triángulo pascalino, los cuales permiten determinar la cantidad de divisores de las formas numéricas. Se relaciona con formas de conteo donde hay elementos repetidos, aspectos que harían necesario estudiar nuevas situaciones en teoría combinatoria, que abren nuevas posibilidades para el análisis de las formas de elegir cada cantidad de elementos de una determinada colección de ellos. En el desarrollo del mismo se presentaron aspectos preliminares sobre el teorema de Gauss y el triángulo de Pascal, así como ciertos aspectos teóricos sencillos para luego mostrar los trapecios de divisores con su definición, ejemplos, características, formas de generarlos y sus posibles aplicaciones. Es preciso aclarar que no se presenta en el artículo un teorema definitivo sobre los trapecios de cantidad de divisores, ya que el mismo es imposible, pues cada trapecio atiende a la naturaleza de ciertos números y dado que cada número tiene representaciones diferentes (lo cual es explicado por el teorema fundamental de la aritmética de Gauss), esto exige construir un trapecio particular en cada caso. Además se incluye una parte llamada interrogantes y reflexiones como las Queries de Newton en su libro Óptica, donde se hacen una serie de preguntas para el análisis y la búsqueda de más usos posibles de esta herramienta matemática y su aplicación en la estadística. Por último, en la conclusión se indican ciertos aspectos en relación a los posibles alcances de los trapecios de cantidad de divisores de números.
Palabras Claves combinatoria, conteo, teorema fundamental de aritmética, trapecios de divisores, triángulo de Pascal.

1 Introducción

El teorema fundamental de la aritmética o de factorización único fue probado por Gauss en su libro de 1801, *Disquisiciones Arithmeticae*. En el mencionado libro, Gauss demuestra en forma completa dicho teorema y lo usa para probar la ley de reciprocidad cuadrática. Sin embargo, según Joyce (1997) y Triana Cordero (2012) el teorema fue prácticamente demostrado por primera vez por Euclides (la Proposición 14 del libro 9 de sus Elementos) y conocido por otros matemáticos en siglos anteriores como Al Farisi (1260-1320), Prestet (1468-1690), Euler (1707-1783) y Legendre (1752-1833), entre otros.

Según Gil (2006) el teorema fundamental de la aritmética, afirma que "la forma estándar de un entero $n > 1$ es única; en otras palabras, se puede expresar n como un producto de primos en solo una manera, salvo por el orden de los factores". El teorema como su nombre implica, es muy básico, e indispensable para el estudio sistemático de los números enteros. Gil corrobora que "Al parecer, el teorema fue anunciado explícitamente por primera vez por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en su libro (antes citado), aunque sin duda el resultado ya era conocido antes de Gauss".

Algo similar a nivel histórico ocurre con el triángulo de Pascal. Respecto a dicho triángulo Fox (1998) señala que "Las propiedades y aplicaciones del triángulo fueron conocidas con anterioridad al tratado de Pascal por matemáticos indios, chinos, persas, alemanes, italianos, fue Pascal quien desarrolló muchas de sus aplicaciones y el primero en organizar la información de manera conjunta”(p. 13). Es decir, que dicho triángulo fue conocido con anterioridad en otras partes del mundo y usado por otros matemáticos, por lo cual también recibe otros nombres en otras partes del mundo. Según Edwards (2002), Weisstein (2003) y Hemenway (2008):

> Las propiedades del triángulo fueron conocidas por persas como Al-Karaji (953–1029) y Omar Khayyám (1048–1131). Por ello, en Irán ha sido conocido como el triángulo Khayyam-Pascal o simplemente el triángulo Khayyam. Se conocían también muchos teoremas relacionados, incluyendo el teorema del binomio. Además, en China, fue conocido en el siglo XI por Jia Xian (1010–1070) y Yang Hui (1238–1298), por lo cual en China se le llamó triángulo de Yang Hui.

El uso del triángulo de Pascal como lo afirman Katz (1992) y Fowler (1996), es principalmente “en el desarrollo de potencias del binomio, en lo relacionado con combinatoria y con los coeficientes de la función binomial”. Este triángulo fue ideado para desarrollar las potencias de binomios de Newton, es por esto que existe una estrecha relación entre el triángulo de Pascal y dichos binomios.

Sin embargo, el presente trabajo trata acerca de un uso novedoso del triángulo de Pascal, el cual genera una nueva herramienta matemática de creación propia nunca antes utilizada por ningún matemático, la cual hemos denominado y presentamos como “trapecios de cantidad de divisores”. Surgen de una relación entre el triángulo de Pascal y el teorema fundamental de la aritmética de Gauss, permitiendo no sólo saber la cantidad de divisores sino los grados de cada uno de ellos, en el cual la palabra “grado” hace referencia a la cantidad de primos que generan cada uno de los divisores del número, haciendo posible precisar mucho mejor los divisores a partir de la descomposición prima de cada número.

Es por ello que no se presentan antecedentes referidos en forma previa al uso de los trapecios de divisores en relación a problemas de conteo, ya que esta herramienta es de carácter “original” y este artículo representa el documento de inserción de la herramienta al mundo de las matemáticas y fundamentalmente a la teoría de números, que es el área en la cual se circunscribe su idealización y desarrollo.

Dicha herramienta tiene conexión con lo que ocurre en el área de la estadística con ciertos fenómenos en donde se dan ciertos eventos con repetición o en los cuales aparece uno o más tipos de objetos o elementos que pueden tener repetición, conllevando al modelado de formas de elegir en dichos casos. En tal sentido, los objetivos del presente artículo son: (1) definir los trapecios de divisores, (2) presentar algunos ejemplos de su construcción y de su uso en matemáticas y en actividades de conteo estadístico; se genera con la idea de presentar esta herramienta a la comunidad matemática mundial con el propósito de encontrar si fuese posible (en colaboración con matemáticos y estadísticos) formas de representación general para cualquier cantidad de elementos de los que se pueda disponer.

Por otra parte, el desarrollo de esta investigación es de corte autodidacta (al estilo de Ramanujan y Fermat) y se basó primeramente en que el triángulo de Pascal es correspondiente a los números donde hay productos de primos con exponente 1, luego a través de ensayo, error y juego con los números y sus divisores se observó que evidentemente dicha forma de análisis da origen a esta herramienta matemática, que permite en forma sencilla poder totalizar cuantos divisores existen para cada grado en una forma muy similar a la empleada para hallar términos del triángulo de Pascal.

2 Del teorema fundamental de la aritmética de Gauss y el triángulo de Pascal a los trapecios de divisores

Jiménez, Gordillo, y Rubiano (2004) señalan que "La propiedad más importante de los números primos es la posibilidad de factorizar todo entero $n > 1$ como producto de ellos y la factorización resulta esencialmente única. Esta propiedad fue descubierta por los griegos hace más de dos milenios"(p. 46). Según Jaume (2011) "El teorema fundamental de la aritmética establece que los primos son los ladrillos multiplicativos con los que están construidos todos los naturales: todo número natural se puede escribir de forma única, salvo por el orden de los factores, como productos de primos" (p. 3). Es decir, es una forma especial que se amolda a cada uno de los números y que los hace diferentes a unos de otros, dándoles solo parecido en cuanto a la cantidad de números que se multiplican.

Jaume agrega que "La frase «salvo por el orden» hace referencia a que consideraremos como iguales a las factorizaciones 2·2·3·31 y 31·2·3·2. Pues cada primo aparece la misma cantidad de veces en cada una de ellas". Es decir, cada número tiene una forma especial de escribirse que lo particulariza en relación a los otros números y que define su forma de expresarlo. Sin embargo, el orden de aparición de los primos es siempre desde los primos más pequeños a los más grandes.

Según el teorema fundamental de la aritmética de Gauss "todo número tiene una factorización única en base a números primos".

En relación a lo antes expresado sobre la factorización, según Yazlle (2017) decimos que dos factorizaciones de un mismo número son la misma factorización, (excepto por el orden de los factores) si una de ellas es una conmutación de los factores de la otra. En caso contrario, las factorizaciones se dicen distintas.

En general si se conoce que un número $N = a^p b^q c^r$, la cantidad de divisores (cd) es:

$$cd = (p + 1)(q + 1)(r + 1) \tag{1}$$

Y esta forma de hallar la cantidad de divisores puede extenderse a toda forma numérica sin ningún tipo de excepciones.

Así por poner dos ejemplos:

- 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38 y muchos otros son producto de dos primos a y b, es decir, semiprimos. Cada uno de estos números tiene 4 divisores.
- 12, 20, 28, 44, 52, 68, 76 … o 18, 50, 98, 242 entre otros tienen la forma ab^2. Cada uno de los cuales tiene 8 divisores.

Y de forma similar a lo anterior, de acuerdo a su descomposición en factores primos se obtiene la cantidad de divisores de cada uno de los números naturales. Tomando en cuenta los dos ejemplos anteriores, si se multiplica uno o más factores primos c, d, e, f . . . se obtienen productos de los tipos:

$$\mathrm{abc}, \mathrm{abcd}, \mathrm{abcde}, \mathrm{abcdef}, \mathrm{abcdefg}, \ldots, \mathrm{abc}\ldots\mathrm{xyz} \tag{2}$$

Donde cada una de las letras es un primo, se pasa de 4 divisores a 8, 16, 32, 64 y más divisores según lo establezca la fórmula de cantidad de divisores propuesta por Gauss.

De forma similar, para productos del tipo $\mathrm{a}^2\mathrm{b}$ si se multiplican uno o más factores primos c, d, e, f . . . se obtienen productos de los tipos:

$$\mathrm{a}^2\mathrm{bc}, \mathrm{a}^2\mathrm{bcd}, \mathrm{a}^2\mathrm{bcde}, \mathrm{a}^2\mathrm{bcdef}, \mathrm{a}^2\mathrm{bcdefg}, \ldots, \mathrm{a}^2\mathrm{bc}\ldots\mathrm{xyz} \tag{3}$$

Aquí se pasa de 6 divisores a 12, 24, 48, 96 y más divisores según la complejidad de la expresión.

Lo mismo puede aplicarse en cada caso, de manera que siempre es posible conocer la cantidad de divisores.

3 Resultados

De estudiar cuidadosamente muchos números en cuanto a su representación según el teorema fundamental de la aritmética y la mencionada relación de los divisores de ciertos números, precisamos la naturaleza de los divisores y generamos los trapecios de cantidad de divisores de números, de los cuales primeramente presentamos su definición, varios ejemplos, la formación de los mismos y algunos detalles sobre su estructura.

3.1 Naturaleza de los divisores

¿Cuál es la naturaleza de los divisores de cada número?

El teorema de Gauss señala la cantidad de divisores de cualquier número, pero a pesar de ello es tedioso saber cuántos divisores de cada grado posee cada número, principalmente cuando el número es muy grande y tiene muchos factores primos que pueden tener potencias. En realidad, Gauss no ofreció la forma de establecer cuantos divisores de cada grado existen, aunque sí dio la cantidad de elementos originales.

En este sentido, es necesario especificar los siguientes aspectos.

Definición: El grado de un divisor se relaciona con la cantidad de elementos primos que conforman a un divisor en cuestión.

Entonces se puede definir que:

1. 1 es el único divisor universal de todo número (grado 0).
2. Los números primos o bases a, b, c, d de la representación de un número son los divisores de grado 1.
3. Los números primos al cuadrado (a^2) o productos de dos primos (ab, ac, bc entre otros) son los divisores de grado 2.
4. Los números primos al cubo (a^3), los productos del cuadrado de un primo por otro (a^2b o ab^2) o los productos de tres primos diferentes (abc) son divisores de grado 3.
5. Los números primos a la cuatro (a^4), el cubo de un primo por otro diferente (a^3b), los productos de cuadrados de dos primos (a^2b^2), el cuadrado de un primo por otros dos primos diferentes (a^2bc) o el producto de cuatro primos diferentes (abcd) y así sucesivamente.

De esta forma se puede seguir definiendo para divisores de grado 5 hasta divisores de grado 50, 100 o aún mayores.

Cada número tiene divisores de acuerdo a su expresión o representación en factores primos.

Por ejemplo:

- Para $a^1b^1c^3$ existen divisores de grado 0 hasta grado 5 (ya que $1 + 1 + 3 = 5$).
- Para $a^1b^1c^1d^1$ existen divisores de grado 0 hasta grado 4 (evidentemente $1 + 1 + 1 + 1 = 4$).
- Para $a^2b^3c^4d^2$ existen divisores de grado 0 hasta grado $2 + 3 + 4 + 2 = 11$.

3.2 Conexión de divisores con el triángulo de Pascal

¿Cuál es el número de divisores de cada grado al intentar determinar los diferentes divisores de un número cualquiera?

Para responder a esta interrogante es muy significativo el triángulo de Pascal, que permite calcular los coeficientes de un binomio a cualquier exponente, como es mostrado en la Figura 1:

TRIÁNGULO DE PASCAL	POTENCIA DE UNA SUMA
1	$(a+b)^0 = 1$
1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
…	…

Figura 1: Relación del triángulo de Pascal y las potencias del binomio
Fuente: Elaboración propia

El triángulo de Pascal constituye una herramienta importante en forma directa y con variaciones para la determinación de la cantidad de divisores de cada número.

Como consecuencia puede verse que:

- Los divisores del 1 son: solo el 1, es decir, 1 divisor.
- Los divisores de a son 2: es el 1 y a, es decir, 1 grado cero y 1 grado 1.
- Los divisores de ab son 4: el 1, a, b y ab, es decir, hay 1 grado 0, 2 grado 1 y 1 grado 2.
- Los divisores de abc son 8: el 1, a, b, c, ab, ac, bc, abc, es decir, que hay 1 grado 0, 3 de grado 1, 3 de grado 2 y 1 de grado 3.

Si se continúa buscando los divisores de abcd, abcde, abcdef, abcdefg entre otros productos lineales al observar las cantidades de divisores, se tiene que la representación de dichas cantidades se relacionan directamente con los coeficientes presentes en el triángulo de Pascal, el cual contiene en cada fila una suma de coeficientes que es igual a una potencia de 2. Esto permite establecer una importante conexión entre la búsqueda de los divisores de números y los coeficientes del triángulo de Pascal, lo cual se muestra en la Figura 2:

1	1	(1 div)
a	1 1	(2 div)
ab	1 2 1	(4 div)
abc	1 3 3 1	(8 div)
abcd	1 4 6 4 1	(16 div)
abcde	1 5 10 10 5 1	(32 div)
abcdef	1 6 15 20 15 6 1	(64 div)
abcdefg	1 7 21 35 35 21 7 1	(128 div)
abcdefgh	1 8 28 56 70 56 28 8 1	(256 div)
abcdefghi	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	(512 div)
abcdefghij	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	(1024 div)

Figura 2: Triángulo de Pascal con la inserción de la idea de considerar productos numéricos y hallar los divisores

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, dichos resultados coinciden con los números del triángulo de Pascal, es decir, que los coeficientes para expresiones $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$ entre otras, generan los mismos números de divisores de los productos de 2 primos (ab), de tres primos (abc), de cuatro primos y así sucesivamente. De lo anterior se puede distinguir que hay una estrecha relación entre los coeficientes que se generan para los binomios de acuerdo a su exponente y los divisores de cada grado que surgen para los productos en relación a su número de factores primos. En tal sentido, cuando se tiene un producto de n primos diferentes (todos de exponente 1) basta buscar la línea de exponente n (que se conoce porque tiene a n como segundo elemento) y de allí se obtienen los divisores de la expresión con n números primos distintos.

¿Qué pasa con otras formas numéricas donde hay potencias como $2^2 * 3$, $2^2 * 3 * 5 * 7$ o $3^3 * 5$?

En estos casos no es suficiente el triángulo de Pascal, que funciona solo para productos de primos con exponente 1. Esto se puede apreciar porque al buscar las cantidades de divisores de cada grado, los números no coinciden con los coeficientes del mencionado triángulo.

Por ejemplo, los números de la forma a^2b tienen 6 divisores que son del tipo:

$$d(a^2b) = \{1, a, b, a^2, ab, a^2b\}$$

Así se puede reconocer que los números $12 = 2^2 * 3$, $18 = 2 * 3^2$, $50 = 2 * 5^2$ entre otros con la misma representación tienen 6 divisores y todos tienen la misma cantidad de divisores de cada grado. Es decir, que a^2b tiene 6 divisores de los cuales:

- 1 es divisor de grado 0
- a y b son divisores de grado 1
- a^2 y ab son divisores de grado 2
- a^2b son divisores de grado 3.

Tomando en cuenta añadir más primos c, d, e, f surgen productos de la forma:

a^2bc, a^2bcd, a^2bcde, a^2bcdef, $a^2bcdefg$, $a^2bcdefgh$, $a^2bcdefghi$ entre otros.

Entonces conocida la fila 1 2 2 1 que corresponde a a^2b, partiendo de ella y por procedimiento similar a Pascal (es decir, la fijación de los 1 a los extremos y la suma de los intermedios), se puede generar un trapecio de cantidad de divisores de todos los productos del tipo anterior como es mostrado en la Figura 3:

a^2	1	1	1										(3 divisores)
a^2b	1	2	2	1									(6 divisores)
a^2bc	1	3	4	3	1								(12 divisores)
a^2bcd	1	4	7	7	4	1							(24 divisores)
a^2bcde	1	5	11	14	11	5	1						(48 divisores)
a^2bcdef	1	6	16	25	25	16	6	1					(96 divisores)
$a^2bcdefg$	1	7	22	41	50	41	22	7	1				(192 divisores)
$a^2bcdefgh$	1	8	29	63	91	91	63	29	8	1			(384 divisores)
$a^2bcdefghi$	1	9	37	92	154	182	154	92	37	9	1		(768 divisores)
$a^2bcdefghij$	1	10	46	129	246	336	336	246	129	46	10	1	(1536 divisores)

Figura 3: Trapecio de cantidad de divisores para productos del tipo $a^2bcdefgh\ldots$
Fuente: Elaboración propia

En efecto, según la fórmula de cantidad de divisores descubierta por Gauss de acuerdo a los exponentes de los factores primos, se tiene que si se buscan los divisores de a^2bcd su cantidad de divisores será de $3 * 2 * 2 * 2 = 24$ divisores, lo cual coincide con lo expresado en la Figura 3 (línea resaltada). Los divisores de a^2bcd son los siguientes:

- Hay 1 divisor grado 0 que siempre es el 1
- Hay 4 divisores grado 1 que son: a, b, c y d
- Hay 7 divisores grado 2 que son: a^2, ab, ac, ad, bc, bd y cd
- Hay 7 divisores grado 3 que son: a^2b, a^2c, a^2d, abc, abd, acd y bcd

- Hay 4 divisores grado 4 que son: a^2bc, a^2bd, a^2cd y abcd
- Hay 1 divisor grado 5 que es a^2bcd.

Estos son los divisores de los números de la forma a^2bcd y no hay ninguno más que ellos. Para todos los primos que se sustituyan por a, b, c y d respectivamente se obtiene la misma cantidad de divisores presentados en el trapecio y posteriormente desglosados.

Para un primo al cubo los divisores de a^3 son 1, a, a^2 y a^3, de lo cual al tomar las cantidades se obtiene la fila

$$1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 1$$

Partiendo de dicha fila se pueden obtener por multiplicación de otros primos productos de la forma:

$$a^3b,\ a^3bc,\ a^3bcd,\ a^3bcde,\ a^3bcdef,\ a^3bcdefh \text{ entre otros.}$$

Y nuevamente gracias al genial triángulo de Pascal, se puede generar el trapecio de cantidad de divisores correspondiente para cada uno de los productos indicados (Figura 4).

a^3	1	1	1	1									(4 divisores)
a^3b	1	2	2	2	1								(8 divisores)
a^3bc	1	3	4	4	3	1							(16 divisores)
a^3bcd	1	4	7	8	7	4	1						(32 divisores)
a^3bcde	1	5	11	15	15	11	5	1					(64 divisores)
a^3bcdef	1	6	16	26	30	26	16	6	1				(128 divisores)
$a^3bcdefg$	1	7	22	42	56	56	42	22	7	1			(256 divisores)
$a^3bcdefgh$	1	8	29	64	98	112	98	64	29	8	1		(512 divisores)
$a^3bcdefghi$	1	9	37	93	162	210	210	162	93	37	9	1	(1024 divisores)

Figura 4: Trapecio de cantidad de divisores para productos del tipo $a^3bcdefgh\ldots$
Fuente: Elaboración propia

3.3 Trapecios de cantidad de divisores

Un trapecio de cantidad de divisores es una disposición de números muy similar al triángulo de Pascal, que surge de considerar la cantidad de divisores de cada grado de un número expresado en sus factores primos, de lo cual surge la primera fila y donde cada fila siguiente se forma a partir de la primera (siguiendo el procedimiento tipo Pascal), luego de colocar números 1 en los extremos y de sumar los dos valores e incluir el resultado entre ambos números. Al igual que en el triángulo de Pascal, a izquierda y derecha contiene 1, pero se producen cambios a partir de su segunda posición y hasta la penúltima en relación al triángulo de Pascal cuando por lo menos uno de los primos tiene exponente diferente de 1.

En el trapecio cada nueva fila genera la cantidad de divisores de cada grado que tienen los productos, que van surgiendo de incorporar un nuevo número primo (diferente por supuesto a los anteriores) de exponente 1 al número de la fila anterior, lo cual es visible en las Figuras 4 y 5.

3.4 Formación de trapecios de divisores

Como puede apreciarse en las Figuras 2, 3 y 4 presentadas, la construcción de los trapecios de divisores no es de forma única como en el caso del triángulo de Pascal, por lo cual no puede plantearse un teorema único que recoja la forma de realizar dichos trapecios. Hay infinitas representaciones de números, como lo demuestra el hecho de que pueden añadirse infinitos primos más que generan muchas más filas de cada uno de los trapecios de cantidad de divisores, así como se generan infinitas filas dependiendo del valor que tome n en el desarrollo de Newton $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^{\mathrm{n}}$ en el triángulo de Pascal.

Por ello no puede plantearse un teorema único, ni mucho menos una demostración estándar que sea válida para cada n, si se pudiera hacer, habría que encontrar una forma de representar los primos en función de otros primos, lo cual es una contradicción. Lo que sí es cierto, es que conocida una forma numérica inicial, podemos generar todo el conjunto de cantidades de divisores que surgirían agregando desde 1 hasta n primos distintos.

Por ejemplo, supongamos que queremos saber: ¿Cuántos divisores de cada grado posee un número con 9 factores primos diferentes, sabiendo que uno de ellos tiene exponente 3? Para este problema no hay ninguna herramienta en matemáticas (hasta ahora que se mencionan los trapecios de cantidad de divisores) que pueda estimar esto sin necesidad de tener el número en sí mismo.

Hay que considerar el hecho de que hay muchos números que pueden tener un primo elevado al cubo y luego multiplicarse por 8 números primos diferentes.

En este caso sabemos por el teorema de Gauss que a^3 tiene 4 divisores que son 1, a, a^2 y a^3. Cada uno es de grado distinto desde grado cero a grado 3. Por otra parte, el número que buscamos será de la forma a^3bcdefghi, para el cual según Gauss hay $4 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^{10} = 1024$ divisores.

Sin embargo, Gauss no señaló la forma de determinar ¿Cuántos de estos divisores se generaban de grado 5 o de grado 7? Podemos ver en la línea resaltada de la Figura 4, que para hallar los divisores de grado 5 contamos 6 posiciones y hay 210 divisores diferentes de grado 5 que pueden formarse.

En cuanto a los divisores de cada grado, la línea resaltada ofrece información completa sobre ese problema.

Hay 1 divisor de grado 0 y también 1 de grado 11, 9 divisores tanto de grado 1 como de grado 10, 37 divisores de grado 2 y de grado 9, 93 de grado 3 y de grado 8, 162 de grado 4 y 7, hay 210 de grado 5 y de grado 6.

En relación a estadística, si hay 3 objetos de un mismo tipo, 8 objetos diferentes y piden formar grupos distintos de 4 objetos, es igual que buscar la cantidad de divisores de grado 4 de la forma numérica antes descrita, es decir, hay 162 combinaciones diferentes de 4 objetos. Pudiendo tomar desde ninguno hasta los 3 de aquel objeto que aparece con repetición. El lector puede deleitarse verificando esto.

Se imagina ahora que si esto es con 9 tipos de objetos donde solo hay 3 repetidos de un tipo, ¿Qué pasaría si hay 9 objetos diferentes pero hay 4 del primer tipo, 3 del segundo, 2 del quinto tipo y 7 del octavo. ¿Cuántas combinaciones desde no tomar nada hasta tomar 1, dos o todos los objetos son posibles?

La respuesta no será determinada, pero otro trapecio de cantidad de divisores sería necesario construir de acuerdo al planteamiento. Es preciso aquí aclarar que este tipo de problemas va más allá de la estadística que obedece a los números combinatorios del triángulo de Pascal y el mismo es inabordable usando los métodos de combinatoria empleados hasta la actualidad.

3.5 *Detalles sobre trapecios de divisores*

Es importante señalar que el hecho de que dos números tengan la misma cantidad de divisores totales no significa que tengan la misma cantidad de divisores de cada grado, ni que tengan trapecios de cantidad de divisores idénticos, ya que dicha cantidad depende de la forma como se constituya el número en base a su cantidad de números primos y sus exponentes. En efecto, para dos tipos de números diferentes se pueden tener 1024 divisores, pero sus cantidades de divisores de cada grado tienden a ser diferentes. Al comparar los elementos de la Figura 2 y la Figura 4 se obtiene que:

abcdefghij	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		(1024 divisores)
a^3bcdefghi	1	9	37	93	162	210	210	162	93	37	9	1	(1024 divisores)

El lector puede percatarse que el primer caso corresponde al producto de diez primos (todos diferentes con exponente 1 mostrado en la Figura 2), mientras que en el segundo caso se tiene el producto de un primo elevado al cubo por otros 8 primos (mostrado en la Figura 4); mientras que el primero tiene divisores de grado 0 a grado 10, el segundo número tiene divisores de grado 0 a grado 11.

Por otra parte, mientras los productos lineales cumplen con el Pascal usualmente conocido, los productos con exponentes diferentes de 1 generan alteraciones en el famoso triángulo de Pascal para generar trapecios de divisores que se forman según el procedimiento de Pascal, pero con diferentes números y los grados corresponden con la cantidad de bases multiplicadas, considerando sus exponentes.

Así un número puede ser por ejemplo de la forma a^5b3c2 o de la forma abcdefghi y resulta que aunque el primero solo tiene 3 factores primos diferentes y el segundo 9 factores primos distintos, ocurre que el primero tendrá divisores hasta de grado 10 mientras que el otro (aunque tiene más factores primos) solo llegará a divisores de grado 9.

Por citar otro ejemplo, para un número de la forma a^2b^2 se obtiene que sus divisores son:

$$d(a^2b^2) = \{1, a, b, a^2, b^2, ab, a^2b, ab^2, a^2b^2\}$$

De acuerdo a los divisores anteriores para cada grado se obtienen los dígitos:

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 1$$

Al multiplicar la expresión a^2b^2 por uno o más primos diferentes se pueden generar productos de la forma:

$$a^2b^2c,\ a^2b^2cd,\ a^2b^2cde,\ a^2b^2cdef,\ a^2b^2cdefg,\ a^2b^2cdefgh \text{ entre otros}$$

De modo similar a lo antes indicado, respecto a la cantidad de divisores de otros productos basta con fijar la fila anterior y generar el trapecio de los divisores para el tipo de productos indicados arriba. Al hacer dicho procedimiento queda lo mostrado en la Figura 5:

a^2b^2	1	2	3	2	1								(9 divisores)
a^2b^2c	1	3	5	5	3	1							(18 divisores)
a^2b^2cd	1	4	8	10	8	4	1						(36 divisores)
a^2b^2cde	1	5	12	18	18	12	5	1					(72 divisores)
a^2b^2cdef	1	6	17	30	36	30	17	6	1				(144 divisores)
a^2b^2cdefg	1	7	23	47	66	66	47	23	7	1			(288 divisores)
$a^2b^2cdefgh$	1	8	30	70	113	132	113	70	30	8	1		(576 divisores)
$a^2b^2cdefghi$	1	9	38	100	183	245	245	183	100	38	9	1	(1152 divisores)

Figura 5: Trapecio de cantidad de divisores para productos del tipo $a^2b^2cdefgh\ldots$
Fuente: Elaboración propia

A modo de conclusión se puede considerar, que a partir de conocer un producto de cierta forma del cual interese saber cómo son sus posibles divisores, se pueden formar o generar trapecios de cantidad de divisores con procedimiento tipo Pascal que permitan conocer cuántos divisores de cada grado poseen los números respectivos, así como la cantidad de divisores de otros productos donde se multipliquen uno o más primos, y esto se puede hacer generando infinitas filas en similitud con el triángulo de Pascal.

4 Implicaciones de los trapecios de divisores

Antes de tratar los usos de dichos trapecios, se considera pertinente abordar el uso del triángulo de Pascal que quedaría sin tomar la primera línea, donde aparece 1 como un trapecio de divisores de productos donde no hay repetición, es decir, que en torno a la búsqueda de cantidad de divisores de números, el triángulo de Pascal quedaría como el trapecio de cantidad de divisores más básico. Su importancia es indiscutible pues fue de la observación de él mismo y de su manera de formarse en relación al teorema fundamental de la aritmética, del cual resulta la idea de los trapecios de cantidad de divisores presentados en este artículo.

4.1 El uso del triángulo de Pascal

Es sabido que el triángulo Pascal está muy relacionado con la combinatoria, los eventos estadísticos y tiene muchas propiedades interesantes, como lo son que se relacionan donde se aplica la elección de m elementos de n elementos siendo siempre $m < n$ y en los cuales no se dan repeticiones de ninguno de los tipos de elementos. En efecto el triángulo de Pascal puede ser representado usando combinatoria como se muestra en la Figura 6, aspecto que es usado en la solución de una gran cantidad de problemas importantes de la estadística.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Figura 6: Expresión combinatoria del triángulo de Pascal y la fórmula de combinación

Fuente: Elaboración propia

4.2 Usos de los trapecios de cantidad de divisores

Sin embargo, todo lo antes descrito sobre los trapecios de divisores evidencia que dicha herramienta matemática se relaciona con fenómenos estadísticos de elección, en los cuales no necesariamente se deben tener solamente elementos diferentes. Brinda la posibilidad de poder contabilizar a través de cada una de las líneas del trapecio, posibles formas de elegir elementos donde uno o más de ellos se repitan; lo cual permite ampliar su uso en solución de ciertos problemas relacionados con esto. A continuación, se presentan ejemplos en los cuales se puede visualizar la utilidad del uso de los trapecios de divisores.

Eventos estadísticos relacionados

Ejemplo 1

Supongamos que tenemos 5 elementos como se muestra a continuación:

¿Cómo podemos escoger 0 colores, 1 color, 2 colores, 3 colores, 4 colores y 5 colores de formas distintas?

Escoger 0 colores lo podemos hacer de 1 forma: dejándolos todos.

Escoger 1 color lo podemos hacer de 3 formas:

1 azul

1 morado

1 verde

Escoger 2 colores lo podemos hacer de 5 formas, las cuales son:

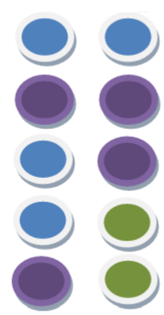
2 azules

2 morados

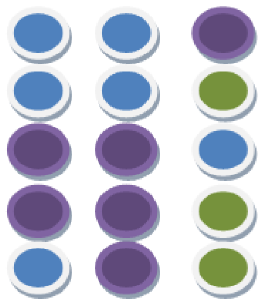
1 azul y 1 morado

1 azul y 1 verde

1 morado y 1 verde



Escoger 3 colores lo podemos hacer de 5 formas:



2 azules y 1 morado

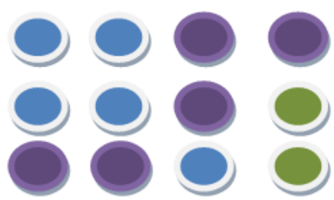
2 azules y 1 verde

2 morados y 1 azul

2 morados y 1 verde

1 azul, 1 morado y 1 verde

Escoger 4 colores lo podemos hacer de 3 formas:



La primera forma es agarrar 2 azules y 2 moradas
La segunda forma es agarrar 2 azules, 1 morada, 1 verde
y la tercera forma es agarrar 2 morados, 1 azul y 1 verde

Escoger 5 colores lo podemos hacer de 1 sola forma: escogerlos todos.
De lo anterior los números resultantes son

1 3 5 5 3 1

Si tomo azul como a, morado como b, verde como c y considero las cantidades de cada uno como exponente, quedaría la expresión a^2b^2c. Al revisar la Figura 5 se obtiene que para a^2b^2c resultan los números

1 3 5 5 3 1

Ejemplo 2
Supongamos que tenemos:

¿Cómo podemos escoger 0 colores, 1 color, 2 colores, 3 colores y 4 colores ?

Escoger 0 colores lo podemos hacer de 1 forma: dejándolos todos.

Escoger 1 color lo podemos hacer de 2 formas:

1 azul

1 morado

Escoger 2 colores lo podemos hacer de 2 formas, las cuales son:

2 azules

1 azul y 1 morado

Escoger 3 colores lo podemos hacer de 2 formas:

3 azules

2 azules y 1 morado

Escoger 4 colores lo podemos hacer de 1 forma: escogerlos todos

De lo anterior los números resultantes son

1 2 2 2 1

Si tomo azul como a, morado como b y considero las cantidades de cada uno como exponente, quedaría la expresión a^3b. Al revisar la Figura 3 obtenemos que para a^3b resultan los números

1 2 2 2 1

Ejemplo 3

Teniendo las letras xxxyyzuv

¿De cuántas maneras diferentes puedo elegir 0 de ellas, 1 de ellas, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 letras?

En este caso se complica mucho más la determinación de posibilidades de elección, pero es posible determinar las cantidades gracias al uso de los trapecios de divisores. En este sentido para una expresión de la forma xxxyyzuv o x^3y^2zuv resultan según Gauss $4 * 3 * 2 * 2 * 2 = 96$ divisores. Es decir, que al elegir posibles combinaciones de los objetos tomando de 0 a 8 de ellos, hay 96 posibles combinaciones. Lo bueno del trapecio de divisores es que precisa cuantas combinaciones de 3 o 5 elementos es posible formar, sin necesidad de realizar cada una de las mismas.

Para ello se parte de lo siguiente:

Los divisores de x^3y^2 son

$$\{ 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, x^3y, x^2y^2, x^3y^2\}$$

De aquí se obtiene la fila: 1 2 3 3 2 1

De dicha fila podemos obtener los divisores para productos del tipo

$$x^3y^2, x^3y^2z, x^3y^2zu, x^3y^2zuv, x^3y^2zuvw \text{ entre otros}$$

x^3y^2					1		2		3		3		2		1					(12 divisores)
x^3y^2z				1		3		5		9		5		3		1				(24 divisores)
x^3y^2zu			1		4		8		14		14		8		4		1			(48 divisores)
x^3y^2zuv		1		5		12		22		28		22		12		5		1		(96 divisores)
x^3y^2zuvw	1		6		17		34		50		50		34		17		6		1	(192 divisores)

Figura 7: Trapecio que indica (parte resaltada) las formas de elegir de 0 a 8 letras, con lo cual se resuelve el problema sin necesidad de sacar las mismas

Fuente: Elaboración propia

De igual modo se pueden generar infinitas filas para este trapecio.

Nota: El lector puede divertirse formando las 96 combinaciones que son posibles hacer, precisando que en efecto hay 5 combinaciones si se toman 1 o 7 elementos, 12 si se toman 2 o 6 elementos, 22 si se toman 3 o 5 elementos y 28 si se toman 4 elementos.

5 Interrogantes y reflexiones

De los ejemplos antes presentados y de los trapecios de divisores que se han ido generando, se puede notar que hay una estrecha interrelación entre los trapecios de cantidad de divisores y los eventos estadísticos con repetición que se han ejemplificado. Lo que permite entender que esta herramienta matemática (variante del triángulo de Pascal aplicada en otro proceso de cálculo) ofrece de acuerdo a los elementos que se tengan, una relación entre posibles formas de elegir y expresiones algebraicas. Esto posibilita pensar en el hecho de si es necesaria la adopción de nuevas fórmulas matemático - estadísticas que permitan poder expresar las posibles situaciones que se presentan, cómo se hace en el caso de combinación, variación y permutación.

Cabría hacerse entonces las siguientes preguntas:

1. Si la combinación del triángulo de Pascal resuelve variedad de situaciones estadísticas, ¿Cuál sería la aplicabilidad que tendrían los números de cada fila de un trapecio de divisores?
2. ¿Qué eventos podrían ser modelados y resueltos por dichos números?
3. ¿En qué fenómenos aportan los trapecios de cantidad de divisores información sobre formas de elegir, escoger o extraer?
4. Si el triángulo de Pascal se relaciona con el famoso binomio de Newton. ¿Guardarán los números encontrados, alguna relación con una determinada fórmula matemática o con ciertas estructuras algebraicas?
5. ¿Cuáles son las propiedades que cumple cada uno de los trapecios de divisores y todos los demás que se puedan crear, entendiendo que son capaces de generar infinidad de trapecios de cantidad de divisores, según la expresión de los diversos tipos de números naturales y su descomposición en factores primos?
6. ¿Poseerán algunos trapecios ciertas disposiciones tipo fractal de Sierpinski?
7. ¿Se podrán generar a partir de dichos trapecios números de tipo combinatorio como los de la sucesión de catalán u otros por el estilo?
8. ¿Queda el triángulo de Pascal como un apéndice de estos trapecios de divisores en cuanto a que el triángulo de Pascal solo es usable en casos de eventos, donde no pueden haber repeticiones, mientras que estos pueden usarse en eventos incluso más complejos?
9. ¿Qué propiedades del triángulo de Pascal conservan o cumplen estos trapecios de divisores y qué propiedades nuevas tienen?
10. ¿Puede crearse una fórmula general para expresar toda posible combinación de colores, letras u otros fenómenos que se cumpla siempre, independientemente del número de elementos que se repitan y de la cantidad que se use de los mismos?

6 Conclusiones

Como se puede comprobar en este artículo, es evidente que los trapecios de cantidad de divisores de números constituyen una herramienta dinámica y adaptable a los diversos tipos de números (la cual no es una estructura fija sino es versátil como lo son todos los números que tienen representaciones distintas), por lo cual es imposible crear un teorema único que los represente. Sin embargo, su utilidad es apreciable en los diversos ejemplos presentados en este artículo, ya que muestran un artificio práctico que permite su uso en problemas relacionados con formas de conteo que se dan en las formas de escoger cuando hay varios colores u objetos; pero donde hay repeticiones de uno o más tipos de ellos, es decir, que se relacionen con la estadística, ya que puede usarse en la solución de ciertos problemas de dicha ciencia. En este sentido, aunque se genera en forma similar al triángulo de Pascal nunca es totalmente igual al mismo, ya que aquel tiene siempre números fijos mientras que los trapecios son variantes y esto es debido a los números que les dan origen.

Al respecto sería sumamente interesante su estudio y que conocedores de la matemática y la estadística examinen su aplicación, lo cual puede enriquecer lo que se ha logrado en cuanto a dicha herramienta por ahora. Además es preciso aclarar, que la generación de los trapecios de cantidad de divisores de números es una herramienta nueva, por lo cual es imposible hallar referencias antiguas o recientes sobre dichos trapecios en publicaciones matemáticas. Por este motivo, no se puede hablar de estos trapecios relacionándolos con trabajos pasados sino proyectando dicha herramienta hacia su posible desarrollo, adopción y uso futuro.

7 Bibliografía

Referencias

Edwards, A. (2002). Pascal's Arithmetical Triangle: The story of a mathematical idea. *Johns Hopkins University Press*, 30–31.

Fowler, D. (1996). The Binomial Coefficient Function. *The American Mathematical Monthly*, *103*(1), 1–17. doi: 10.2307/2975209

Fox, P. (1998). *Cambridge University Library: the great collections*. Cambridge University Press.

Gil, B. (2006). *Introducción a la Teoría de Números.* Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), La semana de la Ciencia en Chiapas, México.

Hemenway, P. (2008). *El código secreto: la misteriosa fórmula que rige el arte, la naturaleza y la ciencia*. Evergreen.

Jaume, D. A. (2011). Clase 3: Teorema de Fundamental de la Aritmética. Argentina: Universidad Nacional de San Luis. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y Naturales.

Jiménez, R., Gordillo, E., y Rubiano, G. (2004). Teoría de números para principiantes. *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.*

Joyce, D. E. (1997). Book X, Proposition XXIX. En (cap. Euclid's Elements). Clark University.

Katz, V. J. (1992). *A History of Mathematics: An Introduction*. Université d'Australie-Méridionale (UniSA).

Triana Cordero, W. A. (2012). Una visión histórica del teorema fundamental de la aritmética. *Universidad Pedagógica Nacional, Facultad De Ciencia Y Tecnología. Departamento De Matemáticas*.

Weisstein, E. W. (2003). *CRC concise encyclopedia of mathematics*. CRC press.

Yazlle, J. (2017). *Aritmética Elemental.* Argentina: Apuntes de Cátedra. Universidad Nacional de Salta.