MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2020, Vol. 18, No. 2 Julio - Diciembre

Gráficos de control estadístico para variables Poisson y multinomial en el contexto multivariado: una revisión de la literatura

Statistical control charts for Poisson and multinomial variables in the multivariate context: a review of the literature

Sandra García-Bustos, María Pastuizaca Fernández y Nora Monsalve Graterol

Recepción: 22/07/2020 **Aceptación:** 30/09/2020 **Publicación:** 20/10/2020

Abstract The need to control variability when be having Poisson and multinomial discrete quality variables in the multivariate context led us to perform a general and introductory review of the most relevant proposals that have been made to monitor multivariate control charts for this type of variables. There is much research that has been done in the parametric and non-parametric context in this field, which in this article we try to highlight. However, under the fuzzy theory approach, few works are devoted to the study of this type of charts. Fuzzy theory can be a very useful tool to model multivariate control situations where there are correlated variables and of different categories. We hope that this article can guide and be a help for who are looking information in the field of multivariate control charts for Poissson and multinomial variables.
Keywords fuzzy theory, multinomial variable, multivariate control charts, Poisson variable.

Resumen La necesidad de controlar la variabilidad cuando se tienen variables de calidad discretas Poisson y multinomiales en el contexto multivariante nos condujo a realizar una revisión muy general e introductoria de las propuestas más relevantes que se han hecho para monitorear gráficos de control multivariantes para este tipo

Sandra Lorena García-Bustos, Ph.D. en Estadística y Optimización
Docente, ESPOL Polytechnic University, Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas (FCNM), Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador, e-mail: slgarcia@espol.edu.ec

María Nela Pastuizaca Fernández, Ph.D. en Estadística y Optimización
Docente, ESPOL Polytechnic University, Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas (FCNM), Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador, e-mail: mpastuiz@espol.edu.ec

Nora Coromoto Monsalve Graterol, Ph.D. en Estadística y Optimización
Docente, UCLA Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado, Departamento de Investigación de Operaciones y Estadística, Barquisimeto, Venezuela, e-mail: nmonsalve@ucla.edu.ve, https://orcid.org/0000-0003-0456-1289

de variables. Es mucha la investigación que se ha hecho en el contexto paramétrico y no paramétrico en este campo, que en este artículo tratamos de resaltar. Sin embargo, bajo el enfoque de la teoría difusa son pocos los trabajos dedicados al estudio de este tipo de gráficos. La teoría difusa puede ser una herramienta muy útil para modelar situaciones de control multivariantes donde se tengan variables correlacionadas y de diferentes categorías. Esperamos que este artículo pueda orientar y ser de ayuda a quiénes están buscando información en el campo de los gráficos de control multivariantes para variables tipo Poissson y multinomial.
Palabras Claves gráfico de control multivariante, teoría difusa, variable multinomial, variable Poisson.

1 Introducción

La mejora de la calidad es uno de los principales objetivos de las empresas para aumentar su competitividad y sobrevivir en el mercado. Los gráficos de control de calidad propuestos por Walter A. Shewhart en 1924 (Smith, 2009), como parte de la metodología para el Control Estadístico de Procesos (SPC) permiten monitorear las características de calidad, a través de parámetros estadísticos como la media y la varianza de una variable aleatoria. Se puede hacer una revisión exhaustiva sobre estos gráficos en Montgomery (2009). La diversidad de las características de calidad de interés ha permitido el desarrollo de estos gráficos, tanto desde el análisis univariante como el multivariante para características de calidad cuantitativas o cualitativas. Si las variables o características de calidad a estudiar son discretas y el análisis es multivariante, entonces existen mayores dificultades para encontrar la mejor forma de modelar su comportamiento. Si a esto le agregamos cierto grado de subjetividad en las expresiones lingüísticas empleadas cuando se evalúa la característica de calidad, nos conducen a pensar qué estrategias de control pueden hacer frente a estas situaciones. Revisando la literatura para SPC se encuentra que son pocos los trabajos de investigación que hacen frente en forma combinada a las dificultades que se acaban de mencionar.

El objetivo principal de este artículo es hacer una revisión de la literatura dedicada a los gráficos de control multivariantes diseñados para controlar variables correlacionadas que tengan diferentes categorías del tipo Poisson y multinomial.

2 Fundamento teórico para los gráficos de control

En un proceso de control estadístico de calidad se requiere tomar las mediciones para estimar parámetros fundamentales, como el promedio y la desviación estándar de la variable que se está midiendo (Montgomery, 2004). Con base en dichas estimaciones se calculan los límites de control: LCS (Límite de Control Superior); LCI (Límite de Control Inferior), siendo LC la distancia de los límites de control a la

línea central. Estas líneas se determinan a partir de datos históricos, se eligen de modo que, si el proceso está bajo control, casi todos los puntos de muestreo caerán entre ellos e indicarán el rango de variabilidad normal (Rowlands y Wang, 2000). De acuerdo a Montgomery (2004), cuando hay más de un punto fuera de los límites de control, significa que el sistema de causas aleatorias que provoca la variabilidad habitual de las observaciones se ha alterado por la aparición de alguna causa asignable; es necesario entonces descubrir y eliminar dicha causa para que el proceso vuelva a estar bajo control.

Un modelo general para un gráfico de control de la media se define como: Sea w una variable aleatoria que mide alguna característica de calidad de interés, y sean μ_w y σ_w media y la desviación estándar de w. Los límites de control están definidos por

$$LC = \mu_w \pm k\sigma_w \tag{1}$$

donde el valor k depende del tipo de carta de control y es el número de desviaciones estándar a la que se ubican los límites de control a partir de la línea central.

Se puede comprobar que,

$$P(LCI \leq W \leq LCS) = P(\mu_w - k\sigma_w \leq W \leq \mu_w + k\sigma_w) = 0{,}9973 \tag{2}$$

A los gráficos desarrollados de acuerdo con estos principios se les conoce como *gráficos de control de Shewhart*. En la Figura 1, se muestra un típico gráfico de control.

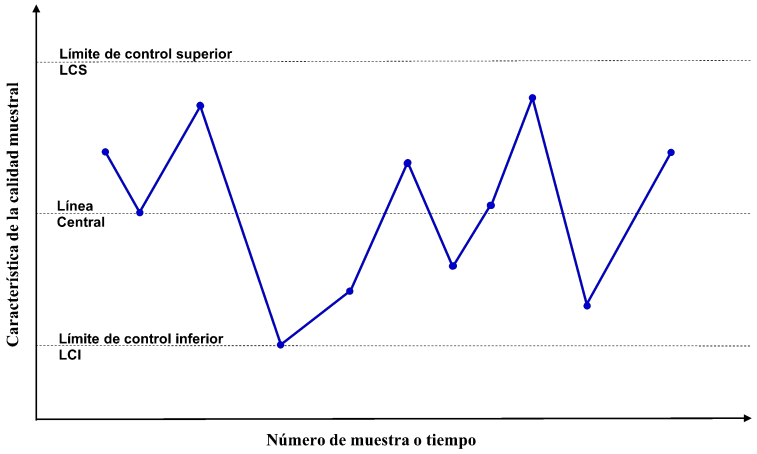

Figura 1: Ejemplo de un gráfico de control
Fuente: Elaboración propia

Los gráficos de control pueden también ser considerados como un contraste de hipótesis, con: H_0: El proceso se encuentra bajo control vs. H_1: El proceso se encuentra fuera de control. Este contraste se realiza repetidamente en todas las muestras que se toman a través del tiempo. Bajo este esquema se consideran dos tipos de errores:

- Error Tipo I (α): Definir al proceso fuera de control cuando realmente no lo está (falsa alarma).
- Error Tipo II (β): Definir al proceso bajo control cuando no lo está.

Cuando los límites se establecen a 3 desviaciones estándar, un Error de Tipo I se presentará durante el 0.27 % del tiempo. Es decir, cuando un punto sale de los límites de control, se supone que se debe a una causa asignable, aun cuando se pueda deber a una causa fortuita. Por otro lado, el Error de Tipo II se presenta cuando se supone que hay una causa fortuita de variación, cuando en realidad hay una asignable. Cuando un punto está dentro de los límites de control se supone que es debido a una causa fortuita, aun cuando podría deberse a una causa asignable.

Cuando se diseñan gráficos de control para monitorear características de calidad, se generan mediciones que dan origen a las variables aleatorias a controlar. Estas variables se clasifican en forma continua o discreta, dependiendo de la naturaleza de la característica a controlar. Es así, que para el caso de variables medidas en una escala continua se deberán implementar gráficos de control por variables. En tales casos, se describe la característica de calidad como una medida de tendencia central y una medida de la variabilidad.

Por otra parte, cuando se estudian variables discretas y las características de calidad son de tipo cuantitativo se deberán emplear gráficos de control por atributos.

2.1 Tiempo hasta la detección. Longitud de la racha media (Average Run Length, ARL)

Para estudiar y comparar el rendimiento de los gráficos de control se necesitan medidas de desempeño. Generalmente se emplea la distribución de la longitud de racha "run length" (RL por sus siglas en inglés). La longitud de la racha media nos da el número medio de muestras que hemos de tomar hasta obtener un punto fuera de los límites de control. El ARL, es una medida común de rendimiento de un gráfico de control encontrada en la literatura.

De acuerdo a Montgomery (2009), cuando los estadísticos del gráfico son independientes e idénticamente distribuidos y los límites de control son constantes, la longitud de racha del gráfico es una variable aleatoria con distribución geométrica, así el ARL bajo-control (ARL_0) puede ser calculado fácilmente a partir de:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \tag{3}$$

Donde, α es la probabilidad de que un punto exceda los límites de control cuando no hay un cambio en la media (Error de Tipo I). Uno de los gráficos de control $\overline{x}$ típico con límites 3σ tiene un ARL_0 370 bajo el supuesto de que los datos sean normalmente distribuidos y se suponen parámetros conocidos.

El ARL para un proceso fuera de control expresa la rapidez para detectar una señal de alarma. Cuando la longitud de racha (RL) se define como una variable geométrica, el cambio se detecta calculando el ARL_1 de la siguiente forma:

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \tag{4}$$

Donde, β es el Error Tipo II, es decir, la probabilidad de no detectar que el proceso está fuera-de-control (Montgomery, 2009).

Dado que el ARL tiene una interpretación intuitiva y atractiva para diseñar y comparar rendimiento entre los gráficos de control (Pastuizaca Fernández, 2016), es una medida muy usada.

Cuando se hace investigación en gráficos de control, es necesario comparar la nueva propuesta con medidas de rendimiento que aparecen en la literatura y una de estas es la medida ARL. Los gráficos eficientes tendrán bajas tasas de falsas alarmas y una detección rápida ante cambios en el proceso, es decir un ARL_0 bajo control grande y un ARL_1 pequeño ante un cambio. Entonces al comparar dos gráficos se suele fijar un valor de ARL_0 grande e igual para ambos gráficos y se ve la respuesta del gráfico a través de los valores de ARL_1. El gráfico más eficiente será aquel con valores de ARL_1 más pequeños. Cuando se estudian variables discretas, la distribución acumulada discontinua no permite en todos los casos fijar un mismo valor de ARL_0, lo que hace que las comparaciones entre las diversas propuestas no sean comparables ni posibles.

3 Gráficos de control multivariantes para estudiar variables discretas

En los procesos productivos generalmente intervienen varias variables que pueden o no estar correlacionadas, para controlarlas se puede hacer uso de un esquema múltiple o un esquema multivariante (Aparisi, García-Bustos, y Epprecht, 2014). El esquema múltiple consiste en usar un gráfico de control por variable a monitorizar, este esquema incrementa la probabilidad de Error Tipo I. Los autores, Benjamini y Liu (1999), Benjamini y Hochberg (2000), Y. Li y Tsung (2012), plantean alternativas para enfrentar este problema, como la corrección de Bonferroni. El esquema multivariante emplea un solo gráfico para controlar todas las variables a la vez. Esta metodología considera las correlaciones entre las variables y consiste en diseñar estadísticos en función de las variables a controlar que minimicen los Errores Tipo 1 y Tipo 2. Con este esquema se busca reducir las falsas alarmas en los gráficos e incrementar la detección de cambios en los parámetros de las variables de calidad.

3.1 Gráficos de control multivariantes para variables Poisson

Han sido muchos los trabajos dedicados a diseñar gráficos de control multivariantes para variables Poisson, en los cuales se han considerado estructuras de correlación entre las variables. La propuesta más simple y sobre la cual otros autores han incluido variaciones ha sido la de Holgate (1964), en la cual cada variable observada Poisson X_i puede expresarse como la suma de dos variables Poisson independientes, es decir

$$X_i = Y_0 + Y_i \tag{5}$$

donde, Y_0 es una variable común y explica la covarianza de todas las variables; Y_i es única a cada variable y explica la variabilidad única de esa variable.

Autores como, Karlis y Meligkotsidou (2005), Karlis y Ntzoufras (2005) han propuesto otras estructuras, donde cada par de variables observables X_i y $X_j, i \neq j$, comparten una variable común independiente no observable Poisson Y_{ij} que explica la covarianza entre ellas. Además, cada variable X_i tiene una variabilidad única que es explicada por una variable Poisson independiente Y_i de la siguiente forma:

$$X_i = Y_i + \Sigma_{j\neq i}^{p} Y_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p \quad \text{y} \quad Y_{ij} \neq Y_{ij} \tag{6}$$

Donde Y_i e Y_{ij} son variables independientes Poisson con medias λ_i y λ_{ij} respectivamente. Los parámetros de las variables observables con este modelo de correlación vienen dados por:

$$E(X_i) = \lambda_i + \Sigma_{j\neq i}^{p} Y_{ij} \tag{7}$$

$$Cov(X_i, X_j) = \lambda_{ij} \tag{8}$$

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}} \tag{9}$$

El modelo de Holgate fue usado por Chiu y Kuo (2007) para proponer un gráfico de control que denotaron como MP, que usa como estadístico la suma de las variables Poisson observadas. En esa investigación ellos comparan su estadístico con el esquema múltiple donde se usa un gráfico de control para cada variable. Por otro lado, Ho y Costa (2009) también usaron la estructura de Holgate y propusieron dos estadísticos para el caso bivariado, uno basado en la diferencia de las variables y otro basado en el máximo de las variables. Tanto en la propuesta de Chiu y Kuo (2007) como la de Ho y Costa (2009) no se pudo fijar un mismo valor ARL_0 para las comparaciones y esta dificultad no permite comparar estas alternativas con las ya existentes.

Continuando con el esfuerzo de mejorar el diseño de los gráficos de control multivariantes, Laungrungrong, Borror, y Montgomery (2011) propusieron un gráfico multivariante EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) donde consideran la suma para variables Poisson con estructura de Holgate (MPEWMA). El gráfico MPEWMA no usó la aproximación normal y se comparó con el MEWMA para va-

riables Poisson propuesto por Lowry, Woodall, Champ, y Rigdon (1992), en este último se uso la aproximación a la Normal. Se demostró que la aproximación normal no es adecuada cuando la media de una variable Poisson es menor a 15. En esta propuesta como se usaron medias ponderadas se pudo alcanzar el ARL_0 deseado.

Epprecht, Aparisi, y García-Bustos (2013) propusieron un gráfico de control basado en la combinación lineal óptima de variables Poisson, denominado gráfico LCP (Linear Combination of Poisson), con el cual, lograron alcanzar el ARL_0 deseado. Los coeficientes óptimos del estadístico son buscados por algoritmos genéticos a fin de minimizar el valor de ARL_1 dado un valor de ARL_0 fijado por el usuario. Los autores presentaron casos con ARL_0 similares a los propuestos en los gráficos basados en la suma, diferencia, máximo y combinación lineal de variables Poisson. Al compararse el gráfico LCP con estas propuestas, en todos los casos resultó ser el mejor.

Otras propuestas relacionadas a variables Poisson con estructura de correlación de Holgate, se pueden encontrar en García-Bustos, Aparisi, y Epprecht (2015), García-Bustos, Mite, y Vera (2016), Raza y Aslam (2019), entre otros.

La estructura propuesta por Holgate (1964) aunque es usada por su simplicidad no suele ser realista, pues no acepta correlaciones negativas entre las variables de conteo, además que no solo un factor común influye en todas las variables. Ante estas situaciones, Chen, Li, y Ou (2015) propusieron el gráfico MEWMA considerando una distribución Log- Normal Poisson. En esta propuesta, las variables observables $X_i,\ i = 1, \ldots, d$ siguen una distribución Poisson, pero la distribución conjunta del logaritmo de las medias sigue una distribución normal multivariante. Esto permite covarianzas negativas entre las variables. La distribución integrada para el Modelo Log- Normal Poisson $P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, viene dada por

$$P(X \mid \mu, \Sigma) = \int \prod_{i=1}^{d} \frac{exp(-\lambda_i)\lambda_i^{X_i}}{x_i!} g(\lambda \mid \mu, \Sigma) d\lambda \tag{10}$$

Donde $g(\lambda \mid \mu, \Sigma)$, es la función de densidad lognormal. Chen et al. (2015) indican la relevancia de su propuesta ante modelos con correlaciones negativas. Otro problema que suele surgir cuando se quiere modelar variables tipos conteo es que no siempre se cumple el supuesto de que la media y varianza son iguales, ante esta situación Saghir y Lin (2014), proponen usar la distribución COM-Poisson, la cual incluye también un parámetro de dispersión, de modo que puede considerarse sobre-dispersión o sub-dispersión para variables de conteo.

Lo más difícil al construir gráficos paramétricos es modelar la estructura de correlación entre las variables (Qiu, 2008). Para enfrentar esta dificultad también se han desarrollado propuestas no paramétricas para variables Poisson. En este sentido, Qiu, He, y Wang (2019) proponen un gráfico no paramétrico basado en un estadístico Ji-cuadrado de modelos log-lineales de variables categóricas con la siguiente forma:

$$Y_j(n) = I(X_j(n) > m) \tag{11}$$

Donde, $Y_j(n)$ toma valores de 1 o 0, si $X_j(n)$ es mayor que la mediana. Esta propuesta presentó buenos rendimientos pues era un gráfico con efecto memoria.

3.2 Gráficos de control para variables multinomiales multivariantes

Cuando las características de calidad son cualitativas, es muy común encontrar que estas variables se definen lingüísticamente y se encuentran correlacionadas generalmente. En estas situaciones, es necesario medir el proceso en conjunto a través de gráficos de control multivariantes. Desde el contexto multivariado son muchos los trabajos dedicados a las variables cuantitativas, sin embargo, son pocos los trabajos en este contexto, dedicados a controlar variables de calidad cualitativas o lingüísticas.

Autores como Taleb, Limam, y Hirota (2006) demuestran la necesidad que muchas veces se presenta en los procesos productivos de definir escalas intermedias para características de calidad lingüísticas que no pueden medirse numéricamente y que van desde la apariencia del producto, la suavidad del mismo hasta su color. En estos casos, los gráficos de control multivariantes son apropiados y necesarios. Lu (1998) propone un gráfico de control para procesos de atributos multivariantes cuando la característica de calidad asume valores binarios. Sin embargo, en muchos casos, la clasificación binaria puede no ser apropiada, por tanto, para complementar la clasificación binaria, los niveles intermedios que puedan surgir se pueden expresar mediante términos lingüísticos. En estas situaciones el estudio estadístico solo puede llevarse a cabo mediante distribuciones multinomiales.

Por otra parte, J. Li, Tsung, y Zou (2014) proponen un gráfico de control de tipo EWMA utilizando la idea de probabilidad ponderada y donde definen el estadístico a controlar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{R_k = 2z_k^T(ln\widehat{y}_k - lnm^{(0)})} \tag{12}$$

En esta propuesta, una señal fuera de control ocurre si $\boldsymbol{R_k} < L$, para $k \geq 1$. $\boldsymbol{L} > 0$ es el límite de control y se calcula por simulación para un ARL bajo-control deseado. $\boldsymbol{z_k}$ representa el promedio ponderado exponencialmente de los vectores de observación $n_j(j = 1, \ldots, k)$ en el tiempo, $\widehat{\boldsymbol{y}}_k$ es el estimador de máxima verosimilitud del vector de conteo de celda esperado sobre $\boldsymbol{z_k}$ y $\boldsymbol{m^{(0)}}$ es el vector de conteo de celda esperado en el estado bajo control. Aquí, los autores estudian procesos categóricos multivariados en forma sistemática para procesos binomiales y multinomiales. Incluyen casos de varios factores todos ellos con dos niveles de atributos y al menos uno con más de dos niveles o categorías. Los datos categóricos se resumen en una tabla de contingencia multivías y se formulan como modelos log-lineales para estudiar la asociación entre los factores categóricos estudiados.

No solo desde el contexto paramétrico y no paramétrico se han desarrollado propuestas para variables multinomiales. Autores como Wang y Raz (1990) han em-

pleado el enfoque basado en la teoría difusa. En esta propuesta las variables multinomiales se consideran como variables lingüísticas y sus categorías como conjuntos de términos.

La teoría difusa en Zadeh (1965) ha sido poco usada para medir y controlar la variabilidad. Sin embargo, muchos autores han analizado su importancia y los aportes que ha significado su utilización. Siendo Laviolette, Seaman, Barrett, y Woodall (1995), Almond (1995), Coppi, Gil, y Kiers (2006) y Sorooshian (2013) algunos de estos. El diseño de los gráficos de control multivariantes en procesos multinomiales bajo el enfoque difuso depende del método de muestreo seleccionado.

Taleb y Limam (2005) y Taleb et al. (2006) sugieren dos enfoques para la construcción de gráficos de control cuando los artículos se clasifican sucesivamente con respecto a cada una de las características de calidad. El primer enfoque define el estadístico bajo el enfoque difuso, T_f^2.

Para obtener este estadístico, se utiliza la mediana difusa y su distribución se obtiene mediante el método Bootstrap. Su construcción es similar al estadístico T^2 de Hotelling.

El segundo enfoque propone el cálculo probabilístico, donde el estadístico a monitorear se basa en el estadístico de Pearson.

Por otro lado, Kumar y Mohapatra (2012) diseñan gráficos de control para características de calidad de atributos múltiples subjetivamente estimados, para esto siguieron el trabajo de Cheng (2005), en donde se emplearon modelos de regresión difusa para automatizar juicios de expertos mediante la asignación de dimensiones medidas para una adecuada calificación de calidad difusa. Estos autores, emplearon el cálculo interactivo ponderado de los valores difusos asignados a las características para obtener muestras globales de calidad. Bajo este enfoque es posible identificar cuáles son las características de calidad responsables de las situaciones fuera de control. En este trabajo, los autores usaron medidas de posibilidad y de necesidad para calcular los límites de control.

Pastuizaca Fernández, Carrión García, y Ruiz-Barzola (2015) presentan un gráfico de control para p características de calidad correlacionadas, medidas de forma independiente, en su trabajo integran conceptos empleados en la teoría difusa con los gráficos de control multivariantes y proponen el diseño de un gráfico de control para las características de calidad correlacionadas de múltiples atributos.

El gráfico de control propuesto por Pastuizaca Fernández et al. (2015) monitorea p variables multinomiales multivariadas correlacionadas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ que se miden de forma independiente. Cada una de las variables tiene s_j categorías, q_{jk}, con $j = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, s_j$. Estas variables multinomiales se consideran variables lingüísticas y sus categorías se consideran los conjuntos de términos que están asociados con subconjuntos difusos F_{jk} descritos por las correspondientes funciones de pertenencia μ_{ijk}. En esta propuesta se usa un gráfico de control T^2 de Hotelling para observaciones individuales para monitorizar las variables resultantes y los límites de control se construyen de acuerdo a Montgomery (2009) basados en los cuantiles de una distribución Beta.

4 Conclusiones

En este artículo se ha presentado una introducción a los gráficos de control, especialmente aquellos diseñados en el contexto multivariante para variables Poisson y multinomiales, además se han presentado algunos trabajos relevantes en este ámbito. Esta revisión de la literatura puede ser el punto de partida para cualquier investigador que desee comenzar a trabajar con gráficos de control multivariantes para variables Poisson y multinomiales. Es extensa la cantidad de artículos publicados en este sentido, sólo hemos mencionado los trabajos que han sido más relevantes y que han marcado el camino para el desarrollo de nuevas propuestas.

La necesidad de controlar la variabilidad en la fabricación de productos en donde se consideran variables lingüísticas y sus categorías como conjuntos de términos es un campo poco estudiado. Si a esto se le añade el hecho de que generalmente se miden varias características de calidad que a su vez están correlacionadas, encontrar el modelo de distribución necesario para el control y el monitoreo de este tipo de procesos es muy complejo.

El empleo de la Teoría Difusa para diseñar gráficos de control podría ser una herramienta poderosa y muy útil para modelar situaciones de control multivariantes donde se tengan variables correlacionadas y de diferentes categorías.

5 Bibliografía

Referencias

Almond, R. G. (1995). Discussion: Fuzzy logic: Better science? Or Better Engineering? *Technometrics*, *37*(3), 267–270. Descargado de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1995.10484329 doi: 10.1080/00401706.1995.10484329

Aparisi, F., García-Bustos, S., y Epprecht, E. K. (2014). Optimum Multiple and Multivariate Poisson Statistical Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, *30*(2), 221–234. Descargado de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qre.1490 doi: 10.1002/qre.1490

Benjamini, Y., y Hochberg, Y. (2000). On the Adaptive Control of the False Discovery Rate in Multiple Testing With Independent Statistics. *Journal of educational and Behavioral Statistics*, *25*(1), 60–83. doi: 10.3102/10769986025001060

Benjamini, Y., y Liu, W. (1999). A step-down multiple hypotheses testing procedure that controls the false discovery rate under independence. *Jour-*

nal of statistical planning and inference, *82*(1-2), 163–170. Descargado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375899000403 doi: 10.1016/S0378-3758(99)00040-3

Chen, N., Li, Z., y Ou, Y. (2015). Multivariate Exponentially Weighted Moving-Average Chart for Monitoring Poisson Observations. *Journal of Quality Technology*, *47*(3), 252–263. doi: 10.1080/00224065.2015.11918131

Cheng, C.-B. (2005). Fuzzy process control: construction of control charts with fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *154*(2), 287–303. Descargado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011405001107 doi: 10.1016/j.fss.2005.03.002

Chiu, J.-E., y Kuo, T.-I. (2007). Attribute Control Chart for Multivariate Poisson Distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *37*(1), 146–158. doi: 10.1080/03610920701648771

Coppi, R., Gil, M. A., y Kiers, H. A. L. (2006). The fuzzy approach to statistical analysis. *Computational Statistics & Data Analysis*, *51*(1), 1–14. doi: 10.1016/j.csda.2006.05.012

Epprecht, E. K., Aparisi, F., y García-Bustos, S. (2013). Optimal linear combination of Poisson variables for multivariate statistical process control. *Computers & operations research*, *40*(12), 3021–3032. Descargado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030505481300186X doi: 10.1016/j.cor.2013.07.007

García-Bustos, S., Aparisi, F., y Epprecht, E. K. (2015). Optimal EWMA of linear combination of Poisson variables for multivariate statistical process control. *International Journal of Production Research*, *53*(14), 4141–4159. doi: 10.1080/00207543.2014.975863

García-Bustos, S., Mite, M., y Vera, F. (2016). Control Charts with Variable Dimension for Linear Combination of Poisson Variables. *Quality and Reliability Engineering International*, *32*(5), 1741–1755. Descargado de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qre.1910 doi: 10.1002/qre.1910

Ho, L. L., y Costa, A. F. B. (2009). Control charts for individual observations of a bivariate Poisson process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, *43*(7-8), 744–755. doi: 10.1007/s00170-008-1746-4

Holgate, P. (1964). Estimation for the bivariate Poisson distribution. *Biometrika*, *51*(1-2), 241–287. doi: 10.1093/biomet/51.1-2.241

Karlis, D., y Meligkotsidou, L. (2005). Multivariate Poisson regression with covariance structure. *Statistics and Computing*, *15*(4), 255–265.

Karlis, D., y Ntzoufras, I. (2005). Bivariate Poisson and Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression Models in R. *Journal of Statistical Software*, *14*(10), 1–36. doi: 10.18637/jss.v014.i10

Kumar, A., y Mohapatra, P. (2012). A new Approach to Design of Fuzzy Multi-Attribute Control Charts. En *POMS 23rd Annual Conference* (Vol. 1, pp. 1–5). Chicago, Illinois, U.S.A.

Laungrungrong, B., Borror, C. M., y Montgomery, D. C. (2011). EWMA control charts for multivariate Poisson-distributed data. *International Journal of Quality Engineering and Technology*, *2*(3), 185–211. doi: 10.1504/IJQET.2011.041227

Laviolette, M., Seaman, J. W., Barrett, J. D., y Woodall, W. H. (1995). A Probabilistic and Statistical View of Fuzzy Methods. *Technometrics*, *37*(3), 249–261. Descargado de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1995.10484327 doi: 10.1080/00401706.1995.10484327

Li, J., Tsung, F., y Zou, C. (2014). Multivariate binomial/multinomial control chart. *IIE Transactions*, *46*(5), 526–542. doi: 10.1080/0740817X.2013.849830

Li, Y., y Tsung, F. (2012). Multiple Attribute Control Charts with False Discovery Rate Control. *Quality and Reliability Engineering International*, *28*(8), 857–871. Descargado de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qre.1276 doi: 10.1002/qre.1276

Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W., y Rigdon, S. E. (1992). A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Technometrics*, *34*(1), 46–53. Descargado de https://amstat.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1992.10485232 doi: 10.1080/00401706.1992.10485232

Lu, X. (1998). Control chart for multivariate attribute processes. *International Journal of Production Research*, *36*(12), 3477–3489. doi: 10.1080/002075498192166

Montgomery, D. C. (2004). *Control estadístico de la calidad* (3.ª ed.). México: Limusa-Wiley.

Montgomery, D. C. (2009). *Statistical Quality Control: A Modern Introduction* (6.ª ed.). Hoboken, New Jersey: John Whiley & Sons, Inc.

Pastuizaca Fernández, M. N. (2016). *Diseño y mejora de gráficos de control multivariantes para atributos. Un enfoque basado en teoría difusa.* (Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de València). doi: 10.4995/Thesis/10251/65073

Pastuizaca Fernández, M. N., Carrión García, A., y Ruiz-Barzola, O. (2015). Multivariate multinomial T2 control chart using fuzzy approach. *International Journal of Production Research*, *53*(7), 2225–2238. doi: 10.1080/00207543.2014.983617

Qiu, P. (2008). Distribution-free multivariate process control based on log-linear modeling. *IIE Transactions*, *40*(7), 664–677. doi: 10.1080/07408170701744843

Qiu, P., He, Z., y Wang, Z. (2019). Nonparametric monitoring of multiple count data. *IISE Transactions*, *51*(9), 972–984. doi: 10.1080/24725854.2018.1530486

Raza, M. A., y Aslam, M. (2019). Design of control charts for multivariate Poisson distribution using generalized multiple dependent state sampling. *Quality Technology & Quantitative Management*, *16*(6), 629–650. doi: 10.1080/16843703.2018.1497935

Rowlands, H., y Wang, L. R. (2000). An approach of fuzzy logic evaluation and control in SPC. *Quality and Reliability Engineering International*, *16*(2), 91–98. Descargado de `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291099-1638%28200003/04%2916%3A2%3C91%3A%3AAID-QRE307%3E3.0.CO%3B2-9` doi: 10.1002/(SICI)1099-1638(200003/04)16:2⟨91::AID-QRE307⟩3.0.CO;2-9

Saghir, A., y Lin, Z. (2014). Control chart for monitoring multivariate COM-Poisson attributes. *Journal of Applied Statistics*, *41*(1), 200–214. doi: 10.1080/02664763.2013.838666

Smith, J. L. (2009). Remembering Walter A. Shewhart's Contribution to the Quality World. *Quality Magazine*. Descargado de `https://www.qualitymag.com/articles/85973-remembering-walter-a-shewharts-contribution-to-the-quality-world`

Sorooshian, S. (2013). Fuzzy Approach to Statistical Control Charts. *Journal of Applied Mathematics*, *Special Issue*. doi: 10.1155/2013/745153

Taleb, H., y Limam, M. (2005). Fuzzy Multinomial Control Charts. En S. Bandini y S. Manzoni (Eds.), *Congress of the Italian Association for Artificial Intelligence 2005. AI*IA 2005: Advances in Artificial Intelligence* (pp. 553–563). Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/11558590_56

Taleb, H., Limam, M., y Hirota, K. (2006). Multivariate Fuzzy Multinomial Control Charts. *Quality Technology & Quantitative Management*, *3*(4), 437–453. doi: 10.1080/16843703.2006.11673125

Wang, J.-H., y Raz, T. (1990). On the construction of control charts using linguistic variables. *The International Journal of Production Research*, *28*(3), 477–487. doi: 10.1080/00207549008942731

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353. Descargado de `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X` doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X