COMPENDIUM, ISSN Impresa 1390-8391, ISSN Online 1390-9894, Volumen 4, Nº 7, Abril, 2017, pp 107 - 119

SISTEMAS DE VOTACIÓN Y EL TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE ARROW

Kevin R. Rojas, J. Marilú Arteta, Santiago Bucaram[1]

Resumen

Fecha de Recepción: 10 de Marzo del 2017 – Fecha de aprobación: 21 de Marzo del 2017

En este artículo se analiza la eficiencia de distintos sistemas de votación y de elección social de alternativas. El objetivo se enfoca en demostrar cual es el método que permite minimizar la cantidad de errores en un proceso de elección y, por medio de esto, hallar un sistema de elección social donde las preferencias de toda la población, o por lo menos de la mayoría de individuos de un colectivo, sean tomadas en cuenta para así llegar a la selección más idónea. Además, se evaluará si un sistema electoral representa fielmente las opiniones de la sociedad. Para este propósito se han considerado dos sistemas políticos usados comúnmente en las sociedades: 1) votación unánime y 2) mayoría simple. En ambos casos se establece una relación directa con el Teorema de la Imposibilidad de Arrow y se demuestra las condiciones en que cada uno de estos sistemas puede ser aplicable.

Palabras clave: *Bienestar Social, Mayoría Simple, Unanimidad, Sistema Bipartidista, Colectivo, Individuos, Preferencias Sociales, Democracia.*

Author for correspondence
Email:
[1] sbucaram@usfq.edu.ec (Santiago Bucaram), School of Economics, Universidad San Francisco de Quito, Ecuador.

VOTING SYSTEMS AND THE ARROW IMPOSSIBILITY THEOREM

Abstract

This article analyzes the efficiency of different systems of voting and social choice of alternatives. The objective is to demonstrate which method allows to minimize the number of errors in a process of choice and then to find a system of social choice where the preferences of the entire population, or at least its majority, are taken into account to define the most suitable selection. In addition, we evaluate two electoral systems commonly used in any society, namely: 1) unanimous vote, and 2) simple majority. In all cases a direct relationship is established with the Arrow Impossibility Theorem and we demonstrate the conditions under which each of these systems may be applicable.

Keywords: *Social Welfare, Simple Majority, Unanimity, Bipartisan System, Collective, Individuals, Social Preference, Democracy.*

1. Introducción

La teoría económica argumenta que el fin principal del mercado es la coordinación entre la oferta (i.e. las firmas) y la demanda (i.e. los hogares) para obtener un equilibrio en el cual se maximice el bienestar de estos dos grupos de agentes. El sistema de precios es el mecanismo de comunicación que permite a los agentes económicos coordinar las decisiones de consumo y producción para llegar al equilibrio competitivo (Mas-Colell et. al.1995). No obstante, Arrow (1963), afirma que este sistema de coordinación de mercado no se encuentra exento de fallas o distorsiones. Estas distorsiones pueden resumirse en los llamados bienes y servicios públicos, así como externalidades, incertidumbre y distribución de la información entre agentes. Varios de estos problemas se los puede agrupar en lo que se conoce como problemas de elecciones sociales, de ahí la importancia de entender como los agentes toman estas decisiones con el objeto de aumentar el bienestar de la sociedad.

Hay que enfatizar que el bienestar social es un concepto bastante amplio; sin embargo, en la teoría económica se lo define como el conjunto de factores que llevan a un determinado grupo de individuos con intereses en común a alcanzar la satisfacción de sus necesidades en base a un conjunto de preferencias pre-definidas (Maskin & Sen, 2014). Estos intereses en común abren la posibilidad de encontrar una posible solución de estas falencias del mercado a través de un proceso electoral que permite dilucidar la decisión de mayor aceptación colectiva. No obstante, hay que recalcar que, a diferencia de una canasta de bienes, una decisión social se caracteriza por ser endógena, subjetiva y cualitativa para la cual no se puede asignar una medida (Savage 1954, Arrow 1963 y Krepps 1994). Dichas expectativas toman en cuenta información que no es posible expresar dentro de un rango medible, ya que están compuestas por datos que relacionan al individuo en específico con el resto de los miembros de la sociedad. Todo esto dificulta la optimización de decisiones sociales, un problema que se analizara más detenidamente a lo largo de este documento.

2. Teorema de la imposibilidad de Arrow

En el siglo XVIII, el Marqués de Condorcet publicó uno de sus más renombradas obras: *"Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces"* (Piffano, 2009). En este documento se relata el reconocido ¨Dilema de Condorcet¨, en el cual las decisiones adoptadas por una mayoría serían incoherentes con respecto a las que adoptaría un individuo racional. Condorcet plantea distintas soluciones y al mismo tiempo denota cuestiones que vuelven imposibles estas soluciones.

Para la primera mitad del siglo XX, Duncan Black enfrentó un problema similar al planteado por Condercet cuando investigo acerca de la mayoría simple y elecciones sociales (Piffano, 2009). Más tarde, en 1950, Arrow, economista teórico motivado por Abram Bergson (1938) y su teoría acerca de una función de bienestar social, decidió estudiar más a fondo este tema, llegando a establecer cinco axiomas para la creación de dicha función de bienestar social. Su conclusión fue igual a la ya mencionada, soluciones sociales imposibles y circulares. Al final se concluye que una función de utilidad social no se puede calcular, es decir, no es posible que en dicha función se midan, se sumen o comparen las distintas funciones de utilidad de cada individuo. Esto resume la teoría de Bergson (1938) y Samuelson (1947) acerca de ¨la economía del bienestar¨ donde respalda el hecho de que los individuos ven a la utilidad como algo que es posible maximizar, sin embargo, al ser de características inconmensurables, no se las puede sumar ni comparar.

Las preferencias de cada individuo (agentes económicos) deben ser *racionales*, es decir, al no ser de carácter comparable ni medible, cada individuo debe ser capaz de entender, evaluar y luego jerarquizar estas preferencias para así poder respetar y acatar los axiomas establecidos por Arrow (1963); es decir:

a) La primera condición que deber ser cumplida, según Arrow, es que la ordenación de preferencias debe ser lineal; no hay lugar para contradicciones o ciclos, es decir cumple con:

   i. **Principio de transitividad:**

   Si una alternativa es preferida a una segunda y la segunda es preferida a una tercera, entonces la primera es preferida a la tercera (Perloff, 2012).

   ii. **Principio de reflexividad:**
   Cualquier alternativa disponible produce el mismo nivel de utilidad que ella misma (Perloff, 2012).

   iii. **Principio de completitud:**
   Todos los estados sociales o alternativas deben estar disponibles para la elección de los individuos (Perloff, 2012).

b) El segundo precepto *arrowiano* dice que, además de cumplir con la racionalidad requerida, la sociedad siempre preferirá *x* a *y*, si cada individuo prefiere *x* a *y*. Dicho de otra forma, la segunda condición es conocida como la unanimidad del colectivo o el principio débil de Pareto (Maskin & Sen, 2014).
c) La independencia de alternativas irrelevantes, como tercera condición, se basa en que, lo que es realmente importante en una elección social son las ordenaciones relativas de pares de alternativas *x* y *y* con la imposibilidad de hacer comparaciones entre la intensidad de las preferencias, tampoco se puede asumir o decir que los ordenamientos de las preferencias cambian cuando varían los estados sociales. O sea, si acrecentamos o aumentamos alternativas al proceso de elección (*x*, *y* y *z*), no debe variar la ordenación de dichas preferencias.
d) Como cuarta condición *arrowiana* tenemos el dominio irrestricto, dominio no restringido o condición U, donde la función de bienestar social no debe ser impuesta (Arrow, 1963); ya que se debe tener en consideración todas las preferencias de cada uno de los individuos y todas sus posibles combinaciones.
e) Finalmente, la condición de no dictadura (D), recoge la idea de que la función de bienestar social no debe ser dictatorial, es decir, dicha función no debe imponer las preferencias del colectivo sobre los individuos, ni tampoco establecer un ordenamiento social independiente del ordenamiento individual (Maskin & Sen, 2014). Sin embargo, existe la posibilidad de cumplir con los cuatro preceptos o axiomas *arrowianas* anteriores si y sólo si exista un dictador.

3. Democracia y Sistemas de Partidos: un enfoque bipartidista

La teoría general de los sistemas de partidos abarca los temas sobre democracia y partidos políticos, por lo cual es importante mencionar a qué nos referimos cuando hablamos de democracia. Los partidos políticos tienen un rol esencial en el ejercicio de la democracia debido a cómo surgieron y sus principales objetivos.

La democracia sintetiza tres aspectos: (i) el principio de legitimidad, el cual postula que el poder radica en los individuos que forman parte de un colectivo (el pueblo). (ii) la esencialidad del sistema político, que indica la relación directa con el poder y su titularidad; es decir, cuando un colectivo es pequeño, la interacción es altamente posible entonces el ejercicio del poder permanecerá unido (autogobierno). Sin embargo, cuando el colectivo es muy grande, es necesario separar la titularidad del poder y aplicar la democracia representativa; y (iii) la democracia, como un ideal normativo, o sea que solo se la puede analizar en base a la dinámica de cómo debería ser (Sartori, Elementos de Teoría Política, 1999).

Por otro lado, los partidos políticos son considerados la columna vertebral de cualquier sociedad o colectivo democrático sano; ya que dichos partidos representan las preferencias que presentan los individuos. Los partidos políticos surgen gracias a las sub-agrupaciones formadas en un determinado colectivo o sociedad. Entonces, un partido político es: ¨cualquier grupo político que se presenta a competir en elecciones y que puede colocar mediante ellas a sus candidatos en cargos públicos¨ (Sartori, 1976). Por lo tanto, los partidos políticos organizan a la sociedad con el fin de representar intereses sociales para el ejercicio del poder.

La importancia de los partidos políticos es para apreciar y tomar en cuenta la diversidad ideológica existente en un colectivo, ya que el poder yace en la sociedad y cualquier individuo de dicho colectivo puede representar sus preferencias. Debido al crecimiento abrupto del número de individuos fue importante crear un mecanismo de organización política que ayude a la representación del poder. Según Sartori (1976): ¨un sistema de partidos políticos es el sistema de interacciones que es resultado de la competencia entre partidos¨.

En la tipología de partidos políticos encontramos el partido único, el bipartidismo y el multipartidismo, en una sub-clasificación realizada por Sartori (Elementos de Teoría Política, 1999). Encontramos que son sistemas competitivos, es decir, está garantizada la competencia justa y equitativa donde los individuos del colectivo son el árbitro decisivo. Sin embargo, centraremos nuestra atención en el sistema bipartidista.

El bipartidismo oficialmente surge después de la revolución francesa entre conservadores y liberales. Un sistema bipartidista se da cuando dos partidos políticos están en igualdad de condiciones y equitativamente distribuidos, es decir, predominan en todo el colectivo. Para que uno de estos partidos alcance la victoria se aplica el método de mayoría simple, pero la rotación o alternancia en el poder es una expectativa latente o una posibilidad creíble. Por otro lado, en un sistema aplicado de bipartidismo también se considera la existencia de otros partidos, pero carecen de importancia en el colectivo y no alteran la situación que el poder está siendo disputado entre dos partidos. Así el formato y la mecánica seguirán siendo las propias del bipartidismo y no las propias del multipartidismo.

Una sociedad tiende a construir un sistema político a través de la polarización de puntos de vista más o menos simétricos y de intereses económicos contrapuestos (Sartori, 1999). Sin embargo, el bipartidismo no respeta a las minorías. Recalquemos que el bipartidismo también cuenta con la presencia de partidos que no influyen en la decisión de mayoría simple del colectivo.

En este artículo haremos un acercamiento a la probabilidad de encontrar una elección en un sistema bipartidista. Como se había explicado, hay dos opciones y el mecanismo de elección es el de la mayoría simple. Inmediatamente se consideran dos casos para el número de votantes, *m*.

3.1.1 Cuando m es impar:

Resulta ser un caso trivial, puesto que al tener solamente dos candidatos siempre va a existir una mayoría; considerando que un número impar puede ser escrito de la forma 2n+1 imposibilitando una división entera entre dos.

3.1.2 Cuando m es par:

Cuando el valor de *m* es par, existe la posibilidad de que la sociedad en su conjunto incline sus preferencias en partes iguales por los dos candidatos. Dado que se puede escoger únicamente entre dos candidatos y asumiendo la independencia de eventos, entonces la probabilidad de un evento específico, es decir con *m* votantes de los cuales *a* se inclinan por el primer candidato y *b* por el otro candidato, viene dada por:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

Cada evento tiene que estar dado por la cantidad de casos favorables que pudiera tener un determinado candidato. Esto es, obteniendo una mayoría entre el total de los votantes. Dado que *m* es par, entonces el candidato resulta ganador cuando obtiene al menos la mitad más uno del total. El caso de victoria ocurre para cada una de las combinaciones siguientes que vienen de tomar ese número de electores del total existente del grupo de electores:

$$\binom{m}{m};\binom{m}{m-1};\binom{m}{m-2};\ldots;\binom{m}{\frac{m}{2}+1}$$

Pero, al tener dos candidatos, los casos desfavorables para el primero son los casos favorables para el segundo, por lo cual un caso de elección bajo las condiciones establecidas también ocurre con las combinaciones:

$$\binom{m}{\frac{m}{2}-1};\binom{m}{\frac{m}{2}-2};\binom{m}{\frac{m}{2}-3};\ldots;\binom{m}{0}$$

Entonces, la función de probabilidad de una elección bajo las condiciones que se establecieron, viene dada por la función dependiente de la cantidad de votantes:

$$\mathrm{P}(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m}\left(\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}+1}\binom{m}{m-i} + \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}+1}\binom{m}{(\frac{m}{2}-1)-i}\right) \quad \textbf{(1)}$$

La Ecuación 1 puede reducirse a la siguiente expresión:

$$P(m) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \binom{m}{\frac{m}{2}}$$

(2)

Aplicando las propiedades del triángulo de Pascal a la ecuación 2 obtenemos la siguiente expresión:

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} \leq 2^m \qquad \forall m \geq 2$$

(3)

A partir de la Ecuación 3 y tomando en consideración lo expresado por la Ecuación 2, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to \infty} (P(m)) = 1$$

Lo que nos indica que, a mayor número de votantes, la probabilidad de obtener un candidato ganador de un sistema con dos partidos es 1. Este sistema es claramente convergente, pero esto contradice el teorema de la imposibilidad de Arrow, puesto que una elección por mayoría simple no cumple las condiciones 4 y 5 de dicho teorema, explicadas previamente.

4 Votación Unánime: El mecanismo efectivo en condiciones.

El sistema de votación unánime es el último mecanismo que se explicará cómo procedimiento para encontrar una elección justa. Es evidente que al tener una elección en la cual todos los votantes están de acuerdo, no puede existir la violación de ninguna de las condiciones establecidas en el teorema (Asheim, Claussen, & Nilssen, 2006). A partir de esto, se desarrolla la siguiente explicación matemática de la posible existencia de un resultado estable para la elección unánime.

4.1. Probabilidad de una elección unánime para n opciones electorales y m electores:

Centramos nuestra atención en la segunda condición acerca de la unanimidad en el colectivo. Por consiguiente, supongamos que en la sociedad la cantidad de candidatos para realizar la elección es n. Así mismo, consideremos que la cantidad de electores existentes en la sociedad es m. Entonces, la cantidad total de combinaciones entre las preferencias ordenadas de los individuos viene dada por la expresión:

$$(n!)^m$$

(4)

Ahora bien, los casos en los cuales la elección resulta unánime (casos favorables) si asumimos independencia de eventos entre los votantes dependería de la elección que realice el primero de ellos y la cantidad de preferencias que pudieran tener el resto de votantes y que coloque como ganador a un determinado candidato. Este valor viene dado por la expresión:

$$(n!) * [(n-1)!]^m \tag{5}$$

A partir de las Ecuaciones 4 y 5, y considerando la definición de probabilidad se encuentra una expresión explícita para la probabilidad de tener una elección unánime dependiente de los valores de m y n que se consideren.

$$\mathrm{P}(m,n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{m-1} \tag{6}$$

4.2. Simulación computacional de una sociedad con m electores y n opciones de elección

Al tener individuos racionales e independencia en las preferencias de cada individuo, se puede simular un conjunto de personas a través de un software computacional que genere vectores con preferencias aleatorias para un determinado grupo de individuos. Suponemos el caso en el que *m* = 2 y *n* = 3, entonces los casos favorables vienen dados en la siguiente tabla:

Tabla 1: Casos favorables y no favorables de una elección con dos votantes y tres representantes

Preferencia	xyz	yzx	xzy	zxy	yxz	zyx
xyz	Funciona	No Funciona	Funciona	No Funciona	No Funciona	No Funciona
yzx	No Funciona	Funciona	No Funciona	No Funciona	Funciona	No Funciona
xzy	Funciona	No Funciona	Funciona	No Funciona	No Funciona	No Funciona
zxy	No Funciona	No Funciona	No Funciona	Funciona	No Funciona	Funciona
yxz	No Funciona	Funciona	No Funciona	No Funciona	Funciona	No Funciona
zyx	No Funciona	No Funciona	No Funciona	Funciona	No Funciona	Funciona

Se puede comprobar en los resultados mostrados en la Tabla 1 que la cantidad de casos favorables viene a ser 1/3. El programa genera aleatoriamente las preferencias y selecciona los casos en los cuales se obtiene un caso favorable para una votación unánime.

4.3. Resultados de la votación unánime:

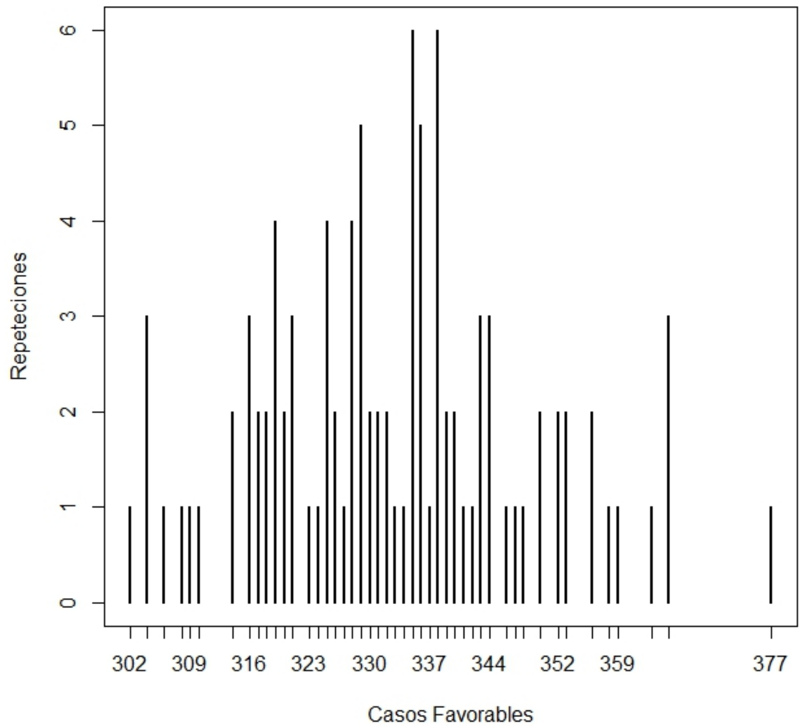
4.3.1. Resultados prácticos:

Un grupo cuyas preferencias se generan aleatoriamente deben aproximarse al valor de la probabilidad obtenido en la sección anterior, por lo que se consideran cien procesos de simulación para la generación de vectores, determinamos su funcionalidad y se repite 1000 veces este proceso. La distribución de los gráficos se muestra a continuación:

m= 2; n= 3

Para esta simulación, se consideran dos votantes y tres opciones diferentes, dada la Ecuación 6, se busca un valor aproximado a 333,33 como promedio entre los 100 procesos que se llevan a cabo. El resultado se muestra en el Grafico 1 a continuación:

Grafico 1: Simulación de casos favorables para m=2 y n=3

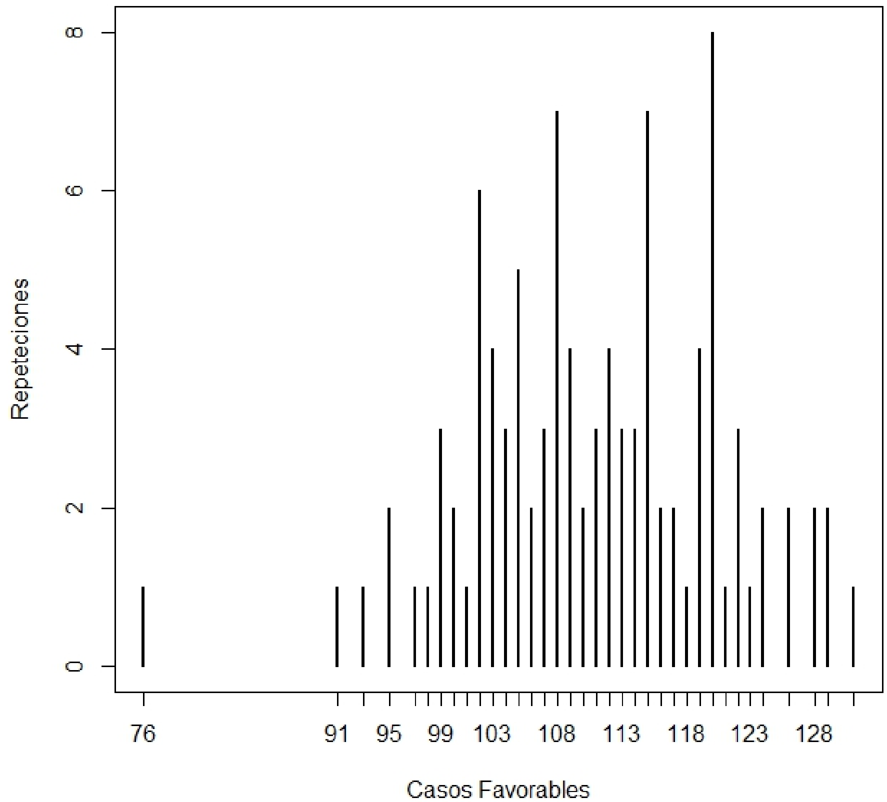


El promedio en todos los procesos es de 332,8. Lo cual se ajusta al valor de probabilidad esperado de 1/3 en los 1000 experimentos.

m=3; n=3

Para esta simulación, se consideran tres votantes y tres opciones diferentes, dada la Ecuación 6. Se busca un valor aproximado al 111,11 como promedio de entre los 100 procesos que se llevan a cabo, el resultado se muestra en el Gráfico 2 a continuación:

Gráfico 2: Simulación de casos favorables para m=3 y n=3

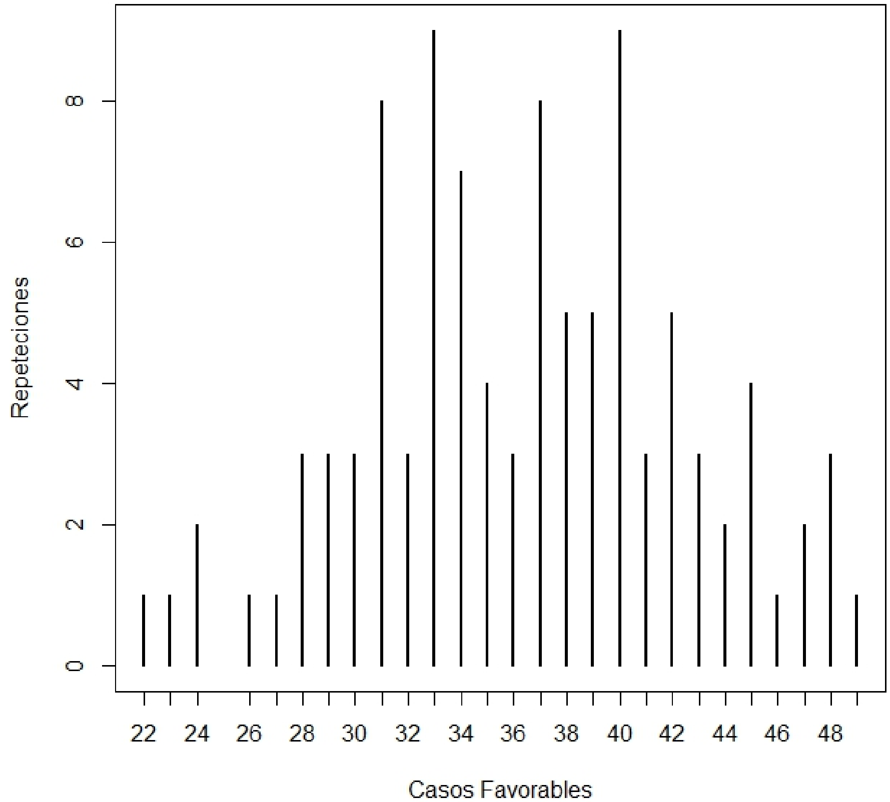


En todos los procesos el promedio es de 110,91. Lo cual se ajusta al valor de probabilidad esperado de 1/9 en los 1000 experimentos.

m= 4; n=3

Para esta simulación, se consideran cuatro votantes y tres opciones diferentes, dada la Ecuación 6. Se busca un valor aproximado al 37,03 como promedio entre los 100 procesos que se llevan a cabo. El resultado se muestra en el Gráfico 3 a continuación:

Gráfico 3: Simulación de casos favorables para m=4 y n=3



El promedio en todos los procesos es de 36,86. Lo cual se ajusta al valor de probabilidad esperado de 1/27 en los 1000 experimentos.

4.3.2. Resultados teóricos:

El teorema de Arrow establece que el único mecanismo posible para la obtención de una elección justa es el de la votación unánime. Sin embargo, si consideramos una realidad social con un número grande de electores y opciones, el mecanismo deja de tener sentido; pues, si se considera la expresión (6), encontramos que:

$$\lim_{m\to\infty} (\mathrm{P}(m,n)) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{P}(m,n)) = 0$$

Esto nos indica evidentemente que a mayores valores de *m* o de *n* en la función de probabilidad obtenida, la misma tiende a 0 invalidando la aplicabilidad del sistema en la realidad.

5. Conclusiones

El bienestar social es inconmensurable, por lo cual no es posible encontrar una función general de bienestar social. Pasando por los tamices que puede necesitar una función de bienestar social, está el mecanismo de elección social que tenga el colectivo. El principal ponente en el tema de la elección social fue Arrow, quién estableció -en el año 1963- cinco condiciones o axiomas básicos que un mecanismo de elección social debe considerar para tener una elección justa. Concluye que no es posible encontrar un mecanismo de elección perfecto y por ende una función de bienestar social para una elección en la sociedad. A través del estudio teórico de estas condiciones, se concluye que el único mecanismo de elección social capaz de tomar en cuenta las mismas, es la elección unánime. Sin embargo, en este artículo se muestra cómo a mayor cantidad de opciones de elección o de electores, la probabilidad de llegar a un acuerdo disminuye de forma dramática, puesto que el límite de la Ecuación 6 converge a cero, convirtiendo a este modelo de elección en poco óptimo respecto al objetivo.

Por otro lado, también se analiza el método de elección bipartidista que resulta ser matemáticamente favorable para la obtención de un resultado o una elección, pues si se consideran un número creciente de electores, la probabilidad de obtención de un resultado se aproxima a uno. Sin embargo, este método vulnera o viola dos de las condiciones (4ta y 5ta) establecidas por Arrow para la realización de un proceso de elección justa por lo que tampoco resultaría efectivo.

Con esto podemos concluir que no existe un mecanismo eficiente a través del cual se pueda llegar a una elección manteniendo las condiciones establecidas en la sección introductoria. Resultado que está respaldado en el escrito de imposibilidad que fue motivo de trabajo por Kenneth J. Arrow en 1963 y que bajo las condiciones establecidas en cada uno de los supuestos presentados se cumple.

Referencias bibliográficas

I. Arrow, K. (1963). Social Choice and Individual Values. New York: John Wiley & Son.

II. Asheim, G., Claussen, C., & Nilssen, T. (2006, May 2). Majority voting leads to unanimity. Oslo, Norway: Department of Economics, University of Oslo.

III. Devore, J. (2008). Probabilidad y Estadtica para Ingeniería y Ciencias. México: CENGACE Learning.

IV. Kálmán, J., & Váradi, B. (2011, June). Political Economy. Hungary: ELTE Faculty of Social Sciences, Department of Economics.

V. Kreps, D. (1994). Curso de Teoría microeconómica. México: McGraw-Hill.

VI. Mas-Colell, Whinston, & Green. (1995). Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press.

VII. Maskin, E., & Sen, A. (2014). The Arrow Impossibility Theorem. New York: Columbia University Press.

VIII. Papadimitriou, C., & Steiglitz, K. (1998). Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. New York: Dover Publications.

IX. Perloff, J. (2012). Microeconomics. New York: Pearson.

X. Piffano, H. (2009). El Dilema de Condorcet-El Problema de la votación por mayoría simple de Duncan Black- La Paradoja de Arrow- y el manejo de agenda. Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Economicas: Universidad de la Plata, 1-5.

XI. Rawls, J. (1971). A Theory of Justice. Massachusttes: Harvard University Press.

XII. Sartori, G. (1976). Parties and Party Systems: a framework for analysis. Cambridge: ECPR Press.

XIII. Sartori, G. (1999). Elementos de Teoría Política. Madrid: Alianza Editorial.