matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2005, Vol. 3, No. 1 Publicado: 2005-04-30

EQUICORRELACIÓN MULTIVARIADA

Leiva Ricardo[1], Gei Graciela[2]

Resumen: Se definen los conceptos de vectores equicorrelacionados y de vectores conjuntamente equicorrelacionados. Bajo el supuesto de normalidad, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de la matriz de covarianza de estos dos tipos de vectores. Se sugiere además una metodología para desarrollar tests para contrastar distintas hipótesis que involucran los conceptos de equicorrelación mencionados.

Palabras claves: Equicorrelación multivariada, Estimador de máxima verosimilitud, Tests de la razón de verosimilitud

1. INTRODUCCIÓN

Muchos de los resultados del Análisis Estadístico Multivariado se obtienen partiendo de una muestra aleatoria, es decir, de un conjunto de vectores $X_j = \left(X_{j,1},\ldots,X_{j,m}\right)'$ con j = 1,...,n, que se suponen independientes e idénticamente distribuidos. Sin embargo, existen situaciones en las que esta suposición no se adecua a la realidad. Por ejemplo, en las aplicaciones del análisis discriminante con parámetros poblacionales desconocidos, suele ocurrir que en la muestra de entrenamiento usada para estimar los parámetros de una de las poblaciones, sus vectores son correlacionados entre sí.

En referencia a este ejemplo, Basu y Odell [1] investigaron como la equicorrelación entre los vectores de las muestras de entrenamiento afectaban las probabilidades de mala clasificación en el procedimiento de discriminación lineal de Fisher. Ellos concentraron sus esfuerzos en mostrar cómo la equicorrelación cambiaba las propiedades del estimador usual S de la matriz de covarianza común Γ y cómo el uso de este estimador en el criterio de discriminación de Fisher afectaba a las probabilidades de mala clasificación.

El objetivo de este trabajo es obtener, bajo el supuesto de normalidad, los estimadores máximo verosímiles de la media y de la matriz de covarianza a partir de muestras formadas por vectores equicorrelacionados. En la sección 2, se proponen definiciones de vectores equicorrelacionados y de vectores conjuntamente equicorrelacionados.

En la sección 3, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de la matriz de covarianza de estos tipos de vectores

Finalmente, en la sección 4, se sugiere una metodología para desarrollar tests para contrastar distintas hipótesis que involucran estos conceptos de equicorrelación.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1 Vectores equicorrelacionados

Definición 1: Sea **X** un vector particionado nm- variado $\mathbf{X} = \left(X_1',\ldots,X_n'\right)'$ donde $X_j = \left(X_{j+1},\ldots,X_{j,m}\right)'$ *para* $j=1,\ldots,n$. Sea su vector media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}$, *con* $\boldsymbol{\mu} \in \Re^m$, *y* $\Gamma_{\mathbf{X}}$ su (particionada) matriz de covarianza $\Gamma_{\mathbf{X}} = \left(\Gamma_{XrXs}\right) = \left(\Gamma_{r,s}\right)$ donde $\Gamma_{r,s} = \operatorname{cov}\left[X_r, X_s\right]$ para $r,s:1,\ldots,n$ Los vectores m- variados $X_1,\ldots\ldots,X_n$ son igualmente correlacionados si ellos tienen la siguiente matriz de covarianza equicorrelacionada

$$\Gamma_{r,s} = cov\left[X_r;X_s\right] = \begin{cases}\Gamma_0 & \text{si} \quad r=s \\ \Gamma_1 & \text{si} \quad r \neq s\end{cases},$$

donde Γ_0 es una matriz simétrica definida positiva y Γ_1 es una matriz simétrica. Esto es, la matriz de covarianza del vector particionado mn- variado $\mathbf{X} = \left(X_1',\ldots,X_n'\right)'$ es

$$\Gamma_{\mathbf{X}} = \mathbf{I}_n \otimes \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right) + \mathbf{J}_n \otimes \Gamma_1. \tag{1}$$

Las matrices Γ_0 y Γ_1 se denominan parámetros de equicorrelación.

Si $\Gamma_0 - \Gamma_1$ *y* $\Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1$ son matrices no singulares, entonces

$$\Gamma_{\mathbf{X}}^{-1} = \mathrm{I}_n \otimes \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)^{-1} - \mathrm{J}_n \otimes \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)^{-1}\Gamma_1\left(\Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1\right)^{-1}. \tag{2}$$

---

[1] *Leiva Ricardo, Ph.D. en Estadística, Profesor F.C.E. de la Universidad Nacional de Cuyo, Argentina, (e-mail: rleiva@fcemail.uncu.edu.ar).*

[2] *Gei Graciela, Magíster en Estadística Aplicada, Profesora F.C.E. de la Universidad Nacional de Cuyo, Argentina, (e-mail: ggei@fcemail.uncu.edu.ar).*

Este resultado (2) generaliza el dado por Bartlett [2] para el caso m = 1.
Se puede obtener una expresión alternativa para Γ_{X}^{-1}. Indicando con $U_k = \Gamma_0 + k\Gamma_1$ y notando que $U_{-1} - U_{n-1} = -n\Gamma_1$, resulta que

$$\frac{1}{n}\left[U_{n-1}^{-1} - U_{-1}^{-1}\right] = \frac{1}{n}U_{-1}^{-1}\left[U_{-1}U_{n-1}^{-1} - I_m\right]$$
$$= \frac{1}{n}U_{-1}^{-1}\left[U_{-1} - U_{n-1}\right]U_{n-1}^{-1}$$
$$= -U_{-1}^{-1}\Gamma_1 U_{n-1}^{-1}.$$

Entonces, (2) puede expresarse como

$$\Gamma_X^{-1} = \mathbf{I}_n \otimes \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)^{-1} + \mathbf{J}_n \otimes \frac{1}{n}\left[\left(\Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1\right)^{-1} - \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)^{-1}\right].$$

Hay varias formas de obtener el determinante de Γ_X dada en (1). Una de ellas es usando la matriz R_n de orden $n \times n$ propuesta por Basu y Odell [3], la que está dada por

$$R_n = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix},$$

donde los vectores filas $\mathbf{r}_k$ son $\mathbf{r}_k = \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}(k-1)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{1}_{k-1}, \frac{-(k-1)}{k^{\frac{1}{2}}(k-1)^{\frac{1}{2}}}, \mathbf{0}_{1\times n-k}\right)$, para $k = 2,\ldots,n,$ y $\mathbf{r}_1 = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\mathbf{1}_n$, y donde se entiende que el vector cero $\mathbf{0}_{1\times n-k}$ no aparece en la expresión particionada de $\mathbf{r}_k$ cuando $k = n$.
Esta matriz R_n tiene las siguientes propiedades

1) Es una matriz ortogonal, esto es, $R_n' = R_n^{-1}$, con $|R_n| = (-1)^{n+1}$.
2) Si $diag_n[A,B]$ indica a la matriz diagonal por bloques

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{m\times(n-1)m} \\ \mathbf{0}'_{m\times(n-1)m} & \mathbf{I}_{n-1}\otimes B \end{bmatrix},$$

entonces

$$\left(R_n' \otimes \mathbf{I}_m\right) diag_n\left[A,B\right]\left(R_n \otimes \mathbf{I}_m\right) = \mathbf{I}_n \otimes B + \mathbf{J}_n \otimes \frac{A-B}{n}.$$

3) $\left(R_n \otimes \mathbf{I}_m\right)\Gamma_X\left(R_n' \otimes \mathbf{I}_m\right)$, donde Γ_X está dada en (1) igual a

$$diag_n\left[\Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1, \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)\right] = \begin{bmatrix} \Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1 & \mathbf{0}_{m\times(n-1)m} \\ \mathbf{0}'_{m\times(n-1)m} & \mathbf{I}_{n-1}\otimes\left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right) \end{bmatrix}.$$

Usando las propiedades 1 y 3, y recordando que el determinante de una matriz diagonal por bloques es el producto de los determinates de las submatrices en su diagonal, resulta que

$$\begin{aligned} |\Gamma_X| &= \left|(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m)\Gamma_X\right| = \left|\left(R_n R_n' \otimes \mathbf{I}_m\right)\Gamma_X\right| \\ &= \left|R_n \otimes \mathbf{I}_m\right|\left|\Gamma_X\right|\left|R_n' \otimes \mathbf{I}_m\right| \\ &= \left|\left(R_n \otimes \mathbf{I}_m\right)\Gamma_X\left(R_n' \otimes \mathbf{I}_m\right)\right| \\ &= \left|diag_n\left[\Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1, \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)\right]\right| \\ &= \left|\left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right)\right|^{n-1}\left|\Gamma_0 + (n-1)\Gamma_1\right|. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Vectores equicorrelacionados en forma conjunta

Definición 2: *Para* $i = 1, 2$, *sea* $\mathbf{X}^{(i)}$ *un vector particionado* $n_i m-$*variado* $X^{(i)} = \left(X_1^{(i)'},\ldots,X_n^{(i)'}\right)'$ *donde* $X_j^i = \left(X_{j,1}^{(i)},\ldots,X_{j,m}^{(i)}\right)'$ *para* $j = 1,\ldots,n_i$, *con vector media* $\mu_{\mathbf{X}^{(i)}} = \mathbf{1}_{n_i} \otimes \mu^{(i)}$, $\mu^{(i)} \in \Re^m$, *y matriz de covarianza particionada*

$$\Gamma_{\mathbf{X}^{(i)}} = \operatorname{cov}\left[\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}\right] = \left(\Gamma_{X_r^{(i)}, X_s^{(i)}}\right) = \left(\Gamma_{r,s}^{(i)}\right),$$

donde $\Gamma_{r,s}^{(i)} = \operatorname{cov}\left[X_r^{(i)}, X_s^{(i)}\right]$ *para* $r,s : 1,\ldots,n_i$. *Sean* $\Gamma_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}}$ y $\Gamma_{\mathbf{X}^{(2)},\mathbf{X}^{(1)}}$ *dadas por*

$$\Gamma_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} = \operatorname{cov}\left[\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}\right] = \left(\Gamma_{X_j^{(1)},X_k^{(2)}}\right)$$
$$= \left(\Gamma_{j,k}^{(12)}\right) = \mathbf{\Gamma}'_{\mathbf{X}^{(2)},\mathbf{X}^{(1)}}$$
$$= \operatorname{cov}\left[\mathbf{X}^{(2)},\mathbf{X}^{(1)}\right]' = \left(\Gamma_{X_j^{(2)},X_k^{(1)}}\right)'$$
$$= \left(\Gamma_{j,k}^{(21)}\right)'$$

para $j=1,\ldots,n_1$ *y* $k=1,\ldots,n_2$. *Entonces los dos vectores* $\mathbf{X}^{(1)}$ *y* $\mathbf{X}^{(2)}$ *son conjuntamente equicorrelacionados (o equivalentemente, los vectores* $m-$ *variados* $X_1^{(1)},..,X_{n_1}^{(1)}$ *y los vectores* $m-$ *variados* $X_1^{(2)},\ldots,X_{n_2}^{(2)}$ *son conjuntamente equicorrelacionados) si ellos tienen la siguiente matriz de covarianza conjuntamente equicorrelacionada*

$$cov\left[X_r^{(h)};X_s^{(i)}\right]$$
$$=\begin{cases}\Gamma_0^{(i)} & \text{si } h=i \text{ y } r=s\\ \Gamma_1^{(i)} & \text{si } h=i \text{ y } r\neq s,\\ \Gamma & \text{si } h\neq i\end{cases}$$

donde $h,i=0,1$, $r=1,\ldots,n_h$, $s=1,\ldots,n_i$, *y donde* $\Gamma_0^{(1)}$ *y* $\Gamma_0^{(2)}$ *son matrices simétricas definidas positivas, y* $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_1^{(2)}$, *y* Γ *son matrices simétricas. Esto es, la matriz de covarianza del vector particionado* $(n_1+n_2)m-$ *variado* $\mathbf{X}=(\mathbf{X}^{(1)\prime},\mathbf{X}^{(2)\prime})'$ *es*

$$\Gamma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}\Gamma_{\mathbf{X}^{(1)}} & \Gamma_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}}\\ \Gamma'_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} & \Gamma_{\mathbf{X}^{(2)}}\end{pmatrix} \tag{4}$$

donde

$$\Gamma_{\mathbf{X}^{(i)}} = \mathbf{I}_{n_i}\otimes\left(\Gamma_0^{(i)}-\Gamma_1^{(i)}\right)+\mathbf{J}_{n_i,n_i}\otimes\Gamma_1^{(i)}$$

y

$$\Gamma_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} = \Gamma'_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} = \mathbf{J}_{n_1,n_2}\otimes\Gamma,$$

siendo $\mathbf{I}_{n_i}$ *la matriz identidad* $n_i\times n_i$ *y* $\mathbf{J}_{n_h,n_i}=\mathbf{1}_{n_h}\mathbf{1}'_{n_i}$ *la matriz* $n_h\times n_i$ *formada por unos.*

Si $\Gamma_0^{(i)}-\Gamma_1^{(i)}$ y $\Gamma_0^{(i)}+(n_i-1)\Gamma_1^{(i)}$ son matrices no singulares, entonces se sabe que la inversa de la matriz particionada $\Gamma_{\mathbf{X}}$ es $\Gamma_{\mathbf{X}}^{-1}$ dada por

$$\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_1^{-1} & -\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)}}^{-1}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}}\mathbf{Q}_2^{-1}\\ -\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(2)}}^{-1}\mathbf{\Gamma}'_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}}\mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{Q}_2^{-1}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

donde

$$Q_i = \Gamma_{X^{(i)}} - \Gamma_{X^{(i)},X^{(k)}}\Gamma_{X^{(k)}}^{-1}\Gamma'_{X^{(i)},X^{(k)}}$$
$$= I_{n_i}\otimes\left(\Gamma_0^{(i)}-\Gamma_1^{(i)}\right)$$
$$+J_{n_i,n_i}\otimes\left[\Gamma_1^{(i)}-n_k\Gamma\left(A^{(k)}+n_2B^{(k)}\right)\Gamma\right]$$

para $i=1,2$ y $k=3-i$; y donde

$$\Gamma_{X^{(i)}}^{-1} = I_{n_i}\otimes A^{(i)}+J_{n_i,n_i}\otimes B^{(i)},$$

con

$$A^{(i)} = \left(\Gamma_0^{(i)}-\Gamma_1^{(i)}\right)^{-1}, \tag{6}$$

y

$$B^{(i)} = -A^{(i)}\Gamma_1^{(i)}\left(\Gamma_0^{(i)}+(n_i-1)\Gamma_1^{(i)}\right)^{-1}$$
$$= \frac{\left(\Gamma_0^{(i)}+(n_i-1)\Gamma_1^{(i)}\right)^{-1}-A^{(i)}}{n_i}. \tag{7}$$

Esto es, para $i=1,2$ y $k=3-i$, las matrices en (5) están dadas por

$$\mathbf{Q}_i^{-1} = \mathbf{I}_{n_i}\otimes A^{(i)}+\mathbf{J}_{n_i,n_i}\otimes D^{(i)},$$

donde

$$A^{(i)} = \left(\Gamma_0^{(i)}-\Gamma_1^{(i)}\right)^{-1} = \left(\Delta_0^{(i)}-\Delta_1^{(i)}\right)^{-1}$$

con

$$\Delta_j^{(i)} = \Gamma_j^{(i)} - n_k\Gamma\left(A^{(k)}+n_kB^{(k)}\right)\Gamma,$$

para $j=0,1$, y

$$D^{(i)}$$
$$= -\left(\Delta_0^{(i)} - \Delta_1^{(i)}\right)^{-1} \Delta_1^{(i)}$$
$$\left(\Delta_0^{(i)} + (n_i - 1)\Delta_1^{(i)}\right)^{-1}$$
$$= -\left(\Gamma_0^{(i)} - \Gamma_1^{(i)}\right)^{-1}$$
$$\left[\Gamma_1^{(i)} - n_k \Gamma\left(A^{(k)} + n_k B^{(k)}\right)\Gamma\right]$$
$$\left\{\left[\Gamma_0^{(i)} - n_k \Gamma\left(A^{(k)} + n_k B^{(k)}\right)\Gamma\right]\right.$$
$$+(n_i - 1)$$
$$\left.\left[\Gamma_1^{(i)} - n_k \Gamma\left(A^{(k)} + n_k B^{(k)}\right)\Gamma\right]\right\}^{-1}, \tag{8}$$

(Notar que aún para $\Gamma_0^{(1)} = \Gamma_0^{(2)}$, $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma_1^{(2)}$, (i.e. $A^{(1)} = A^{(2)}$, $B^{(1)} = B^{(2)}$), si $n_1 \neq n_2$ es posible que $D^{(1)} \neq D^{(2)}$ y, por lo tanto, $\mathbf{Q}_1^{-1} \neq \mathbf{Q}_2^{-1}$).

$$-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}_{\mathbf{X}^{(i)}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(i)},\mathbf{X}^{(k)}} \mathbf{Q}_k^{-1}$$
$$= -\left(\mathbf{I}_{n_i} \otimes A^{(i)} + \mathbf{J}_{n_i,n_i} \otimes B^{(i)}\right)$$
$$\left(\mathbf{J}_{n_i,n_k} \otimes \Gamma\right)$$
$$\left(\mathbf{I}_{n_k} \otimes A^{(k)} + \mathbf{J}_{n_k,n_k} \otimes D^{(k)}\right)$$
$$= -\left(\mathbf{J}_{n_i,n_k} \otimes \left(A^{(i)} + n_i B^{(i)}\right)\Gamma\right)$$
$$\left(\mathbf{I}_{n_k} \otimes A^{(k)} + \mathbf{J}_{n_k,n_k} \otimes D^{(k)}\right)$$
$$= \mathbf{J}_{n_i,n_k} \otimes -\left(A^{(i)} + n_i B^{(i)}\right)$$
$$\Gamma\left(A^{(k)} + n_k D^{(k)}\right).$$

En consecuencia,

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{J}_{n_1,n_2} \otimes \mathbf{T} \\ \mathbf{J}_{n_2,n_1} \otimes \mathbf{V} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{Q}_i^{-1} = \mathbf{I}_{ni} \otimes A^{(i)} + \mathbf{J}_{ni,ni} \otimes D^{(i)},$$
$$\mathbf{T} = -\left(A^{(1)} + n_1 B^{(1)}\right)\Gamma\left(A^{(2)} + n_2 D^{(2)}\right)$$

y

$$\mathbf{V} = -\left(A^{(2)} + n_2 B^{(2)}\right)\Gamma\left(A^{(1)} + n_1 D^{(1)}\right).$$

Es importante notar que $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}$ depende de n_1 y n_2. Entonces, aún cuando $\Gamma_0^{(1)} = \Gamma_0^{(2)}$, $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma_1^{(2)}$ y Γ son matrices simétricas, si $n_1 \neq n_2$ es posible que $\mathbf{T} \neq \mathbf{V}$, con $\mathbf{T}$ y $\mathbf{V}$ matrices no simétricas, pero con $\mathbf{T} = \mathbf{V}'$, porque $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}$ debe ser simétrica.

Usando la conocida expresión del determinante de una matriz particionada (Harville [3], teorema 13.3.8, pag.188) el determinante de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}$ es

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)}} & \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} \\ \boldsymbol{\Gamma}'_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} & \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(2)}} \end{vmatrix}$$
$$= \left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)}}\right| \cdot$$
$$\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(2)}} - \boldsymbol{\Gamma}'_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)}} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)}}\right|$$
$$= \left|\mathbf{I}_{n_1} \otimes \left(\Gamma_0^{(1)} - \Gamma_1^{(1)}\right) + \mathbf{J}_{n_1,n_1} \otimes \Gamma_1^{(1)}\right|$$
$$\cdot \left|\mathbf{I}_{n_2} \otimes G^{(2)} + \mathbf{J}_{n_2,n_2} \otimes \Delta_1^{(2)}\right|, \tag{9}$$

donde

$$G^{(2)} = \Gamma_0^{(2)} - \Gamma_1^{(2)} = \left[A^{(2)}\right]^{-1}$$

y

$$\Delta_1^{(2)} = \Gamma_1^{(2)} - n_1 \Gamma\left(A^{(1)} + n_1 B^{(1)}\right)\Gamma.$$

Esto es, $\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|$ es el producto de dos determinantes obtenidos con la ecuación (3).

3. ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

3.1 Matriz de covarianza equicorrelacionada

Sea que el vector particionado $nm-$ variado $\mathbf{X} = \left(X_1',\ldots,X_n'\right)'$ tenga distribución normal multivariada con vector media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}} = \mathbf{I}_n \otimes \left(\Gamma_0 - \Gamma_1\right) + \mathbf{J}_n \otimes \Gamma_1$. Esto es, la función densidad $f_{\mathbf{X}}$ del vector $\mathbf{X}$ es

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}) = \frac{\exp-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)}{\left(2\pi\right)^{\frac{mn}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Sean los vectores $nm-$ variados $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N$ una muestra aleatoria de tamaño N de la población con densidad (10), donde para $h=1,\ldots,N$ es $\mathbf{X}_h=\left(X_{h;1}',\ldots,X_{h;n}'\right)'$, con $X_{h;j}=(X_{h;j,1},\ldots,X_{h;j,m})'$ para $j=1,\ldots,n$. Entonces la función de verosimilitud $L=L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right)$ está dada por

$$\begin{aligned} L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right) &= f_{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N;\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}) \\ &= \prod_{h=1}^{N}\frac{\exp-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)}{\left(2\pi\right)^{\frac{mn}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\exp-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)}{\left(2\pi\right)^{\frac{Nmn}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|^{\frac{N}{2}}}, \end{aligned}$$

o equivalentemente, $L=L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right)$ dada por

$$\begin{aligned} L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right) &= f_{\mathbf{X}_*}(\mathbf{x}_*;\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}) = f_{\mathbf{X}_*}(\mathbf{x}_*;\boldsymbol{\mu},\Gamma_0,\Gamma_1) \\ &= \frac{\exp-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right)}{\left(2\pi\right)^{\frac{Nmn}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \tag{11}$$

donde

$$\mathbf{X}_*=\left(\mathbf{X}_1',\ldots,\mathbf{X}_N'\right)',$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*} &= \mathbf{1}_N\otimes\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{1}_N\otimes\left(\mathbf{1}_n\otimes\boldsymbol{\mu}\right)=\mathbf{1}_{Nn}\otimes\boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*} &= \mathbf{I}_N\otimes\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{I}_N\otimes\left(\mathbf{I}_n\otimes\left(\Gamma_0-\Gamma_1\right)+\mathbf{J}_n\otimes\Gamma_1\right) \\ &= \mathbf{I}_{Nn}\otimes\left(\Gamma_0-\Gamma_1\right)+\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{J}_n\otimes\Gamma_1. \end{aligned}$$

El logaritmo de la función de verosimilitud (la log-verosimilitud) es

$$\begin{aligned} \log(L) &= -\frac{Nmn}{2}\log\left(2\pi\right)-\frac{N}{2}\log\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right| \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right) \\ &= -\frac{Nmn}{2}\log\left(2\pi\right)-\frac{N}{2}\log\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right| \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

La matriz inversa $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}$ que aparece en (12) es, por (2), de la forma

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}=\mathbf{I}_n\otimes A+\mathbf{J}_n\otimes B,$$

donde

$$A=\left(\Gamma_0-\Gamma_1\right)^{-1}$$

y

$$B=-A\Gamma_1\left(\Gamma_0+(n-1)\Gamma_1\right)^{-1}.$$

Sea $\dot{x}_{h;j}=x_{h;j}-\boldsymbol{\mu}$ y designe Q_N a la suma de formas cuadráticas de (12). Entonces

$$\begin{aligned} Q_N &= \sum_{h=1}^{N}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_{h;j}'\left(A+B\right)\dot{x}_{h;j} \\ &\quad +\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}\dot{x}_{h;j}'B\dot{x}_{h;i} \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} Q_N &= \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}tr\left(\left(A+B\right)\dot{x}_{h;j}\dot{x}_{h;j}'\right) \\ &\quad +\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}tr\left(B\dot{x}_{h;i}\dot{x}_{h;j}'\right) \\ &= tr\left(\left(A+B\right)\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_{h;j}\dot{x}_{h;j}'\right) \\ &\quad +tr\left(B\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}\dot{x}_{h;i}\dot{x}_{h;j}'\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Notando que $\dot{x}_{h;j}=x_{h;j}-\bar{x}+\bar{x}-\boldsymbol{\mu}$, donde $\bar{x}$ es el vector media muestral global dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{Nn}\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} x_{h;j},$$

y que

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{h;j} - \bar{x}\right) = 0,$$

resulta que

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_{h;j}\,\dot{x}_{h;j}' = C_0 + Nn\left(\bar{x} - \mu\right)\left(\bar{x} - \mu\right)'$$

donde

$$C_0 = \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{h;j} - \bar{x}\right)\left(x_{h;j} - \bar{x}\right)'. \tag{14}$$

Similarmente, notando que

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}\left(x_{h;i} - \bar{x}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{h;i} - \bar{x}\right)\right] - \left(x_{h;j} - \bar{x}\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{h;i} - \bar{x}\right) - \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{h;j} - \bar{x}\right)$$

$$= 0,$$

resulta que

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n} \dot{x}_{h;j}\,\dot{x}_{h;i}'$$

$$= \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}\left[\left(x_{h;j} - \bar{x} + \bar{x} - \mu\right)\right.$$

$$\left.\left(x_{h;j} - \bar{x} + \bar{x} - \mu\right)'\right]$$

$$= C_1 + Nn(n-1)\left(\bar{x} - \mu\right)\left(\bar{x} - \mu\right)',$$

donde

$$C_1 = \sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n}\left(x_{h;j} - \bar{x}\right)\left(x_{h;i} - \bar{x}\right)'. \tag{15}$$

Entonces, la ecuación (13) se puede expresar como

$$\sum_{h=1}^{N}\left(\mathbf{x}_h - \mu_{\mathbf{X}}\right)'\Gamma_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h - \mu_{\mathbf{X}}\right)$$

$$= tr\left((A+B)C_0\right) + tr\left(BC_1\right)$$

$$+ Nn\cdot tr\left(\left(\bar{x} - \mu\right)'(A+B)\left(\bar{x} - \mu\right)\right)$$

$$+ Nn(n-1)\cdot tr\left(\left(\bar{x} - \mu\right)' B\left(\bar{x} - \mu\right)\right)$$

$$= tr\left(\Gamma_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{C}\right)$$

$$+ \left[\mathbf{1}_{Nn}\otimes\left(\bar{x} - \mu\right)\right]'\Gamma_{\mathbf{X}_*}^{-1}\left[\mathbf{1}_{Nn}\otimes\left(\bar{x} - \mu\right)\right],$$

con

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{Nn}\otimes\frac{1}{Nn}\left(C_0 - \frac{1}{n-1}C_1\right)$$

$$+ \left(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{J}_n\right)\otimes\frac{1}{Nn(n-1)}C_1, \tag{16}$$

donde C_0 y C_1 están dados por (14) y (15), respectivamente.

Como $\Gamma_{\mathbf{X}}^{-1}$ es definida positiva, el mínimo de la forma cuadrática que aparece en el lado derecho es alcanzado cuando μ toma el valor $\hat{\mu} = \bar{x}$. Entonces, cuando $\mu_{\mathbf{X}_*}$ toma el valor $\hat{\mu}_{\mathbf{X}_*} = \mathbf{1}_{Nn}\otimes\hat{\mu} = \mathbf{1}_{Nn}\otimes\bar{x}$, la ecuación (12) se reduce a

$$\log\left(L(\hat{\mu}_{\mathbf{X}_*}, \Gamma_{\mathbf{X}_*})\right)$$

$$= -\frac{Nnm}{2}\log(2\pi)$$

$$-\frac{1}{2}\log\left|\Gamma_{\mathbf{X}_*}\right| - \frac{1}{2}tr\left[\Gamma_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{C}\right].$$

Por lo tanto, para maximizar esta última expresión con respecto a $\Gamma_{\mathbf{X}_*}$ es necesario encontrar el máximo de la expresión formada por el segundo y tercer términos. Usando el lema 3.2.2 de Anderson [4], este máximo es alcanzado cuando $\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*} = \mathbf{C}$, dada en (16), y la función de verosimilitud (11) evaluada en $\hat{\mu}_{\mathbf{X}_*}$ y $\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}$ es

$$\hat{L} = L(\hat{\mu}_{\mathbf{X}_*}, \hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*})$$

$$= \frac{\exp -\frac{1}{2}tr\left[\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{C}\right]}{(2\pi)^{\frac{Nnm}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\exp -\frac{1}{2}tr\left[I_{Nnm}\right]}{(2\pi)^{\frac{Nnm}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\exp -\frac{Nnm}{2}}{(2\pi)^{\frac{Nnm}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\exp -\frac{Nnm}{2}}{(2\pi)^{\frac{Nnm}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|^{\frac{N}{2}}},$$

donde

$$\left|\hat{\Gamma}_{X}\right| = \left|\mathbf{I}_n \otimes \left(\hat{\Gamma}_0 - \hat{\Gamma}_1\right) + \mathbf{J}_n \otimes \hat{\Gamma}_1\right|$$

puede ser calculado usando (3).

3.2 Matriz de covarianza conjuntamente equicorrelacionada

Sea $\mathbf{X}$ el vector particionado $(n_1+n_2)m-$ variado $\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}^{(1)'}, \mathbf{X}^{(2)'}\right)'$, donde, para $i = 1,2$, $X^{(i)} = \left(X_1^{(i)'}, \ldots, X_{n_2}^{(i)'}\right)'$ con $X_j^i = \left(X_{j,1}^{(i)}, \ldots, X_{j,m}^{(i)}\right)'$ para $j = 1,\ldots,n_i$. Supóngase que $\mathbf{X}$ tiene una distribución normal multivariada con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \left(\mathbf{1}_{n_1}' \otimes \boldsymbol{\mu}^{(1)'}, \mathbf{1}_{n_2}' \otimes \boldsymbol{\mu}^{(2)'}\right)$ y matriz de covarianza particionada $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}$ dada por (4). Esto es, la función densidad $f_{\mathbf{X}}$ está dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}) = \frac{\exp-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)}{(2\pi)^{\frac{(n_1+n_2)m}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{17}$$

Sea $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N$ una muestra aleatoria de tamaño N de la población con densidad (17). Esto es, los vectores $(n_1+n_2)m-$ variados $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_N$ son i.i.d. con densidad común (17), donde, para $h = 1,\ldots,N$, $\mathbf{X}_h = \left(\mathbf{X}_h^{(1)'}, \mathbf{X}_h^{(2)'}\right)'$ es tal que para $i = 1,2$, $\mathbf{X}_h^{(i)} = \left(X_{h;1}^{(i)'}, \ldots, X_{h;n_i}^{(i)'}\right)'$, con $X_{h;j}^{(i)} = \left(X_{h;j,1}^{(i)}, \ldots, X_{h;j,m}^{(i)}\right)'$ para $j = 1,\ldots,n_i$. Entonces, la función de verosimilitud $L = L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right)$ está dada por

$$L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right) = \frac{\exp-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)}{(2\pi)^{\frac{Nm(n_1+n_2)}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right|^{\frac{N}{2}}},$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} &L\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right) \\ &= f_{\mathbf{X}_*}\left(\mathbf{x}_*;\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*},\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right) \\ &= f_{\mathbf{X}_*}\left(\mathbf{x}_*;\boldsymbol{\mu},\Gamma_0^{(1)},\Gamma_1^{(1)},\Gamma_0^{(2)},\Gamma_1^{(2)}\right) \\ &= \frac{\exp-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right)}{(2\pi)^{\frac{Nm(n_1+n_2)}{2}}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{X}_* = \left(\mathbf{X}_1',\ldots,\mathbf{X}_N'\right)',$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}' &= \mathbf{1}_N' \otimes \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}' \\ &= \mathbf{1}_N' \otimes \left(\mathbf{1}_{n_1}' \otimes \boldsymbol{\mu}^{(1)'}, \mathbf{1}_{n_2}' \otimes \boldsymbol{\mu}^{(2)'}\right) \end{aligned}$$

y

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*} = \mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}.$$

Por lo tanto, la log-verosimilitud es

$$\begin{aligned} &\log(L) \\ &= -\frac{Nm(n_1+n_2)}{2}\log(2\pi) - \frac{N}{2}\log\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}\right| \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x}_h-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}\right) \\ &= -\frac{Nm(n_1+n_2)}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}\right| \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right)'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\left(\mathbf{x}_*-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_*}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

La matriz $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}$ en (18) es de la forma

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{J}_{n_1,n_2} \otimes \mathbf{T} \\ \mathbf{J}_{n_2,n_1} \otimes \mathbf{V} & \mathbf{Q}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{Q}_i^{-1} = \mathbf{I}_{n_i} \otimes A^{(i)} + \mathbf{J}_{n_i,ni} \otimes D^{(i)},$$

$$\mathbf{T} = -\left(A^{(1)} + n_1 B^{(1)}\right)\Gamma\left(A^{(2)} + n_2 D^{(2)}\right)$$

y

$$\mathbf{V} = -\left(A^{(2)} + n_2 B^{(2)}\right)\Gamma\left(A^{(1)} + n_1 D^{(1)}\right).$$

donde $A^{(i)}, B^{(i)}$ y $D^{(i)}$ están, respectivamente, dados por (6), (7) y (8).

Sea $\overset{\bullet(i)}{x}_{h;j} = x_{h;j}^{(i)} - \mu^{(i)}$, para $i = 1,2$, entonces, la suma de formas cuadráticas

$$Q(\mathbf{x}_*) = \sum_{h=1}^{N}(\mathbf{x}_h - \mu_{\mathbf{X}})' \Gamma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}_h - \mu_{\mathbf{X}})$$
$$= (\mathbf{x}_* - \mu_{\mathbf{X}_*})' \Gamma_{\mathbf{X}_*}^{-1} (\mathbf{x}_* - \mu_{\mathbf{X}_*})$$

puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
Q(\mathbf{x}_*)
&= tr\left[(A^{(1)} + B^{(1)})\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1} \overset{\bullet(1)}{x}_{h;j} \overset{\bullet(1)'}{x}_{h;j}\right] \\
&+ tr\left[B^{(1)}\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{j\neq k=1}^{n1} \overset{\bullet(1)}{x}_{h;k} \overset{\bullet(1)'}{x}_{h;j}\right] \\
&+ tr\left[U\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} \overset{\bullet(1)}{x}_{h;j} \overset{\bullet(2)'}{x}_{h;r}\right] \\
&+ tr\left[(A^{(2)} + B^{(2)})\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2} \overset{\bullet(2)}{x}_{h;r} \overset{\bullet(2)'}{x}_{h;r}\right] \\
&+ tr\left[B^{(2)}\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{r\neq s=1}^{n_2} \overset{\bullet(2)}{x}_{h;s} \overset{\bullet(2)'}{x}_{h;r}\right] \\
&+ tr\left[T\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{r=1}^{n_2} \overset{\bullet(2)}{x}_{h;r} \overset{\bullet(1)'}{x}_{h;j}\right].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Para $i = 1,2$, el vector $m-$ variado $\overset{\bullet(i)}{x}_{h;j}$ puede expresarse como

$$\overset{\bullet(i)}{x}_{h;j} = x_{h;j}^{(i)} - \overline{x}^{(i)} + \overline{x}^{(i)} - \mu^{(i)},$$

donde $\overline{x}^{(i)}$ designa al vector media muestral global

$$\overline{x}^{(i)} = \frac{1}{Nn_i}\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} x_{h;j}^{(i)}.$$

Entonces, operando análogamente a como se hizo para obtener (14) y (15), resulta que

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} \overset{\bullet(i)}{x}_{h;j} \overset{\bullet(i)'}{x}_{h;j}$$
$$= C_0^{(i)} + Nn_i\left(\overline{x}^{(i)} - \mu^{(i)}\right)\left(\overline{x}^{(i)} - \mu^{(i)}\right)',$$

donde

$$C_0^{(i)} = \sum_{h=1}^{N}\sum_{v=1}^{n_i}\left(x_{h;v}^{(i)} - \overline{x}^{(i)}\right)\left(x_{h;v}^{(i)} - \overline{x}^{(i)}\right)', \tag{20}$$

y

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{j\neq k=1}^{n_i} \overset{\bullet(i)}{x}_{h;k} \overset{\bullet(i)'}{x}_{h;j}$$
$$= C_1^{(i)} + Nn_i(n_i - 1)$$
$$\left(\overline{x}^{(i)} - \mu^{(i)}\right)\left(\overline{x}^{(i)} - \mu^{(i)}\right)',$$

donde

$$C_1^{(i)} =$$
$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{v=1}^{n_i}\sum_{v\neq w=1}^{n_i}\left(x_{h;w}^{(i)} - \overline{x}^{(i)}\right)\left(x_{h;v}^{(i)} - \overline{x}^{(i)}\right)'. \tag{21}$$

Finalmente,

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} \overset{\bullet(1)}{x}_{h;j} \overset{\bullet(2)'}{x}_{h;r}$$
$$= \left(\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{r=1}^{n_2} \overset{\bullet(2)}{x}_{h;r} \overset{\bullet(1)'}{x}_{h;j}\right)'$$

puede escribirse como

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} \overset{\bullet(1)}{x}_{h;j} \overset{\bullet(2)'}{x}_{h;r}$$
$$= \sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{h;j}^{(1)} - \overline{x}^{(1)}\right)\left(x_{h;r}^{(2)} - \overline{x}^{(2)}\right)'$$
$$+ \sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)',$$

pues

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{h;j}^{(1)} - \overline{x}^{(1)}\right)\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'$$
$$= \sum_{r=1}^{n_2}\left[\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{h;j}^{(1)} - \overline{x}^{(1)}\right)\right]\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'$$
$$= \sum_{r=1}^{n_2}\left[Nn_1\left(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(1)}\right)\right]\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)' = 0,$$

y

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\left(x_{h;r}^{(2)} - \overline{x}^{(2)}\right)' = 0.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} \overset{\bullet(1)}{x}_{h;j} \overset{\bullet(2)'}{x}_{h;r}$$
$$= C^{(2,1)} + Nn_2n_1\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)',$$

donde

$$C^{(2,1)} = \sum_{h=1}^{N}\sum_{r=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{h;j}^{(1)} - \overline{x}^{(1)}\right)\left(x_{h;r}^{(2)} - \overline{x}^{(2)}\right)',$$

(22)

y

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{r=1}^{n_2} \overset{\bullet}{x}{}_{h;r}^{(2)} \overset{\bullet}{x}{}_{h;j}^{(1)\prime}$$

$$= C^{(1,2)} + Nn_1n_2\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)',$$

donde

$$C^{(1,2)} = \left(C^{(2,1)}\right)' =$$

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{r=1}^{n_2}\left(x_{h;r}^{(2)} - \overline{x}^{(2)}\right)\left(x_{h;j}^{(1)} - \overline{x}^{(1)}\right)'.$$

En consecuencia, reemplazando las expresiones del lado derecho de (19), resulta que

$$\begin{aligned}
&Q(\mathbf{x}_*)\\
&= tr\left[(A^{(1)} + B^{(1)})C_0^{(1)}\right]\\
&\quad + tr\left[B^{(1)}C_1^{(1)}\right] + tr\left[UC^{(2,1)}\right]\\
&\quad + tr\left[(A^{(2)} + B^{(2)})C_0^{(2)}\right]\\
&\quad + tr\left[B^{(2)}C_1^{(2)}\right] + tr\left[TC^{(1,2)}\right]\\
&\quad + Nn_1\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)'\\
&\quad (A^{(1)} + B^{(1)})\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\\
&\quad + Nn_1(n_1 - 1)\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)'\\
&\quad B^{(1)}\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\\
&\quad + Nn_2n_1\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)' U\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\\
&\quad + Nn_2\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'\\
&\quad (A^{(2)} + B^{(2)})\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)\\
&\quad + Nn_2(n_2 - 1)\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'\\
&\quad B^{(2)}\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)\\
&\quad + Nn_1n_2\left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)' T\left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

(23)

Sea $\mathbf{C}$ la matriz $\mathbf{C} = I_N \otimes G$, donde G está dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{J}_{n_1,n_2} \otimes \frac{C^{(1,2)}}{Nn_1n_2} \\ \mathbf{J}_{n_2,n_1} \otimes \frac{C^{(2,1)}}{Nn_1n_2} & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix},$$

(24)

donde, para $j = 1, 2$,

$$\mathbf{C}_j = \mathbf{I}_{n_j} \otimes \frac{1}{Nn_j}\left(C_0^{(j)} - \frac{C_1^{(j)}}{n_j - 1}\right)$$

$$+\mathbf{J}_{n_jn_j} \otimes \frac{C_1^{(j)}}{Nn_j(n_j - 1)},$$

con $C_0^{(j)}$, $C_1^{(j)}$ y $C^{(1,2)}$ dados en (20), (21) y (22), respectivamente. Entonces los seis primeros términos del lado derecho de (23) son iguales a $tr\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{C}\right)$, y los últimos seis términos pueden expresarse como la forma cuadrática $\mathbf{z}'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{z}$, donde

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}\\
&= z\left(\overline{x}^{(1)}, \mu^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \mu^{(2)}\right)' = \mathbf{1}_N \otimes\\
&\left(\mathbf{1}_{n_1}' \otimes \left(\overline{x}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)', \mathbf{1}_{n_2}' \otimes \left(\overline{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'\right)'.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned}
&Q(\mathbf{x}_*)\\
&= Q\left(\mathbf{x}_*; \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \Gamma_0^{(1)}, \Gamma_1^{(1)}, \Gamma_0^{(2)}, \Gamma_1^{(2)}, \Gamma\right)\\
&= tr\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{C}\right) + \mathbf{z}'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Como $tr\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{C}\right)$ no depende de $\mu^{(1)}$ ni de $\mu^{(2)}$ y como $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}^{-1}$ es definida positiva, entonces el valor mínimo 0 de la forma cuadrática $\mathbf{z}'\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}_*}^{-1}\mathbf{z}$ es alcanzado cuando $\mu^{(1)}$ y $\mu^{(2)}$ toman los valores $\hat{\mu}^{(1)} = \overline{x}^{(1)}$ y $\hat{\mu}^{(2)} = \overline{x}^{(2)}$, respectivamente. Por lo tanto, evaluando (18) en $\mu_{\mathbf{X}_*}' = \hat{\mu}_{\mathbf{X}_*}' = \mathbf{1}_N' \otimes \left(\mathbf{1}_{n_1}' \otimes \overline{x}^{(1)\prime}, \mathbf{1}_{n_2}' \otimes \overline{x}^{(2)\prime}\right)$, resulta que

$$\log\left(L(\hat{\mu}_X,\Gamma_X)\right)$$
$$= -\frac{Nm(n_1+n_2)}{2}\log(2\pi)$$
$$-\frac{1}{2}\log\left|\Gamma_{X.}\right| - \frac{1}{2}tr\left[\Gamma_{X.}^{-1}C\right]$$

Usando nuevamente el lema 3.2.2 de Anderson [4], se concluye que el máximo de $\log\left(L(\hat{\mu}_X,\Gamma_X)\right)$ con respecto a $\Gamma_{X.}$ es alcanzado en $\widehat{\Gamma}_{X.} = C$, donde C está dada en (24).

En consecuencia, la función de verosimilitud (11) evaluada en $\hat{\mu}_{X.}$ y $\hat{\Gamma}_{X.}$ es

$$\widehat{L} = L(\hat{\mu}_{X.},\hat{\Gamma}_{X.})$$
$$= \frac{\exp -\frac{1}{2}tr\left[\hat{\Gamma}_{X.}^{-1}C\right]}{(2\pi)^{\frac{N(n_1+n_2)m}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{X.}\right|^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{\exp -\frac{1}{2}tr\left[I_{N(n_1+n_2)m}\right]}{(2\pi)^{\frac{N(n_1+n_2)m}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{X.}\right|^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{\exp -\frac{N(n_1+n_2)m}{2}}{(2\pi)^{\frac{N(n_1+n_2)m}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{X.}\right|^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{\exp -\frac{N(n_1+n_2)m}{2}}{(2\pi)^{\frac{N(n_1+n_2)m}{2}}\left|\hat{\Gamma}_{X}\right|^{\frac{N}{2}}},$$

donde $\left|\hat{\Gamma}_X\right|$ puede obtenerse usando (9).

4. CONCLUSIONES

1. El concepto de equicorrelación univariada, es decir, el de variables aleatorias equicorrelacionados ha sido extensamente analizado en la literatura para relajar el concepto de muestra aleatoria. Este concepto ha resultado ser de gran aplicabilidad para situaciones que se presentan en la realidad. Sin embargo, el concepto de equicorrelación de vectores aleatorios no ha sido explorado debidamente.

2. En este trabajo, no sólo se presentan definiciones precisas de vectores equicorrelacionados y de vectores conjuntamente equicorrelacionados, sino que también se establecen condiciones suficientes bajo las cuales existen las inversas de las matrices de covarianza de estos tipos de vectores. Con estos resultados y bajo el supuesto de normalidad se obtienen los estimadores máximo verosímiles de estas matrices de covarianza, lo que permitirá usar estos conceptos en problemas que se presentan en las aplicaciones de métodos estadísticos multivariados en las que suponer vectores no correlacionados no es apropiado.

3. Este trabajo lleva a considerar futuras investigaciones para dar una solución global a estos problemas. En primer lugar se requiere encontrar tests que permitan docimar las hipótesis de equicorrelación que aquí han sido asumidas. En este sentido aparece como promisorio desarrollar tests de la razón de verosimilitud generalizada ya que para obtenerlos se podrían utilizar los resultados dados en la sección 3 de este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1] **BASU, J.P. , ODELL, P.L.**, (1974), *"Effect of intraclass correlation among training samples on the misclassification probabilities of Baye's procedure"*, Ed. Recognition 6 13-16 Pattern.

[2] **BARTLETT, M.S.**, (1958) *"An inverse matrix adjustment arising in discriminant"*, Ed. Ann. Math. Statist., 22, 107-111 analysis

[3] **HARVILLE, D.A.**, 1997 *"Matrix algebra from a statistician's perspective"*, Ed. Springer-Verlag,. ISBN 0-387-94978-X.

[4] **ANDERSON, T. W.**, (1958) *"An introduction to multivariate statistical analysis"*, Ed. John Wiley & Sons