

## Creación de un paquete en R para gráficos de control multivariante con dimensión variable

## Creation of an R package for multivariate control graphics with variable dimension

Jhonny Barahona y Mariela González-Narváez

**Abstract** Multivariate Control charts are a valuable contribution in the process control field, the control chart  $T^2$  Hotelling is the most commonly used in this field. The present paper is based on the methodology proposed by the authors Aparisi, F., Epprecht E. K., Ruiz-Barzola, O., about Variable Dimension and Double Dimension Control Chart. The main contribution of the article is the development of the package in R based on the graduation project of Barahona-Alvarado Jhonny. The package in R perform multivariate control charts and calculates their respective  $ARL$ , using the graphics  $T^2$  Hotelling, Doble Dimension  $DDT^2$  and Variable Dimension  $VDT^2$ , these last two are variations made the traditional  $T^2$  that get better performance and at the same time reduces the cost of sampling.

For validation of the results the simulación was performed of  $p = p_1 + p_2$  multivariate normal variables,  $p_1$  variables easy to measure or cheap and  $p_2$  variables difficult to measure or expensive.

It was obtained as a result the package in R, which consists of several functions that performs the three control charts. It was further confirmed that variable dimension graph overtakes performance of traditional control graph  $T^2$  with the  $p$  variables, the dimension graph overtakes performance graphic  $T^2$  with  $p_1$  variables and sometimes overtakes the traditional  $T^2$  with the  $p$  variables. The control graphs  $VDT^2$  and  $DDT^2$  reduce the cost of sampling.

**Keywords** Process Control, Control Charts, Hotelling  $T^2$ , Dimension Variable, Double Dimension.

**Resumen** Los gráficos de control multivariante son una valiosa aportación en el

---

Jhonny Barahona, Ing. en Estadística Informática.

Administrador de gestión Grupo DIFARE, Guayaquil, Ecuador, e-mail: jfbaraho@espol.edu.ec

Mariela González-Narváez, M.Sc.

Docente de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ciencias de la Vida, Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador, e-mail: margonzal@espol.edu.ec, <https://orcid.org/0000-0002-8747-5257>

campo del control de procesos, el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling es el más utilizado en este campo.

El presente trabajo se basa en la metodología propuesta por los autores Aparisi, F., Epprecht E. K., Ruiz-Barzola, O. acerca de Gráficos de Control de Dimensión Variable y Doble Dimensión. El aporte principal del artículo es el desarrollo del paquete en  $R$  basado en el proyecto de graduación de Barahona-Alvarado Jhonny. El paquete en  $R$  realiza gráficos de control multivariantes y calcula sus respectivos  $ARL$ , utilizando los gráficos  $T^2$  de Hotelling, de doble dimensión  $DDT^2$  y dimensión variable  $VDT^2$ , estos dos últimos son variaciones realizadas al tradicional  $T^2$  que permiten obtener un mejor rendimiento y a la vez reducir el costo del muestreo.

Para la validación de los resultados se realiza la simulación de  $p = p_1 + p_2$  variables normales multivariante, de  $p_1$  variables fáciles de medir o baratas y  $p_2$  variables difíciles de medir o costosa.

Se obtuvo como resultado el paquete en  $R$ , el cual consta de varias funciones que realizan los tres gráficos de control. Además se confirmó que el gráfico de dimensión variable supera al rendimiento del gráfico de control tradicional  $T^2$  con las  $p$  variables, el gráfico de dimensión supera el rendimiento del gráfico  $T^2$  con las  $p_1$  variables y en algunas ocasiones supera el tradicional  $T^2$  con las  $p$  variables. Los gráficos de control  $VDT^2$  y  $DDT^2$  reducen el costo del muestreo.

**Palabras Claves** Control de procesos, Gráficos de control,  $T^2$  de Hotelling, Dimensión Variable, Doble Dimensión.

## 1 Introducción

### 1.1 Planteamiento del problema

La industria en general maneja varios procesos mediante los cuales realizan sus productos o servicios, en estos procesos se encuentran involucradas varias características de calidad que pueden ser monitoreadas por medio de los gráficos de control univariantes y multivariantes, y así cuando los procesos se encuentren en “estado fuera de control estadístico” tomar las acciones pertinentes de forma instantánea. Lo óptimo es hacer un gráfico de control multivariante y no  $p$  gráficos univariantes.

Aunque los gráficos multivariantes son una mejor opción para el control de procesos, en muchas ocasiones los costos asociados al muestreo son muy elevado, por ello se busca realizar gráficos de control multivariante que utilicen las variables que reflejen altos costos sólo cuando sea necesario, esto ayudaría a reducir los costos de muestreo.

Existe una variedad de gráficos de control y varios programas estadísticos donde se encuentran implementadas funciones para realizar gráficos de control pero de manera univariante. Lamentablemente no existen programas estadísticos que reali-

en gráficos de control multivariantes, lo cual facilitaría su aplicación y el control en los procesos.

## 1.2 Justificación

Considerando que no existen programas estadísticos libres que ofrezcan la posibilidad de realizar gráficos de control multivariantes, es necesario el desarrollo de una aplicación que realice estos gráficos en un software estadístico de costo cero para el usuario final y con la interfaz más amigable posible.

Este programa estadístico sería de mucha utilidad para toda empresa que desee mejorar el control en sus procesos y reducir su variación.

## 2 Metodología

### 2.1 Distancias

El concepto de distancia es uno de los más importantes sobre el cual se han elaborado muchos conceptos matemáticos como la convergencia y los espacios métricos.

#### 2.1.1 Distancia Euclidiana

$$d_{hi} = \sqrt{\sum_{j=1}^p (X_{hj} - X_{ij})^2} = (X_h - X_i)'(X_h - X_i) \quad (1)$$

#### 2.1.2 Distancia de Mahalanobis

$$D_i^2 = (x_i - \mu)' \Sigma^{-1} (x_i - \mu) \quad (2)$$

### 2.2 Distribución probabilística Chi-cuadrado no centralizada

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_p$ ,  $p$  variables aleatorias independientes, normalmente distribuidas con media  $\mu_i$  y la unidad de varianzas. Entonces la variable aleatoria  $\sum_{i=1}^p X_i^2$  se distribuye de acuerdo a la distribución Chi-cuadrado no centralizada. Tiene dos

parámetros:

- $p$  que indica el número de grados de libertad (es decir, el número de  $X_i$ )
- $\lambda$  que está relacionada con la media de las variables aleatorias  $X_i$  por:  $\lambda = \sum_{i=1}^p \mu_i^2$ ;  $\lambda$  es llamado parámetro de no centralidad. Su densidad es:

$$f(x; p; \lambda) = \frac{e^{-\frac{x-\lambda}{2}} x^{\frac{p}{2}-1}}{2^{\frac{p}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^j}{4^j j! \Gamma(j + \frac{p}{2})} \quad (3)$$

### 2.3 Gráficos de Control Multivariante basados en el gráfico de control

#### 2.3.1 Gráfico de Control $T^2$ [Fuchs, C , et al. 1998]

La principal aportación en el campo de los gráficos de control multivariantes fue la realizada por el Profesor Harold Hotelling, [Hotelling, H, 1947] basándose en la distancia de Mahalanobis [Mahalanobis P. C., 1936], utilizó el vector de promedios y la matriz de covarianzas de una variable aleatoria con distribución normal multivariada para proponer un gráfico de control denominado gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, el cual monitoriza la distancia entre el vector de promedios esperado y el vector de promedios observados teniendo en cuenta su matriz de covarianzas y un límite de control ( $CL$ ) este último indica si la distancia entre los dos vectores es lo suficientemente grande para declarar al proceso como fuera de control.

#### Obtención del ARL del gráfico de control $T^2$

Sea  $X_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , procedente de una población con distribución normal multivariada, con parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$ , de la cual se extrae la muestra  $i$ , obteniéndose de ellas  $p$  características de calidad correlacionadas.

El estadístico utilizado es el  $T^2$  de Hotelling tiene la forma:

$$T_i^2 = n(\bar{x}_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{x}_i - \mu_0) \quad (4)$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra [Tracy, N. D , et al. 1992],  $\bar{x}_i$  es el vector de promedios de las variables y  $\mu_0$  es el vector de medias de las variables cuando el proceso está bajo control.

Si  $\mu_1 \neq \mu_0$ ,  $T_i^2$  tiene función de distribución de probabilidad  $\chi^2$  no centralizada y parámetro de no centralidad  $\lambda = nd^2$ ; siendo  $d$  (la distancia de Mahalanobis) el cambio o desplazamiento ocurrido durante el proceso.

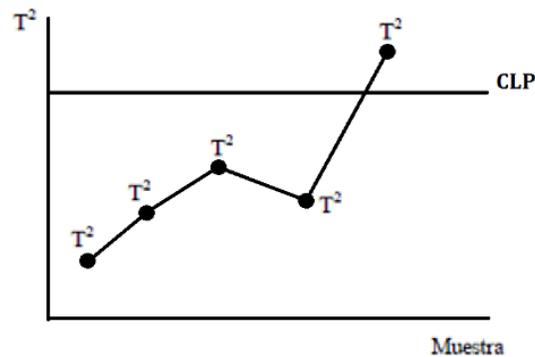
Para un estado bajo control  $\mu_1 = \mu_0$  se tiene:

$$ARL_0 = \frac{1}{\int_{UCL}^{\infty} f(x) dx} = \frac{1}{\alpha} \quad (5)$$

$f(x)$  se distribuye como una  $\chi_{gl=p}^2$ . Cuando  $\mu_1 \neq \mu_0$  ha ocurrido un desplazamiento  $d$ , entonces:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - P(T_i^2 < \frac{UCL}{d})} = \frac{1}{1 - F_x(\frac{UCL}{d})} = \frac{1}{\int_{UCL}^{\infty} f(x; p; \lambda = pd^2) dx} \quad (6)$$

### Gráfico de control $T^2$ de Hotelling



**Fig. 1** Gráfico de Control  $T^2$  de Hotelling

Fuente: Creación propia

### 2.3.2 Gráfico de Control $T^2$ con Dimensión Variable VDT<sup>2</sup>

El gráfico de control  $T^2$  con dimensión variable es considerado cuando el número de variables aleatorias a ser monitorizadas es variable. Por este motivo, se lo denominó gráfico de control con dimensión variable ( $VDT^2$ ). La dimensionalidad del gráfico depende básicamente de la complejidad o economía que representa medir un grupo adicional de  $p_2$  variables de un proceso en el cual se deben controlar  $p = p_1 + p_2$

variables.

### Generalidades del gráfico de control $VDT^2$

El procedimiento estándar para la construcción del gráfico de control  $T^2$  implica tomar de forma periódica, una muestra de tamaño  $n$  [Aparisi F, et al. 2012] [Epprecht E. K, et al. 2013]. Posteriormente se realiza el cálculo del vector de promedios muestrales  $\bar{X}$  de las  $p$  variables a ser monitorizadas, a continuación se calcula el estadístico  $T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$

Donde  $\mu_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})$  es el vector de promedios y  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas del vector de variables  $X$ ; los dos parámetros multivariados representan un estado bajo control del proceso.

El gráfico de control  $T^2$  con dimensión variable y función de distribución  $\chi_{p,\alpha}^2$ , actúa y se interpreta de la misma manera que el gráfico de control de Shewhart, cuando este tiene un límite de control ( $CL$ ) y probabilidad de error tipo  $I$  ( $\alpha$ ).

Cuando el proceso está bajo control, es decir  $\mu_1 - \mu_0 = 0$  se tiene que  $\lambda = 0$ , esto reduce la distribución a una chi-cuadrado centralizada  $\chi_p^2$ . Así pues, existe una probabilidad  $\alpha$  de que el estadístico  $T^2$  supere un punto crítico dado por  $\chi_{p,\alpha}^2$  por lo que la tasa de error global puede mantenerse exactamente en el nivel  $\alpha$  mediante el uso de un gráfico de control de Hotelling. Cuando el proceso está fuera de control, es decir  $\mu_1 \neq \mu_0$  se obtiene  $\lambda \neq 0$ .

### Obtención del $ARL$ a través del gráfico de $VDT^2$ utilizando cadenas de Markov

Para medir el rendimiento de un gráfico de control, se utiliza el promedio de la longitud de rachas ( $ARL$ ) o el número esperado de muestras hasta que el gráfico presente una señal de fuera de control. El  $ARL$  del gráfico de control estándar  $T^2$  se obtiene fácilmente como  $ARL = 1/Pr$ , donde  $Pr$  es la probabilidad para cualquier muestra dada que el estadístico  $T^2$  exceda el límite de control  $CL$ .

Cuando el proceso está bajo control, se tiene  $ARL = \frac{1}{\alpha}$

Y cuando el proceso está fuera de control,

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{[1 - p(\chi_p^2(\lambda) < CL)]} \quad (7)$$

donde  $\chi_p^2 \lambda$  es la distribución chi-cuadrada con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = n \cdot d^2$ ,  $n$  es el tamaño de la muestra y  $d$  es la distancia de Mahalanobis.

El  $ARL$  del gráfico de control  $VDT^2$  es calculado a través de la cadena de Markov con tres estados: [Ross S. M, et al. 1996] [Marin Diazaraque J. M., 2012]

*Estado 1:* El estadístico  $T^2$  cae bajo la línea de alerta  $w$  entonces la siguiente muestra contendrá solo  $p_1$  variables.

*Estado 2:* El estadístico  $T^2$  cae entre la línea de alerta y el límite de control entonces la siguiente muestra contendrá todas las  $p$  variables.

*Estado 3:* El estadístico  $T^2$  excede el respectivo límite de control (estado absorbente de la cadena de Markov).

La matriz de probabilidades de transición para la cadena de Markov es:

$$P^s = \begin{pmatrix} p_{11}^s & p_{12}^s & p_{13}^s \\ p_{21}^s & p_{22}^s & p_{23}^s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando el superíndice  $s$  indica el estado del proceso:  $s = 0$ , si el proceso está bajo control y  $s = 1$ , si el proceso está fuera de control con un cambio en la media correspondiente a la distancia  $d_1$  en el subespacio de las  $p_1$  variables y para una distancia  $d$  en el caso de utilizar el espacio  $p$ -dimensional de todas las variables, tal como lo indica [Aparisi F, et al. 2012]. Los elementos de la matriz  $\mathbf{P}$  están dados por:

$$p_{11}^s = P(T_{p_1}^2 < w_{p_1}) = P(\chi_{p_1}^2(\lambda_{p_1}) < w_{p_1}) \quad (8)$$

$$p_{21}^s = P(T_p^2 < w_p) = P(\chi_p^2(\lambda_p) < w_p) \quad (9)$$

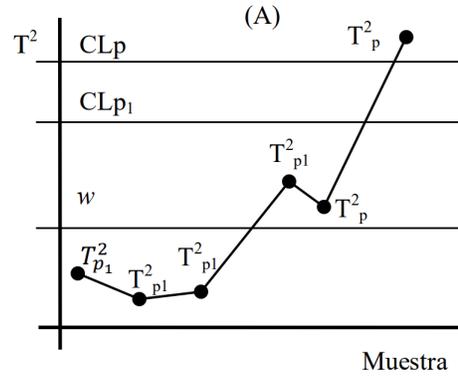
$$p_{12}^s = P(w_{p_1} \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}) = P(w_{p_1} \leq \chi_{p_1}^2(\lambda_{p_1}) < CL_{p_1}) \quad (10)$$

$$p_{22}^s = P(w_p \leq T_p^2 < CL_p) = P(w_p \leq \chi_p^2(\lambda_p) < CL_p) \quad (11)$$

$$p_{13}^s = P(CL_{p_1} \leq T_{p_1}^2) = P(CL_{p_1} \leq \chi_{p_1}^2(\lambda_{p_1})) \quad (12)$$

$$p_{23}^s = P(CL_p \leq T_p^2) = P(CL_p \leq \chi_p^2(\lambda_p)) \quad (13)$$

### Gráfico de control $VDT^2$



**Fig. 2** Gráfico de Control  $VDT^2$ .

Fuente: [Ruiz-Barzola, O, 2013]

### 2.3.3 Gráfico de Control $T^2$ con Doble Dimensión $DDT^2$

El gráfico de control multivariante  $T^2$  de doble dimensión ( $DDT^2$ ) en cada tiempo muestrea las  $p_1$  variables que son baratas o rápidas de medir, se miden y se calcula el estadístico  $T^2_{p_1}$ . Si su valor es inferior a un umbral dado (denominado límite de advertencia), el proceso se considera bajo control. Si su valor es demasiado alto (por encima del límite de control), el proceso es declarado fuera de control. Si su valor está entre el límite de advertencia y el límite de control se miden las  $p_2$  variables restantes (siendo  $p = p_1 + p_2$ ) y el estadístico global se compara con el límite de control apropiado (hay diferentes límites de control para el conjunto de variables  $p_1$  de bajo costo y para el conjunto total de variables  $p$ ).

Por lo tanto, si se emplea el gráfico de control  $DDT^2$  las variables  $p_2$  que son difíciles o costosas de medir, se miden sólo cuando existe la necesidad de adquirir más información. De esta manera, el coste de muestreo se reduce en comparación con el procedimiento de muestrear siempre todas las  $p$  variables para calcular la estadística.

#### Generalidades del gráfico de control $DDT^2$

El gráfico de control estándar  $T^2$  consiste en tomar periódicamente una muestra de tamaño  $n$ . Posteriormente se realiza el cálculo del vector de promedios muestrales  $\bar{X}$  de las  $p$  variables a ser monitorizadas, a continuación se calcula el estadístico  $T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$ , donde  $\mu_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})$  es el vector

de promedios y  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas del estado bajo control del vector de variables  $X$ .

La monitorización consiste en muestrear  $n$  ítems del proceso y medir en primera instancia solo el subgrupo formado por las  $p_1$  variables que son fáciles y/o baratas de medir. Con esta información, se calcula y grafica el estadístico  $T_{p_1}^2$  de Hotelling sobre el gráfico de control

Si  $T_{p_1}^2 < w$  no se toma ninguna acción futura y si  $T_{p_1}^2 \geq CL_{p1}$  el proceso es considerado fuera de control.

La segunda etapa del procedimiento se hace necesaria cuando  $w \leq T_{p_1}^2 < CL_{p1}$ , como el valor del estadístico  $T_{p_1}^2$  es alto pero no lo suficiente como para considerar que el proceso está fuera de control entonces debe ser analizada más información estadística de la muestra.

### Obtención del ARL del gráfico de control DDT<sup>2</sup>

La medida más común del rendimiento estadístico es el promedio de la longitud de rachas ( $ARL$ ) que es el número esperado de muestras hasta que una señal de fuera de control es señalada por el gráfico de control.

Cuando los puntos marcados en el gráfico son independientes, el  $ARL$  es simplemente el inverso de la probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites de control.

El cálculo del  $ARL$  para el gráfico de control estándar  $T^2$  cuando el proceso está bajo control es,  $ARL = \frac{1}{\alpha}$  (Donde  $\alpha$  es la probabilidad de falsa alarma) y cuando el proceso está fuera de control  $ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-P[\chi_p^2(\lambda) < CL]}$ , Donde  $\beta$  es la probabilidad de error tipo II y  $\chi_p^2(\lambda)$  es la función de distribución chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = n \cdot d^2$ , y  $d$  es la distancia de Mahalanobis. Por lo tanto, el  $ARL$  del gráfico de control DDT<sup>2</sup> se calcula como:

$$ARL = \frac{1}{1 - P_a} \quad (14)$$

Siendo  $P_a$  la probabilidad de ausencia de señal, dada por:

$$P_a = P_1 + P_2 \quad (15)$$

Y a su vez,  $P_1$  es la probabilidad de que el primer estadístico calculado con sólo el conjunto de  $p_1$  variables no de señales de fuera de control ni indique la necesidad de medir las variables restantes es decir,

$$P_1 = P(T_{p_1}^2 < w) \quad (16)$$

Y  $P_2$  es la probabilidad de que el primer estadístico caiga entre el límite de alerta y el límite de control y que el estadístico  $T^2$  obtenido con las  $p$  variables sea menor que el límite de control, [Ruiz-Barzola, O, 2013]:

$$P_2 = P(w \leq T_{p_1}^2 < CL_{p1}) * P(T_p^2 < CL_p | w \leq T_{p_1}^2 < CL_{p1}) \quad (17)$$

Para poder calcular  $P_2$ , es necesaria la distribución condicional de  $T_p^2$ .

[Murphy, B. J., 1987] muestra que cuando el proceso está bajo control, con  $\mu = 0$ , el estadístico  $D = T_p^2 - T_{p_1}^2$  se distribuye como  $\chi_{p_2}^2$ , donde  $p_2 = p - p_1$ . Por lo tanto, cuando el proceso está bajo control, lo calcularemos por medio de:

$$P(T_p^2 < CL_p \mid w \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}) = P(D < CL_p - T_{p_1}^2) = P(\chi_{p_2}^2 < CL_p - T_{p_1}^2) \quad (18)$$

Cuando el proceso está fuera de control  $D \sim \chi_{p_2}^2[\lambda = n(d_p^2 - d_{p_1}^2)]$ , donde  $d_{p_1}$  y  $d_p$  son las distancias de Mahalanobis de las medias de  $p_1$  y  $p$  variables respectivamente con respecto a  $\mu_0$ . Como resultado cuando el proceso está fuera de control.

$$P(\chi_{p_2}^2[\lambda = n(d_p^2 - d_{p_1}^2)] < CL_p - T_{p_1}^2) \quad (19)$$

### Gráfico de control $DDT^2$

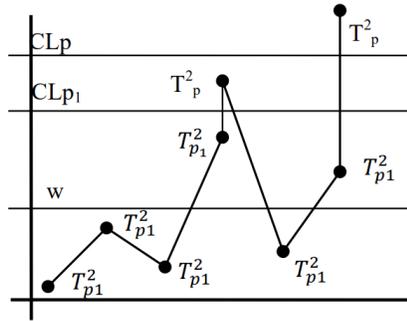


Fig. 3 Gráfico de Control  $DDT^2$ .

Fuente: [Ruiz-Barzola, O, 2013]

## 2.4 Simulación de variables aleatorias con Distribución Normal Multivariante

### 2.4.1 Método basado en la triangulación de Cholesky.

Sea el vector aleatorio  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^t \sim N(0, I)$  siendo  $I$  la matriz identidad, entonces  $X = \mu + AZ \sim N(\mu, AA^T = \Sigma)$  donde  $A$  es la matriz triangular inferior de Cholesky.

Algoritmo:

- Calcular  $A$  matriz triangular inferior de Cholesky.

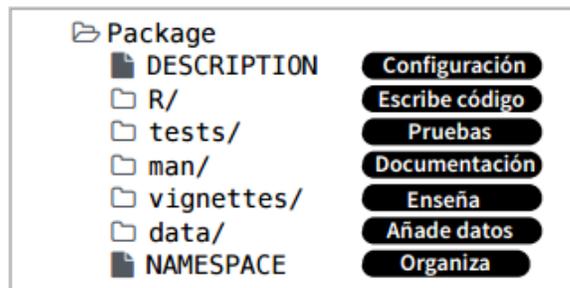
- Generar  $Z_1, \dots, Z_n$  con distribución  $N(0, 1)$ . Hacer  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$
- Salida:  $X = \mu + AZ$

## 2.5 Desarrollo de paquetes en R

Los paquetes de R son la forma ideal de distribuir código **R** para que otras personas los puedan reutilizar. RStudio incluye un conjunto de herramientas que facilitan la creación y desarrollo de paquetes en R de forma más productiva.

### 2.5.1 Estructura de paquetes

Las fuentes de un paquete de R están contenida en un directorio como se muestra en la figura 4.



**Fig. 4** Estructura de un paquete en R

Fuente: [Team, R.Studio, 2015]

### 2.5.2 DESCRIPTION

Este archivo contiene la información básica del paquete con un formato preestablecido. Los campos Package, Version, License, Title, Author y Maintainer son obligatorios.

```

Package: mipaquete
Title: Titulo del paquete
Version: 0.1.0
Authors@R: person("Hadley", "Wickham", email =
  "hadley@me.com", role = c("aut", "cre"))
Description: Lo que el paquete hace (en un párrafo)
Depends: R (>= 3.1.0)
License: GPL-2
LazyData: true
Imports:
  dplyr (>= 0.4.0),
  ggvis (>= 0.2)
Suggests:
  knitr (>= 0.1.0)
Imports: paquetes que tu paquete
necesita tener para funcionar. R los
instalará cuando instalas tu paquete.
Suggests: paquetes que no son
esenciales para el tuyo. Usuarios los
pueden instalar manualmente, si
gustan, o no instalarlos.

```

Fig. 5 DESCRIPTION de un paquete en R

Fuente:[Team, R.Studio, 2015]

### 2.5.3 NAMESPACE

En este archivo el autor puede especificar las variables del paquete que se exportan y van hacer utilizadas por los usuarios. Las variables importadas de otros paquetes, las clases y métodos. [Perpiñan, O, 2015]

Para exportar las variables var1 y var2:

- `export(var1, var2)`.

Para importar las variables var1 y var2 del paquete **Pkgext**:

- `importFrom(Pkgext, var1, var2)`

Para importar métodos y clases de otro paquete:

- `importClassesFrom(package,...)`
- `importMethodsFrom(package,...)`

### 2.5.4 Documentación (Carpeta man)

Las páginas de ayuda de los objetos R se escriben usando el formato “*R documentation*” (.Rd), un lenguaje similar a  $\LaTeX$ . Todos los comandos disponibles en el manual Writing R Extensions de la página de R [Team, R.Studio, 2016].

### 2.5.5 Código (Carpeta R)

En la carpeta R se debe agregar todas las líneas de código que deseamos compartir en nuestro paquete.

### 2.5.6 Comprobar, construir y publicar

Para comprobar el paquete desarrollado [Paco, 2013]

- R CMD check MiPaquete/

Para construir el paquete:

- R CMD build MiPaquete/

El principal repositorio de paquetes estables es CRAN publicar en este repositorio conlleva la aceptación de varias condiciones que se deben cumplir estas se encuentran especificadas en el CRAN Repository Policy. Otros repositorios en los que podemos compartir un paquete son: GitHub, R-Forge, RForge, Bioconductor.

## 3 Resultados

Se realizó la simulación de variables aleatorias normales multivariantes, tomando como parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$ .

Donde:

- $\mu$ : El vector de las medias de las variables (Parámetros del proceso cuando está bajo control).
- $\Sigma$ : La matriz de varianzas y covarianzas esta debe ser una matriz simétrica y definida positiva (Parámetros del proceso cuando está bajo control).

Se realizó la simulación de 250 observaciones y se tomó como parámetros los siguientes valores:

$$\mu = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 7 \\ 8.45 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.5 & 2.4 \\ 1.5 & 3.0 & 3.1 \\ 2.4 & 3.1 & 4.0 \end{bmatrix}$$

Parámetros del proceso cuando está bajo control son:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 5.4, 6.8, 8.5 \end{bmatrix}$$

y

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.5 & 2.4 \\ 1.5 & 3.0 & 3.1 \\ 2.4 & 3.1 & 4.0 \end{bmatrix}$$

Posterior a la simulación de variables, se realizó las funciones que permiten realizar los gráficos de control en el software estadístico **R**. Y se procedió a desarrollar el paquete.

### 3.1 Desarrollo y publicación del paquete *Gráficos de control multivariante*

#### *Documentación del paquete Gráficos de Control Multivariante*

```
Gcmulti-package (Gcmulti)                                     R Documentation

Gráficos de control Multivariante

Description
Permite realizar los gráficos de control multivariante T2 de Hotelling, de doble dimensión y de dimensión variable. Además calcula los ARL bajo y fuera de control.

Details
Package: Gcmulti
Type: Package
Version: 1.0
Date: 2016-08-29
License: GPL (>=2)

Author(s)
Jhonny Barahona
Omar Ruiz
Maintainer: Jhonny Barahona <jbaraho@espol.edu.ec>

References
[1] Aparisi, F.; Epprecht, E.; Ruiz, O.; Veiga A., "Reducing Sampling Costs of Multivariate SPC with a Double-Dimension T*2 Control Chart", International Journal of Production Research, vol. 1, no. 1, pag. 1-15, 2013
[2] Aparisi, F.; Epprecht, E.; Ruiz, O., "T2 Control Charts with Variable Dimension", Journal of Quality Technology, vol. 44, no. 4, pp. 375-393, 2012.
[3] Ruiz, O., "Gráficos de control de calidad multivariantes con dimensión variable" Tesis doctoral, Dept. de Estadística e Investigación Operativa, Univ. Pol. de Valencia, España, 2013.
```

**Fig. 6** Paquete Gcmulti Gráficos de Control Multivariante  
Fuente: Creación propia

*Documentación de la función que realiza el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling.*

Grafica\_T2{Gomulti} R Documentation

**Grafica T2 de Hotelling**

**Description**  
Esta función permite realizar la gráfica de control T2 de Hotelling y obtener sus ARL's bajo y fuera de control.

**Usage**  
grafica\_T2(mu, sigma, X, LCS, d, k)

**Arguments**

mu: El vector de las medias de las variables (Parámetros del proceso cuando está bajo control)  
 sigma: La matriz de varianzas y covarianzas (Parámetros del proceso cuando está bajo control)  
 X: es la matriz que contiene las variables  
 LCS: El límite de control superior  
 d: La distancia de mahalanobis  
 k: El tamaño de la muestra

**Value**  
Gráfico de control multivariante T2 de Hotelling;  
 ARL0: Promedio de longitud de rachas cuando el proceso está bajo control;  
 ARL1: Promedio de longitud de rachas cuando el proceso está fuera de control.

**Fig. 7** Documentación gráfico  $T^2$  de Hotelling  
Fuente: Creación propia

*Documentación de la función que realiza el gráfico de control de dimensión variable  $VDT^2$ .*

Grafica\_T2DV{Gomulti} R Documentation

**Gráfico de dimensión variable VDT2**

**Description**  
Esta función permite realizar gráficos de control de dimensión variable y obtener sus ARL's bajo y fuera de control.

**Usage**  
grafica\_T2DV(p1, p, w, CLp1, CLp, disp1, disp, mu, sigma, X, k, inter = 0.05 ProbInic\_p1 -1)

**Arguments**

p1: Numero de variables p1 (Variables fáciles de medir o baratas)  
 p2: Numero de variables p2 (Variables complejas de medir o costosas)  
 p: Número total de variables  
 w: Límite de alerta o de advertencia  
 CLP1: Límite de control p1  
 CLP: Límite de control p  
 disp1: Distancia de mahalanobis de p1  
 disp: Distancia de mahalanobis de p  
 mu: El vector de las medias de las variables (Parámetros del proceso cuando está bajo control)  
 sigma: La matriz de varianzas y covarianzas (Parámetros del proceso cuando está bajo control)  
 X: es la matriz que contiene las variables  
 k: El tamaño de la muestra

**Value**  
Gráfico de control multivariante de dimensión variable  
 ARL0: Promedio de longitud de rachas cuando el proceso está bajo control.  
 ARL1: Promedio de longitud de rachas cuando el proceso está fuera de control.

**Fig. 8** Documentación gráfico  $VDT^2$  de Hotelling  
Fuente: Creación propia

*Documentación de la función que realiza el gráfico de control de doble dimensión DDT<sup>2</sup>.*

Grafica\_T2DD(Gcmulti) R Documentation

**Grafica de doble dimensión DDT<sup>2</sup>**

**Description**  
Esta función permite realizar la gráfica de control de doble dimensión y obtener sus ARL's bajo y fuera de control.

**Usage**  
grafica\_T2DD(p1, p, w, CLP1, CLP, disp1, disp, mu, sigma, X, k, inter = 0.05)

**Arguments**

p1: Número de variables p1 (Variables fáciles de medir o baratas)  
p2: Número de variables p2 (Variables complejas de medir o costosas)  
p: Número total de variables.  
w: Límite de alerta o de advertencia  
CLP1: Límite de control p1  
CLP: Límite de control p  
disp1: Distancia de mahalnobis de p1  
disp: Distancia de mahalnobis de p  
mu: El vector de las medias de las variables (Parámetros del proceso cuando está bajo control)  
sigma: La matriz de varianzas y covarianzas (Parámetros del proceso cuando está bajo control)  
X: es la matriz que contiene las variables  
k: El tamaño de la muestra

**Value**  
Gráfico de control multivariante de doble dimensión.  
ARL0: Promedio de longitud de rachas cuando el proceso está bajo control.  
ARL1: Promedio de longitud de rachas cuando el proceso está fuera de control.

**Fig. 9** Documentación gráfico DDT<sup>2</sup> de Hotelling

Fuente: Creación propia

La publicación del paquete Gcmulti de Graficos de Control Multivariante fue realizada en el repositorio de GitHub y está a disposición de los usuarios del R.

Why GitHub? · Enterprise · Explore · Marketplace · Pricing · Search · Sign in · Sign up

jhonnybarahona / Gcmulti

Code · Issues · Pull requests · Projects · Security · Insights

Paquete de R que permite realizar gráficos de control multivariante

2 commits · 1 branch · 0 packages · 0 releases · 1 contributor

Branch: master · New pull request · Find file · Clone or download

File	Commit	Time
R	Add files via upload	3 years ago
man	Add files via upload	3 years ago
DESCRIPTION	Add files via upload	3 years ago
Gcmulti.Rproj	Add files via upload	3 years ago
NAMESPACE	Add files via upload	3 years ago
README.md	Initial commit	3 years ago

**Gcmulti**  
Paquete de R que permite realizar gráficos de control multivariante

**Fig. 10** Paquete Gcmulti en GitHub

Fuente: Creación propia

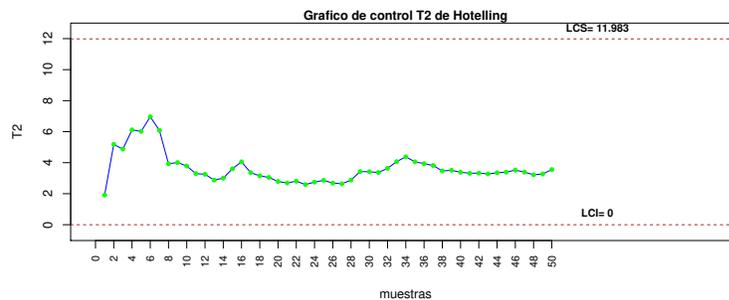
El paquete puede ser descargado por medio de las siguientes líneas de código.  
`library(devtools) install_github("jhonnybarahona/Gcmulti")`  
 En caso de no tener descargada la librería devtools se deberá descargar. Una vez instalado el paquete ya se puede hacer uso de las funciones desarrolladas.

### 3.2 Gráficos de control $T^2$ de Hotelling

Los parámetros utilizados para el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling son:

- $n$ : El tamaño de la muestra.
- $\mu$ : El vector de las medias de las variables (Parámetros del proceso cuando está bajo control).
- $\Sigma$ : La matriz de varianzas y covarianzas (Parámetros del proceso cuando está bajo control).
- $d$ : La distancia de mahalanobis.
- $LCS$ : El límite de control superior.
- $p_1$ : Número de variables  $p_1$  (Variables fáciles de medir o baratas).
- $p_2$ : Número de variables  $p_2$  (Variables complejas de medir o costosas).
- $p$ : Número total de variables.  $p = p_1 + p_2$

Con los datos simulados procedemos a realizar gráficos de control  $T^2$  de Hotelling.

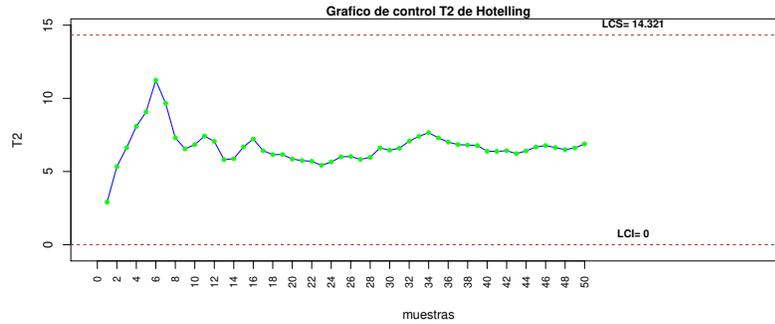


**Fig. 11** Gráfico de control  $T^2$  con  $p_1$  variables,  $n = 5$   $ARL_0 = 400$ ,  $ARL_1 = 1.936$  Gráfico de control  $T^2$  de Hotelling con  $p_1$  variables, utilizando los siguientes parámetros:  $\mu$ ,  $\Sigma$  cuando el proceso está bajo control,  $n = 5$ ,  $LCS = 11.983$ ,  $d = 1.5$

Fuente: Creación propia

En el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling podemos apreciar que ninguna de las muestras supera el límite de control superior por lo que se concluye que el proceso está bajo control.

En promedio se requerirá muestrear 2 veces hasta obtener una muestra que de señal de bajo control cuando realmente el proceso está fuera de control.



**Fig. 12** Gráfico de control  $T^2$  con  $p$  variables,  $n = 5$   $ARL_0 = 400$ ,  $ARL_1 = 1.213$  Gráfico de control  $T^2$  de Hotelling con  $p$  variables, utilizando los siguientes parámetros:  $\mu$ ,  $\Sigma$  cuando el proceso está bajo control,  $n = 5$ ,  $LCS = 14.321$ ,  $d = 2$

Fuente: Creación propia

En el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling podemos apreciar que ninguna de las muestras supera el límite de control superior por lo que se concluye que el proceso está bajo control.

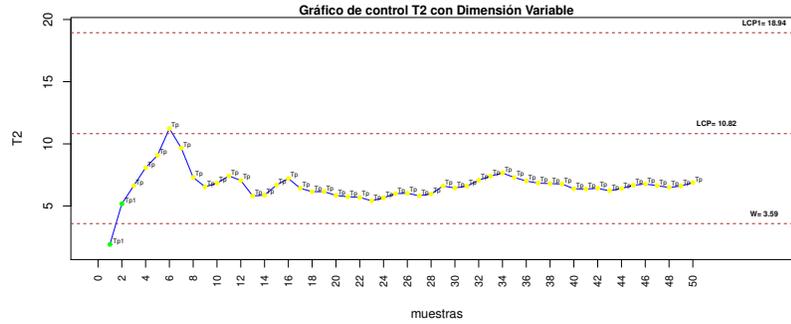
En promedio se requerirá muestrear 2 veces hasta obtener una muestra que de señal de bajo control cuando realmente el proceso está fuera de control.

### 3.3 Gráficos de control de Dimensión Variable

Los parámetros utilizados para el gráfico de control  $T^2$  con dimensión variable son:

- $\mu$ : El vector de las medias de las variables (Cuando el proceso está bajo control).
- $\Sigma$ : La matriz de varianzas y covarianzas (Cuando el proceso está bajo control).
- $p_1$ : Número de variables  $p_1$  (Variables fáciles de medir o baratas).
- $p_2$ : Número de variables  $p_2$  (Variables complejas de medir o costosas).
- $p$ : Número de variables.
- $w$ : Límite de alerta o de advertencia.
- $CLP_1$ : Límite de control  $p_1$ .
- $CLP$ : Límite de control  $p$ .
- $dis_{p_1}$ : Distancia de mahalanobis de  $p_1$ .
- $dis_p$ : Distancia de mahalanobis de  $p$ .
- $n$ : El tamaño de la muestra.

Con los datos simulados procedemos a realizar gráficos de control  $T^2$  con dimensión variable con diferentes escenarios.



**Fig. 13** Gráfico de control  $VDT^2$  con  $n = 5$ ,  $ARL_0 = 400$ ,  $ARL_1 = 1.09$  Gráfico de control con dimensión variable utilizando los siguientes parámetros:  $\mu$ ,  $\Sigma$  cuando el proceso está bajo control,  $p_1 = 2p = 3$ ,  $w = 3.59$ ,  $CLP_1 = 18.94$ ,  $CLP = 10.82$ ,  $dis_{p_1} = 1.5$ ,  $dis_p = 2$ ,  $n = 5$ .  
Fuente: Creación propia

En el gráfico de control de control  $T^2$  con dimensión variable podemos observar que ninguna muestra supera el supera el límite de control de las  $p_1$  variables.

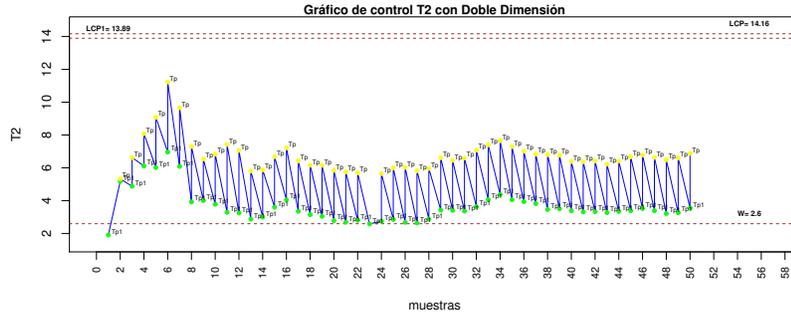
En promedio se requerirá muestrear 2 veces hasta obtener una muestra que de señal de bajo control cuando realmente el proceso está fuera de control.

### 3.4 Gráficos de control de Doble Dimensión

Los parámetros utilizados para el gráfico de control  $T^2$  con doble dimensión son:

- $\mu$ : El vector de las medias de las variables (Cuando el proceso está bajo control).
- $\Sigma$ : La matriz de varianzas y covarianzas (Cuando el proceso está bajo control).
- $p_1$ : Número de variables  $p_1$  (Variables fáciles de medir o baratas).
- $p_2$ : Número de variables  $p_2$  (Variables complejas de medir o costosas).
- $p$ : Número de variables.
- $w$ : Límite de alerta o de advertencia.
- $CLP_1$ : Límite de control  $p_1$ .
- $CLP$ : Límite de control  $p$ .
- $dis_{p_1}$ : Distancia de mahalanobis de  $p_1$ .
- $dis_p$ : Distancia de mahalanobis de  $p$ .
- $n$ : El tamaño de la muestra.

Con los datos simulados procedemos a realizar gráficos de control  $T^2$  con doble dimensión con diferentes escenarios.



**Fig. 14** Gráfico de control  $DDT^2$  con  $n = 5$ ,  $ARL_0 = 400$ ,  $ARL_1 = 1.214$  Gráfico de control  $T^2$  con doble dimensión utilizando los siguientes parámetros:  $\Sigma$ , cuando el proceso está bajo control,  $p_1 = 2$ ,  $p = 3$ ,  $w = 2.60$ ,  $CLP_1 = 13.89$   $CLP = 14.16$ ,  $dis_{p1} = 1.5$ ,  $dis_p = 2$ ,  $n = 5$ .  
Fuente: Creación propia

En el gráfico de control de control  $T^2$  con doble dimensión podemos observar ninguna de las observaciones supera los límites de control para las  $p_1$  variables; aunque excepto la primera muestra, todas las demás caen encima del límite de alerta  $w$ , por lo que es necesario utilizar todas las  $p$  variables en cada caso, sin que se salga de control el proceso.

En promedio se requerirá muestrear 2 veces hasta obtener una muestra que de señal de bajo control cuando realmente el proceso está fuera de control.

### 3.5 Análisis del rendimiento de los gráficos de control

**Tabla 1** Análisis del rendimiento de gráfico  $T^2$

Parámetros				$T^2$	
$p_1$	$p$	$dp_1$	$dp$	$ARL_{p1}$	$ARL_p$
2	3	1	1.2	71.45	59.99
			1.5	71.45	32.52
			2	71.45	12.86
			2.5	71.45	5.90
		1.5	1.8	24.52	18.33
			2	24.52	12.86
			2.5	24.52	5.9
			3	24.52	3.18

Fuente: Creación propia

**Tabla 2** Análisis del rendimiento de gráfico  $VDT^2$ 

Parámetros				$VDT^2$			
$p_1$	$p$	$dp_1$	$dp$	$W$	$LCP_1$	$LCP$	$ARL_1$
2	3	1	1.2	3.83	17.09	10.62	47.62
			1.5	2.86	38.77	11.65	26.86
1.5	3	1.5	2	2.19	42.01	12.44	10.56
			2.5	1.88	26	12.8	4.89
			1.8	4.14	16.44	10.31	12.98
			2	3.59	18.94	10.82	9.53
			2.5	2.43	20.11	12.19	4.62
			3	2.14	53.22	12.5	2.60

Fuente: Creación propia

**Tabla 3** Análisis del rendimiento de gráfico  $DDT^2$ 

Parámetros				$DDT^2$			
$p_1$	$p$	$dp_1$	$dp$	$W$	$LCP_1$	$LCP$	$ARL_1$
2	3	1	1.2	2.89	14.07	14.11	59.53
			1.5	1.52	14.05	14.23	33.74
1.5	3	1.5	2	2.02	14.03	14.19	14.92
			2.5	2.56	14.06	14.14	8.17
			1.8	3.23	14.06	14.08	18.00
			2	2.6	13.89	14.16	13.09
			2.5	2.57	14.05	14.14	6.54
			3	3.22	13.96	14.09	4.16

Fuente: Creación propia

Se realizó un análisis del rendimiento varios casos, combinando diferentes valores de  $(dp_1, dp) = (1, 1.2), (1, 1.5), (1, 2), (1, 2.5), (1.5, 1.8), (1.5, 2), (1.5, 2.5), (1.5, 3)$  para un tamaño de muestra de 1 y un  $ARL$  bajo control de 400.

Para todos los casos analizados el gráfico de control  $VDT^2$  se comporta mejor que el gráfico estándar  $T^2$  con todas las  $p$  variables ya que el gráfico de control  $VDT^2$  reduce en el  $ARL$  fuera de control.

El gráfico  $DDT^2$  siempre supera en rendimiento al gráfico estándar  $T^2$  para las  $p_1$  variables, e incluso en alguno de los casos analizados su rendimiento es mayor o igual al del gráfico estándar  $T^2$  para las  $p$  variables, lo que es notorio, ya que en esos casos el gráfico  $DDT^2$  es más rápido y más económico a la vez.

## 4 Conclusiones y Recomendaciones

### 4.1 Conclusiones

1. El gráfico de control de doble dimensión  $DDT^2$  siempre supera el rendimiento del gráfico de control multivariante  $T^2$  de Hotelling con  $p_1$  variables y en algunos casos iguala y supera el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling con las  $p$  variables, por lo que es notorio que este grafico es más rápido y más económico a la vez.
2. El gráfico de control de dimensión variable  $VDT^2$  siempre supera el rendimiento de los gráficos de control multivariante  $T^2$  de Hotelling  $p_1$  y  $p$  variables.
3. A medida que se aumenta el tamaño de la muestra aumenta el rendimiento de los gráficos de control  $VDT^2$  y  $DDT^2$ , ya que obtenemos un ARL fuera de control más bajo en los gráficos
4. Se logró realizar las funciones en el software estadístico R que permitan realizar las gráficas y el cálculo de los ARL bajo y fuera de control para cada uno de los gráficos de control analizados en este proyecto.
5. Se desarrolló el paquete Gcmulti Gráficos de control Multivariante en R
6. Se logró publicar el paquete Gcmulti en el repositorio de GitHub y se encuentra disponible para el público en general.

### 4.2 Recomendaciones

1. Realizar funciones que permita realizar la optimización de los parámetros para cada uno de los gráficos de control analizados en el proyecto.
2. Difundir el paquete a las empresas que deseen mejorar el control de sus procesos.
3. Incluir más gráficos de control multivariantes en el paquete Gcmulti realizado en R.

## Appendix

Table 4: Datos simulados

	V1	V2	V3
1	3,2290973	4,604201	4,958172
2	5,7476801	7,240857	9,053073
3	3,1290296	7,207165	8,099571
4	4,2532591	6,715736	7,401535
5	7,473968	8,539074	11,335741

*Sigue en la página siguiente*

	V1	V2	V3
6	6,0137109	7,579339	9,17013
7	4,5292843	8,004371	8,780659
8	3,7589825	7,6387	7,630631
9	4,9065672	7,312598	9,19266
10	-0,5443442	2,908476	2,194595
11	4,499644	9,098319	10,054472
12	5,8180231	9,766684	11,955125
13	6,4320481	10,368664	12,090391
14	4,1488098	5,690259	6,908691
15	6,3365666	7,067385	9,711276
16	3,7329762	6,391396	7,215719
17	5,9424584	10,653865	11,3966
18	5,4628465	10,201928	10,932112
19	3,6626531	5,450428	7,127481
20	3,9146396	6,846585	8,746045
21	4,8795118	6,833673	8,165551
22	5,7240738	7,127658	9,563406
23	3,7689043	5,349973	7,085691
24	3,4969049	6,172921	7,396613
25	5,7450975	9,589232	11,012144
26	4,9337453	6,815539	9,198979
27	7,3487278	9,495915	11,608899
28	3,8674117	7,179246	8,542775
29	1,7204427	5,335633	4,987084
30	2,2958652	6,554912	6,852154
31	6,2712459	8,034578	9,802939
32	4,0808245	7,062789	7,697668
33	5,2350198	6,22212	8,354225
34	4,9500166	8,956445	9,880593
35	3,3280666	6,242743	7,061069
36	7,1701426	7,198287	10,34753
37	3,265788	5,674573	5,99449
38	4,7029216	10,225873	11,343273
39	5,5811703	8,226701	9,675723
40	3,7679165	2,210382	4,968216
41	3,3692297	7,668951	7,718068
42	1,6524865	2,374575	2,873281
43	4,4496757	7,910104	9,586865
44	2,6049682	2,987092	4,268329
45	4,9138289	6,856855	8,000152
46	1,7213844	3,988549	4,153986
47	8,0017652	7,179804	11,215569
48	5,1044858	8,769957	10,288838

*Sigue en la página siguiente*

	V1	V2	V3
49	5,2097647	7,861342	9,377314
50	5,8597882	7,571848	10,217443
51	7,2309056	11,384427	13,552843
52	5,9089507	9,2866	10,942133
53	8,827756	8,807736	12,4211
54	3,2698803	7,225096	8,054696
55	3,8844183	6,880336	8,954118
56	5,4646451	7,480853	8,764643
57	2,8131182	7,308313	7,188854
58	4,2330629	6,695661	7,782332
59	5,4622335	6,030605	8,448833
60	3,1412859	5,824692	7,219362
61	4,7285887	4,959671	6,949713
62	5,4505029	5,861209	7,662165
63	3,7888386	4,592951	6,090281
64	3,764905	6,339361	7,224318
65	2,8982603	5,102967	5,54471
66	4,901228	6,104281	8,619141
67	2,8771217	3,797102	5,87749
68	5,711253	8,573611	10,208065
69	4,3762634	6,606747	7,45976
70	3,5547384	6,146002	6,815803
71	6,7532598	10,607432	12,671149
72	4,2815996	6,959755	8,254178
73	3,4756498	7,610139	8,571673
74	4,5566018	9,142117	9,831935
75	3,1951141	8,551468	8,764096
76	4,7058832	7,928902	9,205932
77	5,5728937	6,95835	9,383696
78	4,5980835	8,740696	9,458082
79	3,808939	7,082113	7,530395
80	5,1211046	8,219719	10,460886
81	3,6498247	6,466081	7,79585
82	5,6446684	6,833813	9,184281
83	5,6733023	5,414648	7,580593
84	3,6665032	7,959853	8,626225
85	6,5172159	8,426996	10,457259
86	5,0518237	8,739034	10,329209
87	5,4933815	5,888167	7,991888
88	4,2185669	5,615544	7,029659
89	4,3907914	6,824151	8,461589
90	6,6592899	11,49503	12,395658
91	6,40435	8,954782	11,068129

*Sigue en la página siguiente*

	V1	V2	V3
92	5,8745368	8,272802	9,889682
93	4,4633508	8,038417	8,702385
94	1,5173989	1,813123	3,048471
95	4,3901371	4,794133	7,123581
96	5,0560459	7,159512	9,029328
97	3,0976031	7,920095	8,256184
98	4,905938	7,04685	8,743909
99	6,3209375	8,738741	10,426347
100	6,1999094	6,804625	9,0873
101	5,7309804	6,554157	8,657527
102	6,5328096	7,987384	10,21589
103	2,9331541	3,752573	4,557609
104	5,1626896	8,57977	10,194024
105	3,7400828	4,716501	6,409717
106	3,6743776	4,582046	6,180108
107	4,4280747	5,474329	7,611553
108	2,1776428	4,101961	4,770747
109	2,4944562	5,339968	5,783625
110	2,8714158	6,409033	6,190411
111	4,9480485	6,624625	7,764743
112	5,916697	5,7788	8,777382
113	7,296174	7,79197	10,793868
114	5,0389247	9,516319	10,566139
115	2,5320449	5,230947	5,966337
116	1,9377292	3,024112	4,839769
117	4,9664534	8,953162	10,202012
118	5,9017983	7,397622	8,877096
119	2,2295166	5,586876	6,189214
120	3,9571666	7,633484	8,316088
121	3,2636119	5,020629	6,013793
122	4,3635196	6,169789	7,874627
123	4,5759083	5,783699	7,676605
124	5,9511032	9,868981	12,136316
125	2,8157831	5,402024	5,766534
126	6,1153692	6,619855	9,318029
127	3,9207415	5,012876	6,777306
128	5,814845	10,182085	12,018449
129	5,2542661	3,111932	6,969998
130	7,0624367	11,13726	12,550841
131	4,6969864	8,895643	9,54932
132	5,9531032	7,428987	9,382793
133	4,8649874	8,032047	9,501364
134	6,9027506	8,812004	11,173857

*Sigue en la página siguiente*

	V1	V2	V3
135	4,8356624	8,361321	9,521982
136	5,0280058	9,075402	9,877258
137	3,3406552	6,154372	6,956959
138	3,6333126	5,806107	7,621052
139	5,6790207	6,386844	8,582495
140	3,1461894	7,193191	7,786506
141	5,3689965	9,455439	11,510183
142	2,1508175	7,353697	7,250803
143	5,4681618	8,747724	9,782524
144	4,0977627	7,505383	8,766018
145	3,4625629	4,193826	5,291048
146	1,5475212	3,975891	4,643332
147	3,3229423	5,99547	6,634831
148	5,3190357	7,910319	9,781826
149	4,1426724	8,067744	8,455964
150	5,5991198	7,124646	9,959357
151	3,3818968	8,724229	8,603751
152	4,6257086	5,330151	7,070092
153	5,8325468	10,126803	12,784951
154	4,5887887	9,002967	9,489153
155	5,9174509	5,607743	8,094941
156	3,3799428	7,2085	8,564665
157	1,6014259	4,41146	4,607816
158	5,5874782	8,42827	9,829703
159	2,8425317	4,865488	5,885712
160	4,2280556	4,902061	7,280764
161	4,3001235	9,4576	10,073671
162	4,8585534	11,204198	11,944475
163	3,2068098	4,91633	6,393258
164	4,7386066	6,272894	7,59511
165	3,0330261	7,693735	7,345889
166	3,7080807	6,634863	7,348978
167	4,5181705	7,556393	8,519037
168	0,8501392	4,816818	4,643585
169	4,2070295	6,327842	7,736559
170	6,0812377	7,322273	8,89984
171	6,4614879	9,23281	11,806341
172	6,1318341	8,735271	10,238095
173	3,7503734	4,635935	6,079101
174	8,0703455	10,415276	13,368324
175	4,3743051	6,814455	7,246962
176	4,0361431	8,103863	9,139602
177	2,8219913	4,498303	6,24518

*Sigue en la página siguiente*

	V1	V2	V3
178	6,903835	7,939776	10,280119
179	4,8073389	6,796649	8,13964
180	5,5997122	5,497546	8,125176
181	5,2075796	8,313607	9,995985
182	4,5556798	6,278737	7,405432
183	3,7733223	7,158312	8,092814
184	4,6499895	3,300198	5,557111
185	3,2685915	4,586578	5,427135
186	6,8614428	7,701174	11,516123
187	6,6406144	6,369635	9,029438
188	3,7791348	6,568214	8,109092
189	4,7855975	8,47884	10,125769
190	6,2450112	6,707538	9,840486
191	5,2630847	6,623815	8,30666
192	4,1878715	6,216105	8,107251
193	5,0705995	8,808513	10,179696
194	4,3801708	8,574414	9,037576
195	4,0419072	8,915624	9,513695
196	3,2538053	6,575418	7,405709
197	5,4650068	9,571824	10,435197
198	4,4450334	6,345134	8,100135
199	6,2742581	7,191626	8,78581
200	4,7479556	10,084495	9,871783
201	5,766798	10,533806	11,646965
202	3,5776699	4,324478	5,812198
203	4,4503352	7,39864	9,169209
204	5,3477483	7,014015	9,117127
205	4,6458444	4,14609	6,731198
206	2,5040005	4,124954	4,909594
207	3,0552944	7,28977	7,305244
208	4,9750909	7,727045	8,876257
209	3,2215524	5,294849	6,659761
210	6,1624836	8,959934	10,954574
211	3,495589	5,155065	7,177442
212	5,249913	9,19765	10,940982
213	3,443803	4,638332	6,176702
214	4,0267551	5,966492	6,070203
215	4,7996701	6,25594	7,966833
216	3,7373596	5,568536	6,492319
217	5,2228351	8,634244	9,712077
218	4,961579	6,130322	8,827927
219	3,4125631	5,112937	6,215874
220	4,0066349	3,578013	6,301975

*Sigue en la página siguiente*

	V1	V2	V3
221	5,2862346	8,878885	11,415511
222	3,8105955	5,533775	7,647314
223	4,6104085	7,54044	8,973902
224	3,5166338	6,329924	6,764109
225	4,9266459	7,328582	9,026597
226	1,3985397	5,653371	5,614745
227	3,4366273	3,925844	5,000612
228	6,1916356	8,715429	11,145729
229	5,2420634	7,570645	8,500763
230	5,3534389	9,474213	11,181752
231	4,3785696	7,16629	7,767665
232	3,8977993	6,407	7,919221
233	8,8549712	8,670806	12,20791
234	5,0276747	5,745939	8,641125
235	5,8446345	11,080617	11,99961
236	7,5545148	8,412407	11,161166
237	1,3176585	5,018398	4,504829
238	7,3762817	7,698071	11,065736
239	6,7463539	8,909601	11,447651
240	6,8908352	10,415611	12,365385
241	3,3184454	5,51114	6,719361
242	4,0883171	4,529515	6,579001
243	4,5822996	9,56129	10,176082
244	5,1492608	8,244501	9,212526
245	5,1068921	8,06902	9,583697
246	3,7744834	5,953428	7,292333
247	1,6254656	3,520847	3,841473
248	2,7979707	6,503498	6,886463
249	2,9336104	5,013081	6,007764
250	0,9727942	3,710068	4,31895

## 5 Bibliografía

### Referencias

- Aparisi F. , Epprecht, E. K. y Ruiz, O.(2012).  $T^2$  control charts with variable dimension. *Journal of Quality Technology*, 44(4), 375-393. doi: 10.1080/00224065.2012.11917907
- Epprecht E. K. , Aparisi, F., Ruiz, O.y Veiga, Á.(2013). Reducing sampling costs in multivariate SPC with a double-dimension  $T^2$  control chart. *International Journal of Production Economics*, 144(1), 1-15.10.doi: 1016/j.ijpe.2013.01.022
- Fuchs, C. y Kenett, R. S. (1998). *Multivariate quality control: theory and applications*. New York,United States: Chapman and Hall/CRC
- Hotelling,H. (1947). Multivariate quality control. En C. Eisenhart, MW Hastay and WA Wallis, (Eds.), *Techniques of Statistical Analysis* (111-184). New York: McGraw-Hill.

- Mahalanobis P. C.. (1936). On the generalized distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Science of India* 12(pp. 49-55).
- Marin Diazaraque J. M.. (2012). *Cadenas de Markov*. Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid. Recuperado de <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema4pe.pdf>.
- Murphy, B. J.. (1987). Selecting out of control variables with the T2 multivariate quality control procedure. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 36(5), 571-581. doi: /10.2307/2348668
- Paco. (5 de marzo de 2013). Creación de paquetes con Rstudio [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://erre-que-erre-paco.blogspot.com/2013/03/creacion-de-paquetes-con-rstudio.html> en septiembre 2016
- Perpiñan, O. (2015). *Crear Paquetes en R*. Oscar Perpiñan Lamigueiro B. Recuperado de <https://oscarperpinan.github.io/R/Paquetes.pdf>
- Ross S. M. ,Kelly, J. J., Sullivan, R. J., Perry, W. J., Mercer, D., Davis, R. M., ... y Bristow, V. L. (1996). *Stochastic processes* (pp. 59-97). New York: Wiley.
- Ruiz-Barzola, O. (2013). *Graficos de Control de Calidad Multivariantes con Dimension Variable* (Tesis doctoral). Universitat Politecnica de Valencia, Valencia, España.
- Team, R.Studio. (2015). *Desarrollo de Paquetes*. Recuperado de <https://rstudio.com/wp-content/uploads/2015/03/devtools-spanish.pdf>
- Team, R.Studio. (2016). *Writing R Extensions*. The R Project for Statistical Computing. Recuperado de <https://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-exts.html>
- Tracy, N. D. ,Young, J. C., y Mason, R. L. (1992).Multivariate control charts for individual observations. *Journal of quality technology*, 24(2), 88-95. doi: org/10.1080/00224065.1992.12015232