función $G(z, \zeta)$ es ingrediente principal en la construcción del Kernel de Poisson (Axler, Bourdon, y Ramey, 2011) con el que se pueden obtener soluciones óptimas a problemas específicos con valores en la frontera y otras ecuaciones en derivadas parciales. Este y otros métodos son objeto de importantes estudios en la actualidad, con lo que estamos seguros que existirán muchos resultados interesantes dentro de este transcendental campo de las matemáticas.

6 Bibliografía

Referencias

- Abdymanapov, H., S. Begehr, y Tungatarov, A. (2005). Some Schwarz problems in a quarter plane. *Eurasian Math.J.3*(3), 22–35. doi: 10.1142/9789812773159_0001
- Akel, M., y Begehr, H. (2016). Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains. *Mathematische Nachrichten*, 290(4), 490–506. doi: 10.1002/mana.201500501

- Anas, M., Abd Albasset, Y., y Hasan, B. (2018). The harmonic green function for a right isosceles triangle. *International Journal of Novel Research in Physics Chemistry Mathematics Novelty Journals*, 5, 9–18. Descargado de <https://www.noveltyjournals.com/upload/paper/The%20Harmonic%20Green-1414.pdf>
- Axler, S. J., Bourdon, P., y Ramey, W. (2011). *Harmonic function theory*. Springer. doi: 10.1007/978-1-4757-8137-3
- Begehr, H. (1994). *Complex analytic methods for partial differential equations*. Singapore: World Scientific Pub. Co. Inc. Descargado de <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/2162>
- Begehr, H. (2005). Boundary value problems in complex analysis ii. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 65-85.
- Begehr, H. (2014). Green function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains. *Applicable Analysis*, 93(11), 2370–2385. doi: 10.1080/00036811.2014.926336
- Begehr, H. (2015). The parqueting-reflection principle. *Current Trends in Analysis and Its Applications*, 77-84. doi: 10.1007/978-3-319-12577-0_11
- Begehr, H., Burgumbayeva, S., Dauletkulova, A., y Lin, H. (2020). Harmonic green functions for the almaty apple. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(11), 1814-1825. Descargado de <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1681413> doi: 10.1080/17476933.2019.1681413
- Begehr, H., y Vaitekhovich, T. (2012). Harmonic dirichlet problem for some equilateral triangle. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57(2-4), 185–196. doi: 10.1080/17476933.2011.598932
- Begehr, H., y Vaitekhovich, T. (2013). Schwarz problem in lens and lune. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1), 76–84. doi: 10.1080/17476933.2013.799152
- Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2010a). Green functions, reflections, and plane parqueting. *Eurasian Mathematical Journal*, 17-31.
- Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2010b). How to find harmonic green functions in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(12), 1169–1181. doi: 10.1080/17476933.2010.534157
- Begehr, H., y Vaitsiakhovich, T. (2013, 01). The parqueting-reflection principle for constructing green functions..

- Cedeño, R., y Vanegas, C. (2022). Función de green vía mapeo conforme para el semiplano superior agrietado. *Revista MATEMÁTICA*, 20(1). Descargado de <http://www.revistas.espol.edu.ec/index.php/matematica/article/view/1007/902>
- Driscoll, T. A., y Trefethen, L. N. (2002). *Schwarz-christoffel mapping*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511546808
- Gamelin, T. W. (2001). *Complex analysis*. Springer, New York, NY. doi: 10.1007/978-0-387-21607-2
- Lin, H. (2020, Sep). Harmonic green and neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 67(1), 79–95. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2020.1816984> doi: 10.1080/17476933.2020.1816984
- Lin, H. (2021). *Parqueting-reflection principle and boundary value problems in some circular polygons* (Tesis Doctoral). Descargado de <http://dx.doi.org/10.17169/refubium-32948>
- Nagle, R. K. (2017). *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. Pearson.
- Natanzon, S. (2019). *Complex analysis, riemann surfaces and integrable systems*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-030-34640-9_2
- Shupeyeva, B. (2013a). Harmonic boundary value problems in a quarter ring domain. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 3(4). doi: 10.1515/apam-2012-0025
- Shupeyeva, B. (2013b). *Some basic boundary value problems for complex partial differential equations in quarter ring and half hexagon* (Tesis Doctoral). Descargado de <http://dx.doi.org/10.17169/refubium-12787>
- Shupeyeva, B. (2016, 01). Dirichlet problem for complex poisson equation in a half hexagon domain. *Journal of Complex Analysis*, 2016, 1-8. doi: 10.1155/2016/8097095
- Taghizadeh, N., y Mohammadi, V. S. (2017). Dirichlet and neumann problems for poisson equation in half lens. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, 52(2), 61–69. doi: 10.3103/s1068362317020017
- Trench, W. F. (1999). Conditional convergence of infinite products. *The American Mathematical Monthly*, 106(7), 646–651. Descargado de <http://www.jstor.org/stable/2589494>

- Vaitekhovich, T. S. (2008). Boundary value problems to first-order complex partial differential equations in a ring domain. *Integral Transforms and Special Functions*, 19(3), 211–233. doi: 10.1080/10652460701736569
- Vaitsiakhovich, T. (2008). *Boundary value problems for complex partial differential equations in a ring domain* (Doctoral Thesis, Freie Universität Berlin). Descargado de www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_000000003859
- Vergara, J., y Vanegas, C. (2021, 1). A fundamental solution for the laplace operator in a doubly connected domain. *Bull. Comput. Appl. Math.*, 9, 85-96.
- Villat, H. (1911). Sur le problème de dirichlet relatif á une couronne circulaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 680-682.
- Wang, Y. (2011). *Boundary value problems for complex partial differential equations in fan-shaped domains* (Doctoral Thesis, Freie Universität Berlin). Descargado de www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_000000021359
- Wang, Y., y Wang, Y. (2010, 03). On schwarz-type boundary-value problems of polyanalytic equation on a triangle. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica*, 84.