matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2005, Vol. 3, No. 1 Publicado: 2005-04-30

DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO ACTUARIAL DE PAGOS PERIÓDICOS FRACCIONADOS SEMESTRALMENTE CON INCREMENTOS GEOMÉTRICOS

Sandoya Fernando[1]

Resumen. *En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático para el cálculo actuarial de pagos periódicos fraccionados semestralmente con incrementos geométricos. Cabe destacar que en la literatura actuarial solo se presenta el caso de incrementos en progresión aritmética, sin embargo, el modelo con incrementos geométricos es interesante en ambientes inflacionarios. Se hace uso de técnicas de interpolación lineal para representar los pagos fraccionados, y se usan símbolos de conmutación asociados a funciones biométricas de la población ecuatoriana.*

Palabras Claves: Análisis actuarial, Rentas fraccionadas.

1. INTRODUCCION:

El mundo financiero de hoy ofrece una gran variedad de instrumentos que implican riesgo, y la generación de obligaciones y derechos a futuro. La gran mayoría de problemas relacionados con estos instrumentos son resueltos por las ***matemáticas actuariales***, gracias a las cuales las consecuencias de eventos aleatorios futuros pueden ser medidos en términos monetarios.

El problema radica en que como no podemos prever los acontecimientos que de alguna manera podrían interferir con los planes o con el normal flujo de caja de una empresa, tales como la edad de fallecimiento de las personas, entonces es necesario determinar como pueden tomarse decisiones en presencia de flujos aleatorios; para esto, las matemáticas actuariales aportan con una teoría que toma en cuenta la esperanza matemática de los recursos y el riesgo asumido para la obtención de ellos. La solución a este tipo de problemas es, entonces, definir el valor esperado del proyecto económico, el cual, está sometido a la incertidumbre. Así, por el principio de los valores esperados, la distribución de los posibles sucesos puede ser reemplazada por un solo valor, el valor esperado de los flujos monetarios; este ***valor esperado de los flujos aleatorios de pagos monetarios*** en un proyecto se denomina el ***valor actuarial*** del proyecto.

2. ESTABLECIMIENTO DE UNA TABLA DE MORTALIDAD:

Ahora bien, la ***Tabla de mortalidad*** de la población específica sobre la que se está haciendo el estudio es un componente indispensable en los modelos actuariales, ya que en ellas se encuentran tabulados parámetros demográficos como: ***probabilidades de muerte y sobrevivencia*** por años individuales o grupos de edad; a partir de los cuales se determinan los denominados ***símbolos de conmutación***, que son símbolos que incluyen el componente demográfico y el financiero a través de la tasa de interés.

La construcción de estas tablas es una labor compleja, pues se requiere del análisis de los registros de los censos y de los registros de nacimientos y defunciones. Hay que recalcar que las poblaciones difieren en su comportamiento respecto a su mortalidad, por tanto, se pueden cometer muchos errores cuando se usa una tabla de mortalidad referente a otra población. La tabla de mortalidad usada en este trabajo ha sido desarrollada en base a las proyecciones del censo de población, desarrollado por el Instituto Ecuatoriano de Estadísticas y Censos INEC en el año de 1990, y con los registros anuales de nacimientos y defunciones proporcionados por el Registro Civil. La metodología para su desarrollo, y sus consideraciones técnicas no se indican en este trabajo, pero pueden ser consultadas al autor.

2.1. Funciones biométricas.

Las tablas de mortalidad generalmente contienen los valores tabulados de algunos parámetros de la supervivencia de una población, tales como l_x, d_x, q_x y, otras funciones derivadas.

Denotaremos por l_0 al número de recién nacidos de una población cuya mortalidad va a ser estudiada. Cada edad de fallecimiento de un recién nacido tiene asociada una determinada distribución de probabilidad especificada por la función de supervivencia $s(x)$. Por otra parte, denotemos por $\lambda(x)$ al número de sobrevivientes a la edad x y por l_x a su valor esperado, es decir $l_x=E(\lambda(x))$; entonces $\lambda(x)$ tiene una distribución de probabilidad binomial con parámetros l_0 y probabilidad de éxito $s(x)$, por tanto:

[1] *Sandoya Fernando, M.Sc., Profesor Agregado de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: fernandoss@yahoo.com)*

$$l_x = l_o * s(x)$$

De manera similar, si representamos con ${}_n\delta_x$ el número de fallecimientos ocurridos entre las edades *x y x+n*, de entre los l_o iniciales y con ${}_nd_x$ a su valor esperado, se tiene:

$${}_nd_x = E[{}_n\delta_x] = l_o[s(x) - s(x+n)] = l_x - l_{x+n}$$

Si Tomamos d_x (el número total de muertes ocurridas de elementos de edad *x*) y l_x como el número total de personas de edad *x*, podemos estimar la probabilidad de muerte denotada con q_x a través de:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

El cual constituye un estimador de máxima verosimilitud.

Utilizando q_x, y como colectivo inicial $l_o=100000$, podemos estimar los d_x y l_x paralelamente

$$d_x = l_x q_x; \quad l_x = l_{x-1} - d_{x-1}$$

Cuando l_x viene definido por medio de una tabla de mortalidad y se desconoce la ley subyacente, Los valores de u_x pueden aproximarse de la expresión:

$$u_x = \frac{1}{2}\left(\ln l_{x-1} - \ln l_{x+1}\right)$$

De la expresión

$${}_np_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+s} ds\right)$$

Y haciendo n=1, tenemos

$$p_x = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

Tomando logaritmos,

$$\ln p_x = \left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

Y, en términos aproximados

$$\mu_{x+1/2} = \ln\left(p_x\right)$$

Si integramos u_{x+t} entre *t=-1 y t=1,* obtenemos

$$\int_{-1}^{1} u_{x+t} = -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

Y esto es dos veces el valor medio de u_x entre las edades *x-1 y x+1,* lo que nos lleva a la siguiente aproximación:

$$u_x = -\frac{1}{2}\left(\ln p_{x-1} - \ln p_x\right) = \frac{1}{2}\left(\ln l_{x-1} - \ln l_{x+1}\right)$$

3. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO ACTUARIAL:

Una vez que se dispone de la tabla de mortalidad, el siguiente paso es el desarrollo de un modelo que represente el ***valor esperado de los flujos futuros de caja***, para lo cual es necesario realizar los siguientes pasos:

- Crear un modelo de rentas de supervivencia pagadera anualmente, variable, creciente, con incrementos geométricos anuales.
- Ajustar el modelo anterior mediante interpolación lineal simple para conseguir una aproximación fraccional a la mitad del año, pues los modelos tradicionales únicamente contemplan edades enteras, además que los parámetros demográficos disponibles en las tablas de mortalidad son también para edades enteras, por lo cual es necesario estimar los símbolos de conmutación en edades fraccionales, lo cual se puede lograr utilizando el método de interpolación polinómica simple, y ya que los puntos a interpolar son dos (uno en la edad actual y el otro en la edad inmediatamente posterior), el resultado es una interpolación por medio de una recta, teniendo así el modelo deseado.

El modelo así creado, junto con la tabla de mortalidad, permite hacer pruebas en el computador con el modelo planteado y obtener resultados numéricos para distintas edades.

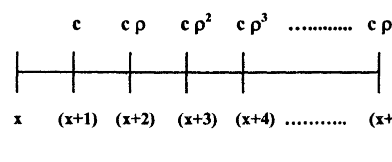
3.1. Desarrollo del Modelo:

En primer lugar se desarrolla el modelo para el caso anual, en la figura 1 aparece el esquema de pagos vencidos con incrementos geométricos. A continuación se presenta la construcción del modelo:

FIG. 1

Desarrollo de un modelo matemático para el cálculo actuarial de pagos periódicos fraccionados semestralmente con incrementos geométricos

Esquema de pagos vencidos de la renta en el caso anual



Donde x es la edad del individuo y $\rho=1+r$, siendo r la tasa de incremento geométrico en los pagos, t representa la variable aleatoria tiempo futuro de sobrevivencia.

$$V.ACT.^{2}\ \left(G_\rho\, ä\right)_x = c\ \left[1\,E_x + \rho_2\,E_x + \rho_3^2\,E_x + ...\right]$$

$$= c\ \sum_{t=1}^{\infty} \rho_t^{t-1}\,E_x$$

$$= c\ \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\rho\rho^{t-1}}{\rho}\, v_t^t\, P_x$$

$$= \frac{c}{\rho}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \rho^t\, v_t^t\, P_x\right]$$

$$= \frac{c}{\rho}\left[\sum_{t=0}^{\infty} (\rho v)_t^t\, P_x - {}_0P_x\right]$$

$$= \frac{c}{\rho}\left[\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE'_x - 1\right]$$

$$= \frac{c}{\rho}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \frac{D'_{x+t}}{D'_x} - 1\right]$$

$$= \frac{c}{\rho}\left[\frac{N'_x}{D'_x} - 1\right]$$

Donde los símbolos de conmutación N'_x y D'_x se deben calcular a la nueva tasa: $i' = \dfrac{1+i}{\rho} - 1$

Como en nuestro caso el pago periódico no tiene frecuencia anual, sino semestral, se debe desagregar y ajustar los valor por interpolación polinómica.

Así, en el caso **SEMESTRAL** se tiene el siguiente desarrollo:

V.ACT

$$= c\begin{bmatrix} {}_{0+1/2}E_x\,\rho^{0} + {}_{0+2/2}E_x\,\rho^{1} + {}_{1+1/2}E_x\,\rho^{2} + \\ {}_{1+2/2}E_x\,\rho^{3} + {}_{2+1/2}E_x\,\rho^{4} + {}_{2+2/2}E_x\,\rho^{5} + ... \end{bmatrix}$$

$$= c\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} {}_{n+\frac{t}{2}}E_x\,\rho^{2\left(n+\frac{t}{2}\right)-1}$$

$$= \frac{c}{\rho}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} {}_{n+\frac{t}{2}}E_x\,\rho^{2n+t}$$

$$= \frac{c}{\rho}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} v^{n+t/2}\ {}_{n+\frac{t}{2}}P_x\,\rho^{2n+t}$$

$$= \frac{c}{\rho}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} v^{\frac{2n+t}{2}}\,\rho^{2n+t}\ {}_{n+\frac{t}{2}}P_x$$

$$= \frac{c}{\rho}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} \left(v\rho^{2}\right)^{\frac{2n+t}{2}}\ {}_{n+\frac{t}{2}}P_x$$

$$= \frac{c}{\rho}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} v'^{\frac{2n+t}{2}}\ {}_{n+\frac{t}{2}}P_x$$

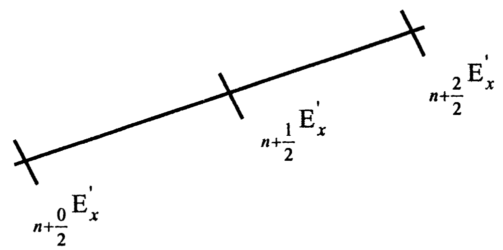
$$= \frac{c}{\rho}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2} {}_{\frac{2n+t}{2}}E'_x$$

La interpolación se realiza de manera lineal, como se observa en la figura 2.

FIG. 2

Desarrollo de un modelo matemático para el cálculo actuarial de pagos periódicos fraccionados semestralmente con incrementos geométricos

Esquema de cálculo de los valores fraccionados en términos de los tabulados para edades enteras con interpolación lineal



De esta manera la función de interpolación que se tiene es:

$$\frac{t-0}{2-0} = \frac{y - {}_tE_x}{{}_{n+1}E_x - {}_nE_x}$$

---

[2] *V. ACT. Representa valor actuarial del flujo de pagos*

Luego:

$$ {}_{\frac{2n+t}{2}} E_x = y = \frac{t}{2}({}_{n+1} E_x - {}_n E_x) + {}_n E_x $$

$$ = \frac{c}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{t=1}^{2} \frac{t}{2} ({}_{n+1} E_x - {}_n E_x) + {}_n E_x \right) $$

$$ = \frac{c}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} ({}_{n+1} E_x - {}_n E_x) + {}_{2n} E_x \right] $$

$$ = \frac{c}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} {}_{n+1} E_x + \frac{1}{2} {}_{n'} E_x \right] $$

$$ = \frac{c}{\rho} \left[\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{n+1} E_x + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_n E_x \right] $$

$$ = \frac{c}{\rho} \left[\frac{3}{2} a_x + \frac{1}{2} \ddot{a}_x \right] $$

$$ = \frac{c}{\rho} \left[\frac{3}{2} \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{1}{2} \frac{N_x}{D_x} \right] $$

$$ = \frac{c}{D_x \, 2\rho} [3 N_{x+1} + N_x] $$

Así se tiene que el valor actuarial buscado es:

$$ V.A. = \frac{c}{2\rho D_x} [3 N_{x+1} + N_x] $$

Donde los símbolos de conmutación D_x , N_x , N_{x+1} son calculados a la tasa i '

$$ i' = \frac{1+i}{\rho} - 1 $$

4. RESULTADOS NUMERICOS:

En la Tabla I se observan los resultados correspondientes al valor actuarial del flujo de pagos considerado cuando el valor inicial es C = \$50, porcentaje de incremento semestral del 5%, tasa de interés anual del 4% y tabla de mortalidad de la población ecuatoriana, los resultados se expresan para individuos entre 30 y 50 años.

TABLA. I

Desarrollo de un modelo matemático para el cálculo actuarial de pagos periódicos fraccionados semestralmente con incrementos geométricos

Resultados numéricos del modelo
Para edades entre 30 y 50 años al 4%

Edad (x)	Valor actuarial (V.A.)
30	5,477.74
31	5,339.26
32	5,203.79
33	5,069.19
34	4,936.02
35	4,805.01
36	4,674.90
37	4,546.23
38	4,419.91
39	4,294.04
40	4,169.72
41	4,045.19
42	3,925.72
43	3,805.38
44	3,687.23
45	3,572.00
46	3,455.98
47	3,342.53
48	3,231.54
49	3,120.34
50	3,011.58

Los valores de los símbolos de conmutación a la tasa del 4% con los cuales se alcanzaron los resultados numéricos se observan en la tabla 2.

TABLA. II

Desarrollo de un modelo matemático para el cálculo actuarial de pagos periódicos fraccionados semestralmente con incrementos geométricos

Valores de los símbolos de conmutación a la tasa ***i' con i= 4%, r= 5%, ρ = 1.05***

EDAD X	D_x	M_x	N_x	EDAD X	D_x	M_x	N_x
0	100000	67712.65867	23481438.89	48	1443431.506	9369255.419	133007100
1	103162.7367	64865.77999	23381438.89	49	1523185.501	9362264.732	131563668.5
2	108006.5429	63509.90252	23278276.16	50	1606359.326	9353900.967	130040483
3	113696.7383	62709.32008	23170269.61	51	1695176.493	9346182.117	128434123.6
4	120039.4552	62219.30026	23056572.88	52	1784895.571	9334027.607	126738947.1
5	126950.1187	61916.05422	22936533.42	53	1880598.615	9322465.293	124954051.6
6	134390.5662	61727.28787	22809583.3	54	1980563.658	9309413.592	123073452.9
7	142334.5193	61594.88481	22675192.74	55	2084575.107	9294400.782	121092889.3
8	150780.6131	61487.2215	22532858.22	56	2194276.444	9278827.173	119008314.2
9	159780.2315	61425.50492	22382077.6	57	2307643.916	9260327.071	116814037.7
10	169323.2571	61366.3532	22222297.37	58	2423584.069	9237586.699	114506393.8
11	179430.5266	61297.94615	22052974.12	59	2545359.847	9213714.396	112082809.8
12	190125.9854	61210.32045	21873543.59	60	2668740.575	9184128.788	109537449.9
13	201448.2565	61106.75103	21683417.6	61	2792472.103	9147479.271	106868709.3
14	213424.354	60976.58314	21481969.35	62	2916779.615	9103969.951	104076237.2
15	226089.5498	60815.79608	21268544.99	63	3045807.151	9057710.25	101159457.6
16	239484.5876	60623.7216	21042455.44	64	3180422.242	9009284.045	98113650.46
17	253617.7843	60364.81561	20802970.86	65	3319659.245	8957389.905	94933228.22
18	268566.1892	60071.76711	20549353.07	66	3462101.749	8900333.656	91613568.97
19	284372.5935	59738.3764	20280786.88	67	3605095.881	8835268.789	88151467.23
20	301063.8861	59339.96986	19996414.29	68	3741569.566	8755090.077	84546371.34
21	318754.7537	58938.05587	19695350.4	69	3875383.703	8664050.273	80804801.78
22	337423.2387	58450.60618	19376595.65	70	3999522.563	8555293.478	76929418.07
23	357211.1273	57960.65586	19039172.41	71	4117210.195	8432625.187	72929895.51
24	378150.6321	57433.14585	18681961.28	72	4225453.812	8293440.307	68812685.32
25	400297.4623	56854.57751	18303810.65	73	4331665.544	8145718.516	64587231.51
26	423745.0223	56245.79955	17903513.19	74	4439693.813	7993430.347	60255565.96
27	448538.5168	55573.84807	17479768.17	75	4528433.138	7815361.149	55815872.15
28	474763.6882	54843.5797	17031229.65	76	4610565.699	7625352.296	51287439.01
29	502482.9773	54031.3972	16556465.96	77	4679508.603	7417217.934	46676873.31
30	531747.2928	53098.41836	16053982.98	78	4706964.266	7163453.128	41997364.71
31	562796.6334	52191.79186	15522235.69	79	4687217.506	6860835.92	37290400.44
32	595443.8523	51017.09767	14959439.06	80	4633177.09	6525111.759	32603182.93
33	630003.0296	49792.38961	14363995.21	81	4488751.164	6102249.71	27970005.84
34	666514.5701	48443.17119	13733992.18	82	4240502.915	5584244.78	23481254.68
35	704973.4553	46847.0942	13067477.61	83	3854399.27	4943303.22	19240751.77
36	745659.913	45167.35866	12362504.15	84	3407626.701	4264896.079	15386352.5
37	788612.5393	43308.6921	11616844.24	85	2896693.881	3549178.001	11978725.79
38	833772.9526	41076.52499	10828231.7	86	2398226.224	2876630.182	9082031.913
39	881605.7026	38802.7273	9994458.745	87	1929433.8	2263713.586	6683805.69
40	932031.8411	36247.75386	9112853.043	88	1471442.837	1689771.073	4754371.89
41	985597.5081	33801.89202	8180821.202	89	1088330.158	1218230.339	3282929.053
42	1041150.573	30124.33732	7195223.694	90	774042.6179	838538.3421	2194598.895
43	1100288.485	26693.1045	6154073.121	91	538088.2282	556066.9682	1420556.277
44	1162343.929	22625.44237	5053784.636	92	367633.2453	353274.9524	882468.0488
45	1227158.605	17587.71858	3891440.707	93	247709.2225	211257.5855	514834.8035
46	1296107.751	12789.35238	2664282.102	94	162222.7217	110884.7131	267125.5809
47	1368174.351	6964.86137	1368174.351	95	104902.8592	43815.88903	104902.8592

5. CONCLUSIONES:

1. Aunque en la literatura no aparecen modelos actuariales de pagos fraccionados con incrementos geométricos, se puede generar tal modelo usando las técnicas de interpolación polinómicas y una tasa de interés alterna para calcular los nuevos símbolos de conmutación de una manera bastante directa y con poco esfuerzo computacional.

2. Tales modelos pueden generar valores actuariales bastante altos, debido al efecto multiplicador del incremento geométrico, por tal motivo tales modelos serían aplicables sólo en situaciones con índices de inflación bastante altos, por ejemplo los que tuvo el Ecuador a fines del siglo XX.

3. Es importante comprender que los modelos estándar que aparecen en la literatura de matemáticas actuariales no son exactamente los que se presentan en la realidad, y que por tanto es necesaria la acción de los investigadores para modelizar lo más fielmente posible cada situación que se presenta en la realidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1] **AYUSO M, ET AL** (2001), *"Estadística actuarial vida"*, Edicions Universitat de Barcelona, España.

[2] **VEGAS A.** (1981), *"Estadística, aplicaciones Econométricas y actuariales"*, Ed. Pirámide, España.

[3] **BOWERS N. ET AL** (1986), *"Actuarial Mathematics"*, ed. Society of Actuaries, EE.UU