

Ecuaciones funcionales lineales para funciones analíticas en el bicírculo. Uniformización, automorfismos. Análisis del caso con cuádrica.

Linear functional equations for analytic functions in the bicircle. Uniformization, automorphisms. Case study with quadrics

Gortaire Játiva Danilo and Zverovich Edmund Ivanovich

Abstract Initially, the article presents a brief synthesis about certain types of linear functional equations of \mathbb{C}^2 in the bicircle and its solution search scheme. Then we have a detailed study of a certain type linear functional equation with kernel $A(z, w)$ in the form of canonical quadrics. The analysis, solubility conditions and solution of the proposed functional equation with kernel $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c$ are presented. This type of equations is similar to those that appear in the of queues, random walks or Wiener - Hopf equations in a quadrant. Among the research methods we will find the uniformity (parametrization) of the relation $A(z, w) = 0$, the automorphic functions, the analytical prolongation, the Cauchy type integral, contour problems and others.

Keywords Functional equation; Uniformization; Automorphic functions; Convergent series; Analytic prolongation; Cauchy's Integral.

Resumen Inicialmente, el artículo presenta una breve síntesis sobre ciertos tipos de ecuaciones funcionales lineales de \mathbb{C}^2 en el bicírculo y su esquema de búsqueda de la solución. Luego tenemos un estudio detallado de cierta ecuación funcional lineal tipo con núcleo $A(z, w)$ en forma de cuádrica canónica. Se presenta el análisis, condiciones de solubilidad y solución de la ecuación funcional planteada con núcleo $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c$. Este tipo de ecuaciones son semejantes a las que aparecen en la teoría de colas, marchas aleatorias o ecuaciones de Wiener - Hopf en un cuadrante. Entre los métodos de investigación encontraremos el de uniformización (parametrización) de la relación $A(z, w) = 0$ las funciones automorfas, la prolongación analítica, la integral del tipo de Cauchy, problemas de contorno y otros.

Mat. Gortaire Játiva Danilo, PhD.

Docente titular de la Universidad Central del Ecuador, UCE, Carrera de Matemáticas, Quito - Ecuador, e-mail: agortaire@uce.edu.ec,

Zverovich Edmund Ivanovich Dr. en Ciencias,

Prof. Director de la Cátedra de Teoría de las Funciones, Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad Estatal de Bielorrusia. Minsk - República de Belarus e-mail: Zverovich@bsu.by

Palabras Claves Ecuación funcional; Uniformización; Funciones automorfas, Serie convergente; Prolongación analítica; Integral del tipo de Cauchy.

1 Introducción

En los últimos 30 años, con el desarrollo de algunas aplicaciones (teoría de colas) [Cohen, J, 1987], [Fayolle, G, 1984], [Flatto, L., y McKean, H, 1977], [Kingman J, 1961], [Rogosin, S, 1992] marchas aleatorias [Malyshev, V, 1970], ecuaciones de Wiener – Hopf en un cuadrante [Malyshev, V, 1976], [Zverovich, E, 1987] adquirió actualidad el problema de resolver la siguiente ecuación funcional lineal:

$$A(z, w)\xi(z, w) + B(z, w)\xi(z, 0) + C(z, w)\xi(0, w) + D(z, w)\xi(0, 0) = E(z, w) \quad (1.1)$$

$$|z| \leq \rho_1, |w| \leq \rho_2$$

en donde todas las funciones son analíticas en el bicírculo

$$|z| < \rho_1, |w| < \rho_2$$

y continuas en el bicírculo cerrado, la función desconocida es ξ . Es evidente que la solución de la ecuación 1.1 está contenida en la fórmula:

$$\xi(z, w) = \frac{E(z, w) - B(z, w)\xi(z, 0) - C(z, w)\xi(0, w) - D(z, w)\xi(0, 0)}{A(z, w)} \quad (1.2)$$

De esta fórmula se desprende que para la solución de la ecuación (1.1), en el anillo dado de funciones, es necesario y suficiente que en este anillo el numerador de la parte derecha de (1.2) se divida sin resto por el denominador. Para esto, a su vez, es necesario que $\forall (z, w) \in \Omega$ se cumpla la igualdad:

$$B(z, w)\xi(z, 0) + C(z, w)\xi(0, w) + D(z, w)\xi(0, 0) = E(z, w), (z, w) \in \Omega \quad (1.3)$$

donde

$$\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : A(z, w) = 0, |z| \leq \rho_1, |w| \leq \rho_2\} \quad (1.4)$$

En el caso cuando $\Omega = \emptyset$, es decir cuando no hay la ecuación (1.3), la fórmula (1.2) nos da la solución general de la ecuación (1.1) para cualesquiera $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$ pertenecientes al anillo dado de funciones. Para $\Omega \neq \emptyset$, la ecuación 1.3 no se degenera y su análisis representa de por sí un problema independiente, el mismo que del todo, todavía no está resuelto y por lo tanto es actual.

La ecuación (1.3) puede ser denominada como "problema de contorno" para la búsqueda de las funciones analíticas $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$ con la condición de con-

torno dada sobre el conjunto Ω . Desde un punto de vista topológico, el conjunto Ω puede estar construido en forma muy compleja, lo que condiciona la investigación del problema (1.3). Precisamente por esto es evidente que todos los trabajos e investigaciones referentes a las ecuaciones (1.1) o (1.3) se concretan a investigaciones de casos particulares de estas ecuaciones funcionales [Cohen, J, 1987], [Fayolle, G, 1984], [Flatto, L., y McKean, H , 1977], [Kingman J, 1961].

El presente trabajo es la continuación del ciclo de investigaciones [Krushevskii, E, 1992],[Zverovich, E, 1992], [Zverovich, E, 1987], [Zverovich, E, 1998]. En este se investiga la ecuación funcional lineal:

$$A(z, w)\xi(z, w) - A(z, 0)\xi(z, 0) - A(0, w)\xi(0, w) + A(0, 0)\xi(0, 0) = zw\eta(z, w),$$

$$|z| \leq 1, |w| \leq 1, \quad (1.5)$$

en donde todas las funciones incluyendo la incógnita ξ se consideran analíticas en el bicírculo $\mathbb{K}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ y continuas en el bicírculo cerrado $\mathbb{K}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$. Además, todas las funciones pertenecen al anillo W de Wiener [Zigmund, A, 1965], compuesto por todas las funciones representables en forma de series de potencias absolutamente convergentes para $|z| \leq 1, |w| \leq 1\}$.

El objetivo del presente trabajo consiste en encontrar las condiciones de solubilidad y las fórmulas de la solución general de la ecuación funcional (1.5) para ciertos casos particulares [Gortaire, Danilo, 1994] del núcleo $A(z, w)$.

2 Planteamiento del problema y método de solución

Analicemos la ecuación bidimensional discreta de Wiener y Hopf en un cuadrante del plano [Malyshev, V, 1970] [Zverovich, E, 1987], o lo que es lo mismo, el sistema infinito de ecuaciones lineales:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{i-k, j-l} \xi_{k, l} = \eta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

en donde la incógnita es la sucesión $(\xi_{kl})_{k, l \geq 0}$. Siguiendo a [Malyshev, V, 1970] [Zverovich, E, 1987], vamos a suponer que todas las sucesiones que entran en (2.1): $(a_{p, q})_{p, q = -\infty}^{+\infty}$, $(\xi_{kl})_{k, l = 0}^{+\infty}$, $(\eta_{ij})_{i, j = 0}^{+\infty}$ pertenecen al espacio l^1 de sucesiones absolutamente sumables. Consideremos además que $a_{p, q} = 0$ si por lo menos uno de los índices p o q toma valores inferiores a -1 . Bajo estas condiciones, las funciones generatrices correspondientes.

$$\begin{aligned}
A(z, w) &= zw \sum_{p, q=1}^{+\infty} a_{pq} z^p w^q, \\
\xi(z, w) &= \sum_{k, l=0}^{+\infty} \xi_{kl} z^k w^l, \\
\eta(z, w) &= \sum_{i, j=0}^{+\infty} \eta_{i, j} z^i w^j
\end{aligned} \tag{2.2}$$

son analíticas en el bicírculo $\mathbb{K}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ continuas en el bicírculo cerrado $\overline{\mathbb{K}^2} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$ y sus valores límites sobre el filo de la frontera del bicírculo pertenecen al anillo W de Wiener, compuesto por todas las funciones representables en forma de sumas de series de potencias absolutamente convergentes. Transformando el sistema de ecuaciones (2.1) mediante las funciones (2.2), siguiendo a [Zverovich, E, 1987], tenemos:

$$\begin{aligned}
A(z, w) \xi(z, w) &= zw \sum_{p, q \geq -1} a_{pq} z^p w^q \sum_{k, l \geq 0} \xi_{kl} z^k w^l = \\
&= zw \sum_{k, l \geq 0} \xi_{kl} z^k w^l \sum_{i-k, j-l \geq -1} a_{i-k, j-l} z^{i-k} w^{j-l} = \\
&= zw \sum_{k, l \geq 0} \xi_{kl} \sum_{i-k, j-l \geq 0} a_{i-k, j-l} z^i w^j = \\
&= zw \left(\sum_{k, l \geq 0} \xi_{kl} \sum_{i, j \geq 0} a_{i-k, j-l} z^i w^j = \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i, j \geq 0} a_{i-k, j-l} z^i w^j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l \geq 0} \xi_{0l} \sum_{j-l \geq -1} a_{-1, j-l} z^{-1} w^j \right) = \\
&+ \sum_{k \geq 0} \xi_{k0} \sum_{i-k \geq -1} a_{i-k, -1} z^i w^{-1} - \xi_{00} a_{-1, -1} z^{-1} w^{-1} \Big) = \\
&= zw \left(\sum_{i, j \geq 0} a_{i-k, j-l} \xi_{kl} z^i w^j + \sum_{q \geq -1} a_{-1, q} z^{-1} w^q \sum_{l \geq 0} \xi_{0l} w^l \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p \geq -1} a_{p, -1} z^p w^{-1} - \xi_{00} a_{-1, -1} z^{-1} w^{-1} \sum_{k \geq 0} \xi_{k0} z^k - \xi_{00} a_{-1, -1} z^{-1} w^{-1} \right) = \\
&= zw \left(\sum_{i, j \geq 0} \eta_{i, j} z^i w^j + \frac{1}{zw} \sum_{q \geq -1} a_{-1, q} w^{q+1} \xi(o, w) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{zw} \sum_{p \geq -1} a_{p, -1} z^{p+1} \xi(z, 0) - \xi(0, 0) \frac{A(z, w)}{zw} \right) = \\
&= zw \eta(z, w) + A(z, 0) \xi(z, 0) + A(0, w) \xi(0, w) - A(0, 0) \xi(0, 0)
\end{aligned}$$

De esta manera, llegamos a concluir que el sistema infinito de ecuaciones (2.1) es equivalente a la ecuación funcional lineal:

$$A(z, w)\xi(z, w) - A(z, 0)\xi(z, 0) - A(0, w)\xi(0, w) + A(0, 0)\xi(0, 0) = zw\eta(z, w),$$

$$|z| \leq 1, |w| \leq 1 \quad (2.3)$$

Partiendo de un hecho evidente y conocido [Fayolle, G, 1984] [Malyshev, V, 1970], tenemos que la solución de la ecuación (2.3), si esta existe, está contenida en la fórmula:

$$\xi(z, w) = \frac{A(z, 0)\xi(z, 0) + A(0, w)\xi(0, w) - A(0, 0)\xi(0, 0) + zw\eta(z, w)}{A(z, w)},$$

$$(z, w) \in \overline{\mathbb{K}^2} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \leq 1, |w| \leq 1\} \quad (2.4)$$

La solubilidad de la ecuación (2.3) es equivalente a la posibilidad de encontrar las funciones $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$ pertenecientes al anillo W de Wiener, de tal manera que el numerador de la parte derecha de (2.4) se divida sin resto por $A(z, w)$ en el anillo W . Para la división, a su vez es necesario que el numerador se anule en todos los ceros del denominador. Considerando esto, llegamos a la siguiente ecuación funcional lineal:

$$A(z, 0)\xi(z, 0) + A(0, w)\xi(0, w) - A(0, 0)\xi(0, 0) = -zw\eta(z, w), (z, w) \in \Omega, \quad (2.5)$$

donde

$$\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : A(z, w) = 0, |z| \leq 1, |w| \leq 1\} \quad (2.6)$$

y para la cual es necesario encontrar las funciones $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$, analíticas para $|z| < 1$ y $|w| < 1$ respectivamente, y representables en sus respectivos círculos cerrados en forma de series de potencias absolutamente convergentes (anillo W de Wiener [Zigmund, A, 1965]). Vamos a investigar la ecuación funcional (2.5) con ayuda de una uniformización global [Gortaire, Danilo, 1994] [Nevanlinna, R, 1965] [Zverovich, E, 1998] de la relación $A(z, w) = 0$. En relación a esto, vamos a suponer que el polinomio $A(z, w)$ es irreducible, y que la correspondencia $A(z, w) = 0$ permite una uniformización global con funciones racionales.

$$\begin{cases} z &= z(t) \\ w &= w(t), t \in \hat{\mathbb{C}}, \end{cases} \quad (2.7)$$

es decir, se cumple la identidad $A[z(t), w(t)] \equiv 0$. Continuando, pasamos en la ecuación (2.5) al plano de la variable uniformizadora t , e introducimos las

preimágenes completas de los círculos $|z| \leq 1, |w| \leq 1$ mediante las aplicaciones (2.7), siendo

$$\begin{aligned} D_1 &= \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \leq 1\} \\ D_2 &= \{t \in \mathbb{C} : |w(t)| \leq 1\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Introducimos además los conjuntos

$$D = D_1 \cap D_2 = \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \leq 1, |w(t)| \leq 1\}, \quad (2.9)$$

$$G = D_1 \cup D_2 \quad (2.10)$$

Vemos que la uniformización (2.7) realiza una aplicación biholomorfa de D^0 sobre Ω_0 . Considerando lo anterior y pasando en la ecuación (2.5) a la variable uniformizadora t , obtenemos la ecuación funcional.

$$A[z(t), 0] \xi[z(t), 0] + A[0, w(t)] \xi[0, w(t)] - A(0, 0) \xi(0, 0) = -z(t)w(t) \eta[z(t), w(t)], \quad t \in D \quad (2.11)$$

Las estructuras de los conjuntos D_1, D_2, D, G y de sus fronteras o contornos.

$$\begin{aligned} \partial D_1 &= \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| = 1\} \\ \partial D_2 &= \{t \in \mathbb{C} : |w(t)| = 1\}, \partial D, \partial G \end{aligned} \quad (2.12)$$

pueden ser bastantes complejas. Esto quedará muy claro al observar las gráficas respectivas. Estos conjuntos, en general no son conexos, y sus componentes no son simplemente conexas [Gortaire, Danilo, 1994], lo que dificulta el análisis de la ecuación (2.11)

Pasando a describir el método de solución de la ecuación (2.11), e introduciendo las nuevas funciones desconocidas

$$\Phi(t) = A[z(t), 0] \xi[z(t), 0] \quad (2.13)$$

$$\Psi(t) = A[0, w(t)] \xi[0, w(t)] \quad (2.14)$$

y la constante desconocida

$$\mu = A(0, 0) \xi(0, 0) \quad (2.15)$$

Obtenemos en lugar de (2.11) la siguiente ecuación funcional

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), t \in D, \quad (2.16)$$

en donde

$$\tilde{\eta}(t) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)] \quad (2.17)$$

La función desconocida Φ debe ser analítica no solamente con respecto a t sino también con respecto a $z(t)$. Por eso Φ debe ser automorfa [Ford, L, 1936] con respecto al grupo Λ_1 de los automorfismos conformes del conjunto D_1 , con respecto a los cuales la función $z(t)$ es invariante. Análogamente, Ψ debe ser automorfa con respecto al grupo Λ_2 de los automorfismos conformes del conjunto D_2 , con respecto a los cuales la función $w(t)$ es invariante y también analítica con respecto a t y a w en todos los ceros de la función $w(t)$. Además, la función Φ debe anularse en todos los ceros de la función $A[z(t), 0]$, ubicados en D_1 ; la función Ψ debe anularse en todos los ceros de la función $A[0, w(t)]$, ubicados en D_2 . Tomando en cuenta todas estas condiciones y la pertenencia de las funciones desconocidas al anillo W de Wiener, concluimos que las ecuaciones (2.5) y (2.16) son equivalentes.

Debemos señalar que en el caso en que $D = \phi$ la ecuación (2.3) es resoluble para cualesquiera funciones analíticas $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w) \in W$, para las cuales se cumple la condición $\xi(z, 0)|_{z=0} = \xi(0, w)|_{w=0}$. En los otros casos, en particular, en los casos de inclusión $D_1 \subset D_2$ o $D_2 \subset D_1$ con $D^0 \neq \phi$, el análisis de la ecuación (2.16) depende también de las propiedades de los grupos Λ_1 y Λ_2 , y de las propiedades de las funciones automorfas [Ford, L, 1936] con respecto a estos grupos.

Como las funciones (2.7) son racionales, concluimos que los grupos Λ_1 y Λ_2 son de orden finito, y que en los casos analizados por nosotros, sus órdenes son iguales al número de ramas de los revestimientos $z(t) : D_1 \rightarrow \{|z| \leq 1\}$ y $w(t) : D_2 \rightarrow \{|w| \leq 1\}$, respectivamente. Si los grupos Λ_1 y Λ_2 son de orden 2, entonces estos poseen la forma $\Lambda_1 = \{t, \alpha(t)\}$ y $\Lambda_2 = \{t, \beta(t)\}$, en donde $\alpha(\alpha(t)) \equiv \beta(\beta(t)) \equiv t$. En los casos por analizarse, las funciones α y β serán lineales u homográficas. Aquí aparecen dos casos, en dependencia de que se cumplan o no las condiciones de conmutatividad de los generadores $\alpha(t)$ y $\beta(t)$. Si se cumple la igualdad $\alpha(\beta(t)) = \beta(\alpha(t))$, entonces el grupo compuesto Λ_0 de los grupos Λ_1 y Λ_2 es un grupo finito, compuesto de 4 elementos $\Lambda_0 = [\Lambda_1, \Lambda_2] = \{t, \alpha(t), \beta(t), \alpha(\beta(t))\}$, y la función automorfa fundamental [Ford, L, 1936] con respecto al grupo Λ_0 es cierta función racional $g(t)$. Si por el contrario los generadores $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ no son conmutativos (o sea $\alpha(\beta(t)) \neq \beta(\alpha(t))$), entonces el grupo compuesto $\Lambda_0 = [\Lambda_1, \Lambda_2]$ es de orden infinito y la función automorfa fundamental $g(t)$ con respecto al grupo Λ_0 es trascendental. Si los grupos Λ_1 y Λ_2 son de orden mayor a 2, entonces sus generadores pueden ser conmutativos o no, y su grupo compuesto $\Lambda_0 = [\Lambda_1, \Lambda_2]$ puede ser también de orden finito o infinito, siendo la función automorfa fundamental $g(t)$ con respecto al grupo Λ_0 racional o trascendental, respectivamente.

Las soluciones de la ecuación (2.16) dependen fundamentalmente del caso de que el grupo Λ_0 sea de orden finito o infinito. Pero, cualquiera que sea el caso, para la construcción de la solución de la ecuación (2.16) se utiliza el método de la prolongación analítica [Courant, R., Hurwitz A, 1968] [Gajov, F, 1977] [Shabat, B,

1985]. Este método, en esencia, se lo puede describir con el siguiente esquema: la ecuación (2.16), frecuentemente es posible escribirla en la forma equivalente

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}_1(t) + \tilde{\eta}_2(t), t \in D,$$

donde $\tilde{\eta}_1(t)$ es analítica en D_1 y $\tilde{\eta}_2(t)$, es analítica en D_2 . La última igualdad se transforma en la siguiente ecuación equivalente:

$$\Phi(t) = \tilde{\eta}_1(t) = \mu - \Psi(t) + \tilde{\eta}_2(t), t \in D \quad (2.18)$$

La parte izquierda de la igualdad (2.18) es analítica en D_1 , y la derecha en D_2 . De aquí, basándonos en el *teorema fundamental sobre la prolongación analítica* [Courant, R., Hurwitz A, 1968] [Gajov, F, 1977] [Shabat, B, 1985] concluimos que ambas partes de la igualdad (2.18) representan a una única función $f(t)$, analítica en $G = D_1 \cup D_2$. De allí tenemos:

$$\Phi(t) = f(t) + \tilde{\eta}_1(t), t \in D_1 \quad (2.19)$$

$$\Psi(t) = -f(t) + \mu + \tilde{\eta}_2, t \in D_2 \quad (2.20)$$

donde $f(t)$ es analítica en G y deberá satisfacer además ciertas condiciones. Las fórmulas (2.19) y (2.20) nos dan la solución general de la ecuación (2.16), pero en general, sin considerar las propiedades de automorfismo de las funciones $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$. Sin embargo, sin mayores cambios, el método de la prolongación analítica también funciona si se consideran las propiedades de automorfismo de las funciones desconocidas [Gajov, F, 1977].

En este trabajo analizamos dos casos:

- Ecuaciones en cuyo análisis cada uno de los grupos Λ_1 y Λ_2 está compuesto por 2 elementos, cuyos generadores $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son conmutativos y el grupo compuesto $\Lambda_0 = [\Lambda_1, \Lambda_2]$ contiene 4 elementos. En este caso, la función automorfa fundamental respecto al grupo Λ_0 es racional.
- Ecuaciones en cuyo análisis cada uno de los grupos Λ_1 y Λ_2 está compuesto por 2 elementos, y cuyos generadores $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ no son conmutativos y el grupo compuesto $\Lambda_0 = [\Lambda_1, \Lambda_2]$ es de orden infinito. En este caso, la función automorfa fundamental respecto al grupo Λ_0 es elíptica o trascendental [Courant, R., Hurwitz A, 1968] [Ford, L, 1936]. Este tipo de ecuaciones se resuelven con ayuda del *método de pegamento conforme (adhesive conformal method)* más la prolongación analítica [Gajov, F, 1977], [Gortaire, Danilo, 1994].

3 Solución de la ecuación de la ecuación funcional lineal con el núcleo $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c, abc \neq 0$

En este punto analizaremos la ecuación funcional [Gortaire, Danilo, 1994]

$$(az^2 + bw^2 + c)\xi(z, w) - (az^2 + c)\xi(z, 0) - (bw^2 + c)\xi(0, w) + c\xi(0, 0) = zw\eta(z, w),$$

$$|z| \leq 1, |w| \leq 1, \quad (3.1)$$

la misma que se obtiene de (1.5) para

$$A(z, w) = az^2 + bw^2 + c, abc \neq 0 \quad (3.2)$$

Las soluciones de la ecuación (3.1), si estas existen, están contenidas en la fórmula

$$\xi(z, w) = \frac{(az^2 + c)\xi(z, 0) + (bw^2 + c)\xi(0, w) - c\xi(0, 0) + zw\eta(z, w)}{az^2 + bw^2 + c}, \quad (3.3)$$

Tomando en cuenta la exposición de los párrafos anteriores, pasamos al análisis de la ecuación

$$(az^2 + c)\xi(z, 0) + (bw^2 + c)\xi(0, w) - c\xi(0, 0) = -zw\eta(z, w), \quad (z, w) \in \Omega, \quad (3.4)$$

en donde

$$\Omega \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : \begin{array}{l} az^2 + bw^2 + c = 0, |z| \leq 1, \\ |w| \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Para analizar la ecuación (3.4)-(3.5) hallamos la uniformización global [Nevanlinna, R, 1965] de la correspondencia $az^2 + bw^2 + c = 0$, es decir:

$$\begin{cases} z = z(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(t - \frac{1}{t}\right), \\ w = w(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases} t \in \hat{\mathbb{C}} \quad (3.6)$$

donde las ramas de las raíces están prefijadas arbitrariamente. Introduciendo los parámetros no negativos

$$\alpha \left| \sqrt{\frac{a}{c}} \right|, \quad \beta \left| \sqrt{\frac{b}{c}} \right|, \quad (3.7)$$

pasamos a estudiar las familias de curvas dadas por los siguientes conjuntos

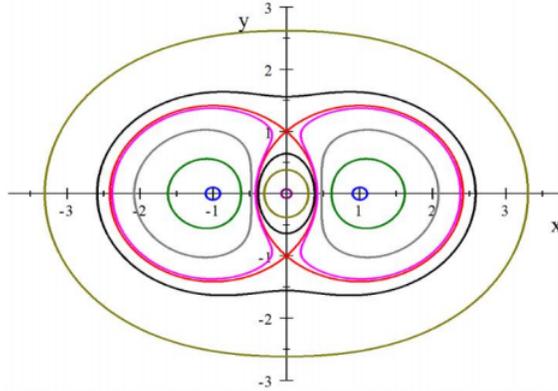
$$\begin{aligned} D_\alpha &= \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \leq 1\} \quad y \\ D_\beta &= \{t \in \mathbb{C} : |w(t)| \leq 1\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

bajo la variación de los parámetros α y β respectivamente.

En vista de que para $\alpha_1 < \alpha_2$ tenemos, $|t - \frac{1}{i}| < 2\alpha_1 \implies |t - \frac{1}{i}| \leq 2\alpha_2$, entonces $D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2}$, es decir, el conjunto D_α crece por inclusión cuando crece el parámetro α . Los sucesivos cambios del conjunto D_α vienen representados en la gráfica siguiente. Para $\alpha = 0$ el conjunto D_α está compuesto de 2 puntos ± 1 , es decir, $D_0 = \{-1, 1\}$. Para $0 < \alpha < 1$ el conjunto D_α está compuesto de 2 “dominios” cerrados simplemente conexos, cuyas fronteras son 2 óvalos disjuntos. Para $\alpha = 1$ los óvalos se transforman en 2 lunas circulares con centros en los puntos -1 y 1 , teniendo como puntos de frontera comunes a $-i$ e i . Para $\alpha > 1$ el conjunto D_α representa un dominio cerrado, doblemente conexo (en forma de anillo), conteniendo en su interior a la circunferencia $|t| = 1$, y sin contener a los puntos 0 e ∞ . Finalmente, el conjunto $D_\infty = \mathbb{C}^*$, en donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Familia de curvas ∂D_α :

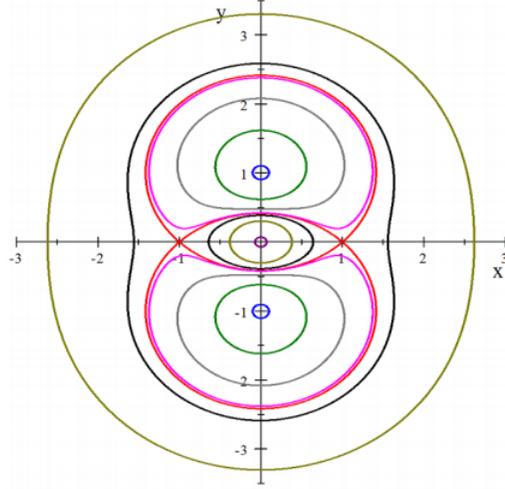
$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 4\alpha^2(x^2 + y^2) + 1 = 0, \quad \alpha > 0$$



El análisis del conjunto $D_\beta = \{t \in \mathbb{C} : |w(t)| \leq 1\} = \{t \in \mathbb{C} : |t + \frac{1}{i}| \leq 2\beta\}$ es análogo al análisis del conjunto D_α . Para $\beta_1 < \beta_2$ se cumple también la inclusión $D_{\beta_1} \subset D_{\beta_2}$. Hay que tomar en cuenta, además que D_α y D_β se diferencian en los parámetros α y β y en una rotación de $\frac{\pi}{2}$, es decir $D_\alpha(t) \rightarrow D_\beta(it)$, pues es evidente que $|t + \frac{1}{i}| = |it - \frac{1}{it}|$. De esta manera para los conjuntos D_α y D_β tiene lugar la correspondencia $(\alpha, t) \rightarrow (\beta, it)$. Los sucesivos cambios del conjunto D_β vienen representados en la gráfica siguiente.

Familia de curvas ∂D_β :

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 4\beta^2(x^2 + y^2) + 1 = 0, \quad \beta > 0$$



Analicemos ahora la ecuación (3.4) en el caso más simple, o sea cuando $\Omega = \phi$ (que equivale a analizar la ecuación (2.16) para $D = D_\beta \cap D_\beta = \phi$). Para esto, hallamos los valores de los parámetros α y β , para los cuales $D_\alpha \cap D_\beta = \phi$. Esto tiene lugar necesariamente si se cumple el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Pues si $\alpha \geq 1$ o $\beta \geq 1$, entonces el correspondiente conjunto D_α y D_β contiene a la circunferencia $|t| = 1$, es decir, también a los puntos $\pm 1, \pm i$. En uno de los conjuntos D_α o D_β yacen todos estos 4 puntos, y sobre el otro yacen por lo menos 2 de ellos, por eso $D_\alpha \cap D_\beta \neq \phi$

Considerando que las desigualdades (3.9) se cumplen, hallamos las condiciones para que los contornos ∂D_α y ∂D_β de los conjuntos D_α y D_β no se intersecten. Colocando $t = x + iy$ y considerando las relaciones (3.6) y (3.8) tenemos:

$$\begin{cases} \partial D_\alpha = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - (4\alpha^2 + 2)x^2 - (4\alpha^2 + 2)y^2 + 1 = 0 \right. \\ \left. \partial D_\beta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - (4\beta^2 + 2)x^2 - (4\beta^2 + 2)y^2 + 1 = 0 \right. \right\} \end{cases} \quad (3.10)$$

De aquí se concluye que $\partial D_\alpha \cap \partial D_\beta \neq \emptyset$ si y solamente si, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - (4\alpha^2 + 2)x^2 - (4\alpha^2 + 2)y^2 + 1 = 0 \\ x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - (4\beta^2 + 2)x^2 - (4\beta^2 + 2)y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

no posee soluciones reales. Esto tiene lugar si y solamente si, se cumple la desigualdad

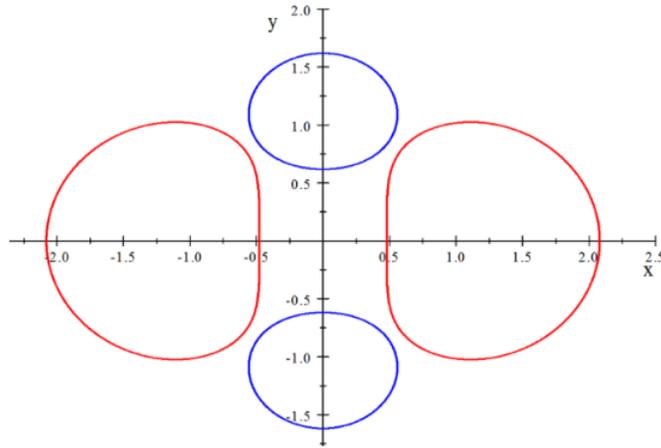
$$\alpha^2 + \beta^2 < 1, \quad (3.12)$$

la misma que es equivalente a la desigualdad

$$|a| + |b| < |c|, \quad (3.13)$$

donde a, b, c son los coeficientes del polinomio (3.2). Para el gráfico siguiente se cumplen las relaciones:

$$|a| + |b| < |c| \Leftrightarrow \Omega = \emptyset \Leftrightarrow D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$$



De esta manera, resumiendo las conclusiones anteriores, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $|a| + |b| < |c| \Leftrightarrow \Omega = \emptyset \Leftrightarrow D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$
- La ecuación (3.1) con el núcleo $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c$ y $abc \neq 0$ es soluble incondicionalmente, y su solución general viene dada por la fórmula (3.3) con cualesquiera funciones $\xi(z, 0), \xi(0, w) \in W$, y para las cuales $\xi(z, 0)|_{z=0} = \xi(0, w)|_{w=0}$

Pasamos a analizar el caso en que $|a| + |b| \geq |c|$, es decir, cuando $D_\alpha \cap D_\beta \neq \emptyset$, suponiendo que el conjunto $D_\alpha \cap D_\beta$ posee puntos interiores. Introducimos los conjuntos.

$$D = D_\alpha \cap D_\beta, \quad G = D_\alpha \cup D_\beta \quad (3.14)$$

Considerando las definiciones (3.8) tenemos:

$$D = D_\alpha \cap D_\beta = \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \leq 1, |w(t)| \leq 1\} \quad (3.15)$$

En vista de que (3.6) representa la uniformización de la correspondencia (3.2), entonces se cumple

$$a[z(t)]^2 + b[w(t)]^2 + c \equiv 0$$

y por eso, comparando (3.4) y (3.16), concluimos que la uniformización (3.6) realiza una correspondencia biholomorfa entre los conjuntos D^0 y Ω^0 . Pasando en la ecuación (3.4) a la variable t , obtenemos su ecuación equivalente:

$$\{a[z(t)]^2 + c\}\xi[z(t), 0] + \{b[w(t)]^2 + c\}\xi[0, w(t)] - c\xi(0, 0) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)], \quad (3.16)$$

$$t \in D$$

Introducimos aquí las siguientes representaciones

$$\Phi(t) = \{a[z(t)]^2 + c\}\xi[z(t), 0] \quad (3.17)$$

$$\Psi(t) = \{b[w(t)]^2 + c\}\xi[0, w(t)] \quad (3.18)$$

$$\mu = c\xi(0, 0) \quad (3.19)$$

$$\hat{\eta}(t) = -z(t)w(t)\eta[z(t), w(t)] \quad (3.20)$$

Las anteriores funciones son analíticas en el interior de D y continuas en $D \cup \partial D$. En vista de que Φ es una función de $z(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(t - \frac{1}{t})$ y $z(t)$ no varía con el cambio de variable $t \rightarrow -\frac{1}{t}$, entonces la función Φ tampoco variaría con el cambio de variable $t \rightarrow -\frac{1}{t}$. Análogamente Ψ es una función $w(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}(t + \frac{1}{t})$ en donde $w(t)$ no varía con el cambio $t \rightarrow \frac{1}{t}$, entonces Ψ tampoco deberá cambiar con el cambio de variable $t \rightarrow \frac{1}{t}$.

Además, la función Φ debe anularse en todos los puntos en donde $a[z(t)]^2 + c = 0$, y la función Ψ debe anularse en todos los puntos en donde $b[w(t)]^2 + c = 0$.

Considerando estas restricciones y las representaciones (3.17) - (3.20), la ecuación (3.16) toma la forma

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \hat{\eta}(t), \quad t \in D, \quad (3.21)$$

donde Φ es analítica en el interior de D_α y satisface las igualdades

$$\Phi(t) = \Phi\left(-\frac{1}{t}\right), \Phi(i) = \Phi(-i) = 0 \quad \text{para } \pm i \in D_\alpha \quad (3.22)$$

Ψ es analítica en el interior de D_β y satisface las igualdades

$$\Psi(t) = \Psi\left(-\frac{1}{t}\right), \Psi(1) = \Psi(-1) = 0 \quad \text{para } \pm 1 \in D_\beta \quad (3.23)$$

Deseando simplificar el análisis de la ecuación (3.21) establecemos el siguiente **Lema 1.** Si cierta función f está definida sobre cierto conjunto D , en donde actúa el grupo $\Lambda_0 = \{t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t}, -t\}$, entonces tiene lugar la descomposición única:

$$f(t) = \frac{1}{2} [f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)], \quad (3.24)$$

donde f_0 no cambia para cualesquiera sustituciones del grupo Λ_0 y f_1, f_2, f_3 no cambian para las sustituciones de los grupos $\Lambda_1 = \{t, \frac{1}{t}\}, \Lambda_2 = \{t, -\frac{1}{t}\}, \Lambda_3 = \{t, -t\}$ respectivamente, y para las sustituciones restantes del grupo Λ_0 , las funciones cambian de signo.

La demostración es elemental y se la realiza reemplazando todas las sustituciones del grupo Λ_0 en la fórmula (3.24). Tenemos entonces 3 igualdades adicionales:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2} [f_0(t) + f_1(t) - f_2(t) - f_3(t)], \quad (3.25)$$

$$f\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2} [f_0(t) - f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)], \quad (3.26)$$

$$f(-t) = \frac{1}{2} [f_0(t) - f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)], \quad (3.27)$$

Las igualdades (3.24) – (3.27) podemos considerarlas como un sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas f_0, f_1, f_2, f_3 . La matriz del sistema (3.24) – (3.27) es

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

la misma que es simétrica y ortogonal, y por eso no degenerada y coincidente con su inversa. Por lo tanto, el sistema (3.24) – (3.27) posee la solución única:

$$f_0(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) + f\left(-\frac{1}{t}\right) + f(-t)] \quad (3.29)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) - f\left(-\frac{1}{t}\right) - f(-t)] \quad (3.30)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f\left(\frac{1}{t}\right) + f\left(-\frac{1}{t}\right) - f(-t)] \quad (3.31)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) - f\left(-\frac{1}{t}\right) + f(-t)] \quad (3.32)$$

Es evidente que las funciones f_1, f_2, f_3 satisfacen las exigencias formuladas.

Utilizando el Lema 1 para las funciones Φ y Ψ , y considerando las identidades (3.22) y (3.23), obtenemos

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[\Phi_0(t) + \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t)], \quad (3.33)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \Phi(t) + \Phi\left(\frac{1}{t}\right) \\ \Phi_2(t) &= \Phi(t) - \Phi\left(\frac{1}{t}\right) \\ \Phi_1(t) &= \Phi_3(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Análogamente tenemos:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}[\Psi_0(t) + \Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t)] \quad (3.35)$$

En donde

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) &= \Psi(t) + \Psi\left(-\frac{1}{t}\right) \\ \Psi_1(t) &= \Psi(t) - \Psi\left(-\frac{1}{t}\right) \\ \Psi_2(t) &= \Psi_3(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Utilizando el Lema 1 y las igualdades (3.33) – (3.36), la ecuación (3.21) toma la forma del sistema equivalente:

$$\Phi_0(t) + \Psi_0(t) = \mu + \hat{\eta}_0(t), t \in D \quad (3.37)$$

$$\Psi_1(t) = \hat{\eta}_1(t), t \in D \quad (3.38)$$

$$\Phi_2(t) = \hat{\eta}_2(t), t \in D \quad (3.39)$$

$$0 = \hat{\eta}_3(t) \in D \quad (3.40)$$

donde todas las ecuaciones son independientes y las funciones incógnitas son: $\Phi_0, \Psi_0, \Phi_2, \Psi_1$. La última igualdad no contiene funciones desconocidas y por ende puede ser considerada como la condición necesaria para la solubilidad de la ecuación (3.21).

Cada una de las igualdades (3.38) y (3.39) representa un problema de *prolongación analítica* [Gajov, F, 1977] [Shabat, B, 1985]. En base al teorema de unicidad de las funciones analíticas, cualquier problema sobre prolongación analítica de un dominio puede tener no más de una solución. La complejidad de estos problemas depende del conjunto en donde está dada la función y del conjunto al cual hay que prolongarla.

El problema (3.38) consiste en prolongar analíticamente la función $\hat{\eta}(t)$, del conjunto D al conjunto G hasta una función, perteneciente al anillo W y de variable $w(t) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{b}} (t + \frac{1}{t})$.

En vista de que $\hat{\eta}_1(t)$, es analítica en el interior de D , automorfa [Ford, L] con respecto al grupo $\Lambda_2 = \{t, \frac{1}{t}\}$ y antiautomorfa con respecto a los grupos $\Lambda_1 = \{t, -\frac{1}{t}\}$ y $\Lambda_3 = \{t, -t\}$, entonces ésta admite el desarrollo en serie de potencias de la forma.

$$\hat{\eta}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}_{1,2k+1} [w(t)]^{2k+1}, \quad (3.41)$$

$$\text{donde } w(t) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{b}} (t + \frac{1}{t})$$

Los coeficientes de este desarrollo pueden ser calculados mediante las fórmulas [Courant, R., Hurwitz A, 1968] [Shabat, B, 1985]

$$\hat{\eta}_{1,2k+1} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|w(t)| < \rho, \text{Im} t > 0} \frac{n_1(t)}{|w(t)|^{2k+2}} dw(t) \quad (3.42)$$

donde $\rho \in]0, 1[$ y la integración en (3.42) se la realiza por el contorno de uno de los óvalos (el superior), representados en los gráficos anteriores, correspondientes a $|w(t)| \leq 1$. Conociendo los desarrollos (3.41) y (3.42) tenemos:

Teorema 2. Para la solución del problema (3.38) en el anillo W con respecto a la variable w es necesario y suficiente que los coeficientes del desarrollo (3.41) formen una serie absolutamente convergente, es decir que $\sum_0^{\infty} |\hat{\eta}_{1,2k+1}| < \infty$. Si esta

condición se cumple, entonces la solución única del problema (3.38) viene dada por la igualdad.

$$\Psi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}_{1,2k+1} [w(t)]^{2k+1}, \quad \text{para } |w(t)| \leq 1$$

Pasando al problema (3.39), tenemos que este consiste en prolongar analíticamente la función $\hat{\eta}_2(t)$, del conjunto D al conjunto G hasta una función, perteneciente al anillo W y de variable $z(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(t - \frac{1}{t} \right)$

En vista de que $\hat{\eta}_2(t)$ es analítica en el interior de D , automorfa [Ford, L, 1936] con respecto al grupo $\Lambda_1 = \{t, -\frac{1}{t}\}$ y antiautomorfa con respecto a los grupos $\Lambda_2 = \{t, \frac{1}{t}\}$ y $\Lambda_3 = \{t, -t\}$ entonces esta admite el desarrollo en serie de potencias de la forma

$$\hat{\eta}_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}_{2,2k+1} [z(t)]^{2k+1}$$

donde

$$z(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad (3.43)$$

Los coeficientes de este desarrollo pueden ser calculados mediante las fórmulas [Courant, R., Hurwitz A, 1968], [Shabat, B, 1985]

$$\hat{\eta}_{2,2k+1} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z(t)| < \rho, \text{Re}t > 0} \frac{n_2(t)}{[z(t)]^{2k+2}} dz(t) \quad (3.44)$$

donde $\rho \in]0, 1[$, y la integración en (3.44) se la realiza por el contorno de uno de los óvalos (el derecho), representados en los gráficos anteriores, correspondientes a $|z(t)| \leq 1$. Conociendo los desarrollos (3.43) y (3.44) tenemos:

Teorema 3. Para la solución del problema (3.39) en el anillo W con respecto a la variable $z(t)$ es necesario y suficiente que los coeficientes del desarrollo (3.43) formen una serie absolutamente convergente, es decir, que $\sum_0^{\infty} |\hat{\eta}_{2,2k+1}| < \infty$. Si esta condición se cumple, entonces la solución única del problema (3.39) viene dada por la igualdad.

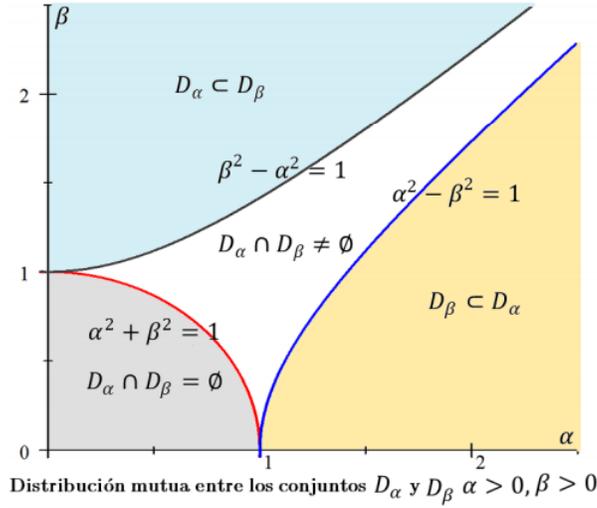
$$\Phi_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}_{2,2k+1} [z(t)]^{2k+1}, \quad \text{para } |z(t)| \leq 1$$

Finalmente analizamos el problema (3.37). Este representa un problema de contorno lineal [Gajov, F, 1977] [Mujelishvili, N, 1962], para la búsqueda de las funciones analíticas Φ_0 y Ψ_0 , automorfas con respecto al grupo $\Lambda_0 = \{t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t}, -t\}$. Analizamos primero los casos de inclusión:

$$D_\alpha \subset D_\beta$$

$$D_\alpha \supset D_\beta$$

Pasando a los casos de inclusión de los conjuntos D_α y D_β , observamos primero la siguiente gráfica en el primer cuadrante $\alpha > 0, \beta > 0$. Aquí los arcos de la circunferencia $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ e hipérbolas $\alpha^2 - \beta^2 = \pm 1$ dividen el primer cuadrante en 4 regiones, en cada una de las cuales tiene lugar la relación respectiva existente entre los conjuntos D_α y D_β (ver figura)

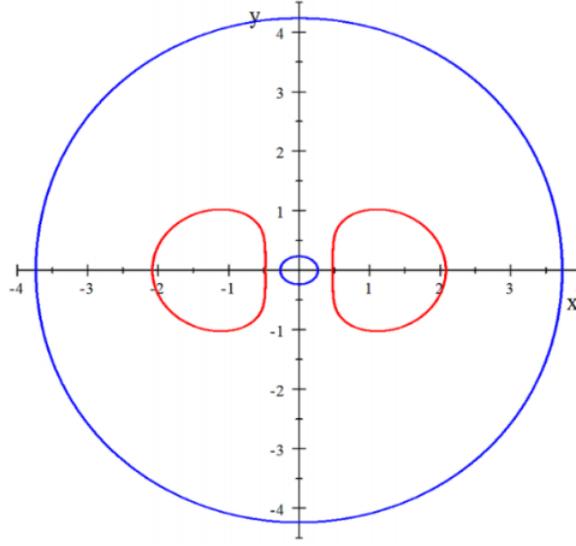


Analicemos la ecuación (3.37) en la suposición de que $D_\alpha \subset D_\beta$. Esto tiene lugar cuando $\beta^2 > \alpha^2 + 1$, lo que, por ejemplo, se ve en la siguiente gráfica.

Tendríamos entonces $D = D_\alpha \cap D_\beta = D_\alpha \subset D_\beta$ y la ecuación (3.37) toma la forma.

$$\Phi_0(t) + \Psi_0(t) = \mu + \hat{\eta}_0(t), \quad t \in D_\alpha \quad (3.45)$$

Resolvemos esta ecuación bajo el esquema: una de las funciones Φ_0 o Ψ_0 la damos en forma arbitraria, y la otra la



expresamos a través de esta mediante (3.45). Es más cómodo dar arbitrariamente aquella función cuyo dominio de definición es mayor. Como $D_\alpha \subset D_\beta$ entonces ponemos

$$\Psi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{0,2k} [w(t)]^{2k}, \quad (3.46)$$

$$\text{donde } w(t) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{b}} \left(t + \frac{1}{t} \right),$$

y donde $\Psi_{0,2k}$ son coeficientes arbitrarios que forman la serie absolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Psi_{0,2k}| < \infty \quad (3.47)$$

Como la función (3.46) es automorfa con respecto al grupo Λ_0 , entonces esta admite también un desarrollo en serie con respecto a la variable $[z(t)]^2$, en donde $z(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(t - \frac{1}{t} \right)$. La serie compuesta por los coeficientes de este desarrollo converge absolutamente, por lo menos, para aquellos dominios D_α , para los cuales $D_\alpha \cap \partial D_\beta = \emptyset$. En este caso de (3.45) hallamos:

$$\Phi_0(t) = \mu + \hat{\eta}_0(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{0,2k} [w(t)]^{2k} \quad (3.48)$$

Y para la pertenencia de esta función al anillo W con respecto a la variable $z(t)$ es necesario y suficiente que se cumpla la desigualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{\eta}'_{0,2k}| < +\infty \quad (3.49)$$

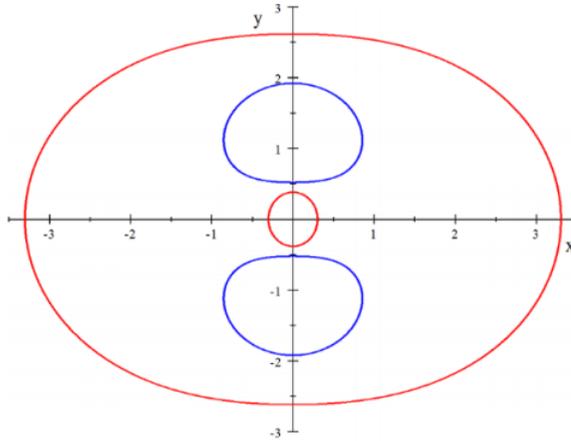
donde $\hat{\eta}'_{0,2k}$ son los coeficientes del desarrollo de la parte derecha de la igualdad (3.48), siendo

$$\hat{\eta}_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}'_{0,2k} [z(t)]^{2k} \quad (3.50)$$

Formulamos el resultado obtenido:

Teorema 3'. Si $D_\alpha \subset D_\beta$ y $\partial D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$, entonces para la solubilidad de la ecuación (3.45) es necesario y suficiente el cumplimiento de la desigualdad (3.49). Si esta desigualdad se cumple, entonces la solución general de la ecuación (3.45) viene dada por las fórmulas (3.46) y (3.48), donde los $\Psi_{0,2k}$ son coeficientes arbitrarios para los cuales se cumple la desigualdad (3.47).

Analizamos ahora la ecuación (3.37) bajo la suposición de que $D_\beta \subset D_\alpha$, lo que tiene lugar cuando $\alpha^2 > \beta^2 + 1$, que, por ejemplo, se ve en la siguiente gráfica:



Entonces tenemos $D = D_\alpha \cap D_\beta = D_\beta \subset D_\alpha$, y la ecuación (3.37) toma la forma:

$$\Phi_0(t) + \Psi_0(t) = \mu + \hat{\eta}_0(t), \quad t \in D_\beta \quad (3.51)$$

Esta ecuación la resolvemos por el esquema anterior, con el cual fue resuelta la ecuación (3.45), la diferencia está en que es necesario dar como función arbitraria Φ_0 :

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{0,2k} [z(t)]^{2k} \quad (3.52)$$

con $z(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (t - \frac{1}{t})$, y donde $\Phi_{0,2k}$ son coeficientes arbitrarios que forman la serie absolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_{0,2k}| < +\infty \quad (3.53)$$

Como la función (3.52) es automorfa con respecto al grupo Λ_0 , entonces esta admite también un desarrollo en serie con respecto a la variable $[w(t)]^2$, en donde $w(t) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{b}} (t + \frac{1}{t})$. La serie compuesta por los coeficientes de este desarrollo converge absolutamente, por lo menos, para aquellos dominios D_β , para los cuales $D_\beta \cap \partial D_\alpha = \phi$. En este caso de (3.51) hallamos:

$$\Psi_0(t) = \mu + \hat{\eta}_0(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{0,2k} [z(t)]^{2k} \quad (3.54)$$

y para la pertenencia de esta función al anillo W con respecto a la variable $w(t)$ es necesario y suficiente que se cumpla la desigualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\hat{\eta}_{0,2k}''] < +\infty \quad (3.55)$$

donde $\hat{\eta}_{0,2k}''$ son los coeficientes del desarrollo de la parte derecha de la igualdad (3.54) y

$$\hat{\eta}_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}_{0,2k}'' [z(t)]^{2k} \quad (3.56)$$

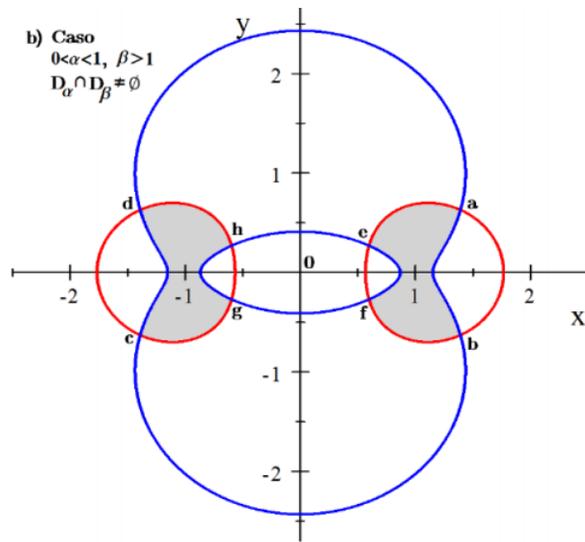
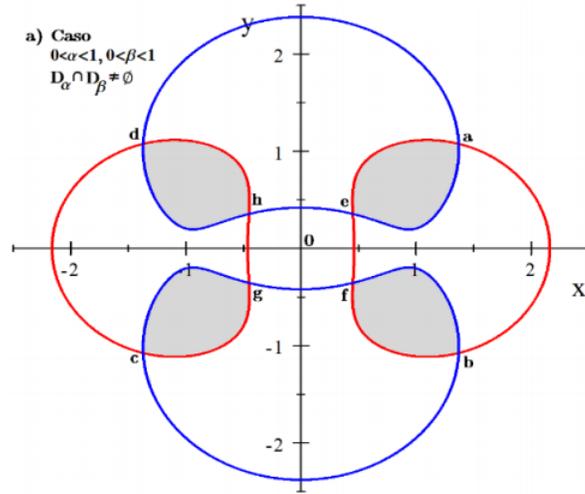
Tenemos el siguiente resultado:

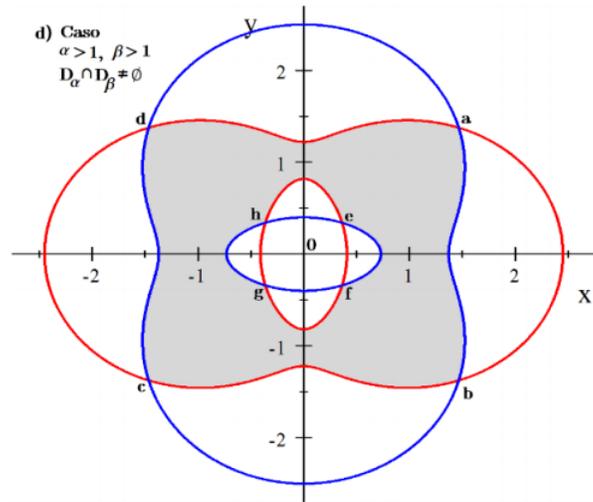
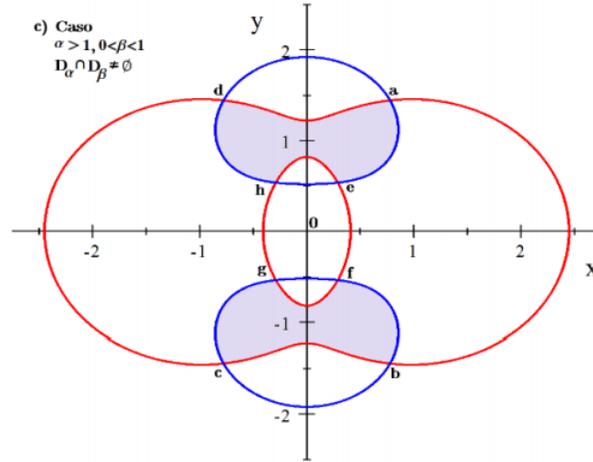
Teorema 4: Si $D_\beta \subset D_\alpha$ y $D_\beta \cap \partial D_\alpha \neq \phi$, entonces para la solubilidad de la ecuación (3.51) es necesario y suficiente el cumplimiento de la desigualdad (3.55). Si esta desigualdad se cumple, entonces la solución general de la ecuación (3.51) viene dada por las fórmulas (3.52) y (3.54), en donde $\Psi_{0,2k}$ son coeficientes arbitrarios para los cuales se cumple la desigualdad (3.53)

Analizamos ahora el importante caso, cuando $D_\alpha \cap D_\beta = D = \phi$ y $D \neq D_\alpha$. Consideramos que D posee puntos interiores. En el gráfico de la distribución entre D_α y D_β esto corresponde al triángulo curvilíneo no pintado. Este caso se subdivide en 4 sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ \beta < 1, \end{cases} \begin{cases} \alpha < 1 \\ \beta > 1, \end{cases} \begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta < 1, \end{cases} \begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta > 1, \end{cases} \quad (3.57)$$

Los casos, en los cuales, en lugar de ciertas desigualdades, se cumplen las respectivas igualdades, no serán analizados, para no extender el texto. Las ubicaciones mutuas entre los conjuntos D_α y D_β correspondientes a los casos (3.57) los presentamos en las siguientes gráficas y casos a), b), c) y d) de distribución entre D_α y D_β , presentadas a continuación:





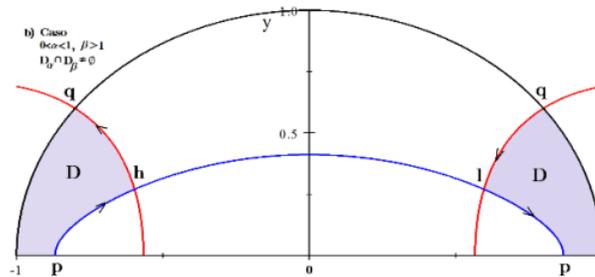
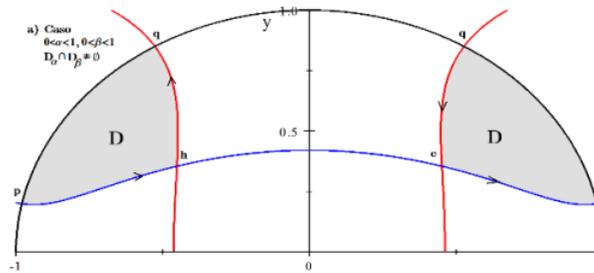
En los 4 casos anteriores, la ecuación $\Phi_0(t) + \Psi_0(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), t \in D$, representa un problema de contorno (problema de Riemann [Gajov, F, 1977] [Mujelishvili, N, 1962] [Zverovich, E, 1971]) para la búsqueda de las funciones Φ_0 y Ψ_0 , analíticas en el interior de D_α y D_β , respectivamente y automorfas con respecto al grupo: $\Lambda_0 = \{t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t}, -t\}$

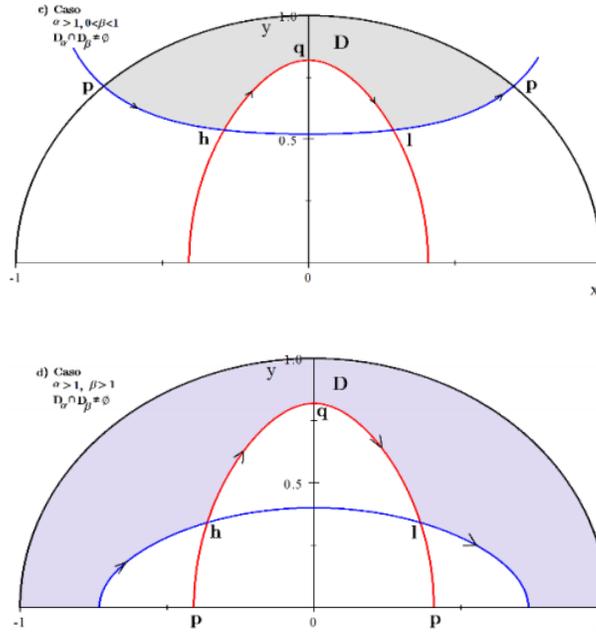
La particularidad del problema (3.37) consiste en que la unión $G = D_\alpha \cup D_\beta$ no es una superficie cerrada sino una superficie con contorno [Gajov, F, 1977] [Zverovich, E, 1971]. Sin embargo, esta permite una solución cerrada con el método de la prolongación analítica. Pasando a la construcción de esta solución, fijamos el

dominio fundamental [Ford, L, 1936] del grupo $\Lambda_0 = \{t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t}, -t\}$. En calidad de este dominio podemos elegir el semicírculo superior $\{|t| \leq 1, \text{Im}t \geq 0\}$, en el cual están identificados (pegados) todos los pares de puntos del contorno, simétricamente con respecto al eje imaginario. Los casos mostrados en las gráficas y casos a), b), c) y d) anteriores, poseen un aspecto más concreto sobre el dominio fundamental (ver los 4 siguientes gráficos). El análogo del núcleo de Cauchy [Gajov, F, 1977], automorfo con respecto al grupo Λ_0 , se expresa a través de su correspondiente función automorfa fundamental $g(t) = (t + 1/t)^2$ (que realiza un homomorfismo conforme del dominio fundamental sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de acuerdo con la fórmula:

$$K(t, \tau)d\tau = \frac{d(\tau + \frac{1}{\tau})^2}{(\tau + \frac{1}{\tau})^2 - (t + \frac{1}{t})^2} \tag{3.58}$$

Considerando que $t \in D^0$, donde D^0 es el interior del conjunto D , por la fórmula integral de Cauchy tenemos (ver los símbolos y puntos de los gráficos y casos a), b), c) y d) siguientes):





En los 4 casos anteriores, mostramos las distintas posiciones del conjunto $D = D_\alpha \cap D_\beta$ con respecto al dominio fundamental (semicírculo superior), donde los puntos del contorno del semicírculo representados con las mismas letras se consideran pegados.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\eta}_0(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{p h q l p} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{[p, h] \cup [l, p]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \oint_{[q, l] \cup [h, q]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

La primera integral de la parte derecha de la igualdad (3.58) representa una función analíticamente prolongable al dominio D_β y la segunda una función analíticamente prolongable al dominio D_α . Estas 2 integrales poseen singularidades de tipo logarítmico para $t \rightarrow h$ y $t \rightarrow l$. Utilizando la asintótica para la integral del tipo de Cauchy ([Gajov, F, 1977], [Mujelishvili, N, 1962]), tenemos:

$$\oint_{[p, h] \cup [l, p]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = \begin{cases} \tilde{\eta}_0(h) \ln(t-h) + O(1), & \text{para } t \rightarrow h \\ -\tilde{\eta}_0(l) \ln(t-l) + O(1), & \text{para } t \rightarrow l \end{cases} \tag{3.60}$$

$$\oint_{[q,l] \cup [h,q]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = \begin{cases} \tilde{\eta}_0(l) \ln(t-l) + O(1), & \text{para } t \rightarrow l \\ -\tilde{\eta}_0(h) \ln(t-h) + O(1), & \text{para } t \rightarrow h \end{cases} \quad (3.61)$$

Dando a las partes principales de las asintóticas la forma de funciones automorfas, obtenemos las siguientes igualdades asintóticas, equivalentes a (3.60), (3.61):

$$\oint_{[p,h] \cup [l,p]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = \begin{cases} \tilde{\eta}_0(h) \ln \left[(t^2 - h^2) \left(\frac{1}{t^2} - h^2 \right) \right] + O(1), & \text{para } t \rightarrow h \\ -\tilde{\eta}_0(l) \ln \left[(t^2 - l^2) \left(\frac{1}{t^2} - l^2 \right) \right] + O(1), & \text{para } t \rightarrow l \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\oint_{[p,h] \cup [l,p]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = \begin{cases} \tilde{\eta}_0(l) \ln \left[(t^2 - l^2) \left(\frac{1}{t^2} - l^2 \right) \right] + O(1), & \text{para } t \rightarrow h \\ -\tilde{\eta}_0(h) \ln \left[(t^2 - h^2) \left(\frac{1}{t^2} - h^2 \right) \right] + O(1), & \text{para } t \rightarrow l \end{cases} \quad (3.63)$$

En donde las ramas de los logaritmos se eligen, en primer lugar, idénticas en las fórmulas (3.62) y (3.63); en segundo lugar, de tal manera que las partes principales de las partes derechas de las igualdades (3.62) y (3.63) sean analíticas en el interior de $G = D_\alpha \cup D_\beta$. Esto es posible ya que en los 4 gráficos anteriores se ve que los pares de puntos h y $-h$, $\frac{1}{h}$ y $-\frac{1}{h}$, l y $-l$, $\frac{1}{l}$ y $-\frac{1}{l}$ pueden ser unidos con líneas que no tienen con $G = D_\alpha \cup D_\beta$ puntos interiores comunes. Por tanto, las ramas del logaritmo (3.62) y (3.63) se las puede elegir de tal manera que estas sean continuas fuera de estas líneas. Utilizando la representación (3.59), transformamos la igualdad (3.38) a la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{[q,l] \cup [h,q]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau - \frac{\tilde{\eta}_0(l)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - l^2) \left(\frac{1}{t^2} - l^2 \right) \right] \\ &+ \frac{\tilde{\eta}_0(h)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - h^2) \left(\frac{1}{t^2} - h^2 \right) \right] \\ &= \mu - \Psi_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{[p,h] \cup [l,p]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau + \frac{\tilde{\eta}_0(l)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - l^2) \left(\frac{1}{t^2} - l^2 \right) \right] \\ &- \frac{\tilde{\eta}_0(h)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - h^2) \left(\frac{1}{t^2} - h^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$t \in D$$

La parte izquierda de la igualdad (3.64) es analítica en el interior de D_α , continua sobre ∂D_α , automorfa con respecto al grupo $\Lambda_1 = \{t, \frac{1}{t}\}$, y supondremos que esta pertenece al anillo W con respecto a la variable $z(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(t - \frac{1}{t})$. La parte derecha de la igualdad (3.64) es analítica en el interior de D_β , continua sobre ∂D_β , automorfa con respecto al grupo $\Lambda_2 = \{t, -\frac{1}{t}\}$, y supondremos que esta pertenece al anillo W con respecto a la variable

$$w(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (3.65)$$

Así entonces, ambas partes de la igualdad (3.64) son analíticas en el interior de $G = D_\alpha \cup D_\beta$ continuas en ∂G , automorfas con respecto al grupo $\Lambda_0 = \{t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t}, -t\}$, pertenecen al anillo W tanto con respecto a la variable $z(t)$, como con respecto a $w(t)$. Aplicando el teorema sobre la prolongación analítica, concluimos que ambas partes de la igualdad (3.64) son iguales a cierta función (arbitraria) $f(t)$, automorfa [Ford, L, 1936] con respecto al grupo $\Lambda_0 = \{t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t}, -t\}$ y representable en forma de series:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_{2k}[z(t)]^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} f''_{2k}[w(t)]^{2k} \quad (3.66)$$

donde:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f'_{2k}| < \infty \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} |f''_{2k}| < \infty$$

Igualando ambas partes de la igualdad (3.64) a la función $f(t)$, encontramos de allí la solución general de la ecuación (3.37):

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) = f(t) + \left\{ \oint_{[q,l] \cup [h,q]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau - \frac{\tilde{\eta}_0(l)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - l^2) \left(\frac{1}{t^2} - l^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\tilde{\eta}_0(h)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - h^2) \left(\frac{1}{t^2} - h^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(t) = \mu - f(t) + \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{[p,h] \cup [l,p]} \tilde{\eta}_0(\tau) K(t, \tau) d\tau + \frac{\tilde{\eta}_0(l)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - l^2) \left(\frac{1}{t^2} - l^2 \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\eta}_0(h)}{2\pi i} \ln \left[(t^2 - h^2) \left(\frac{1}{t^2} - h^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Tenemos el resultado:

Teorema 5. Para la solubilidad de la ecuación funcional (3.37) es necesario y suficiente que la expresión entre llaves de la parte derecha de (3.67) pertenezca al anillo W con respecto a la variable $z(t)$, y que la expresión entre llaves de la parte

derecha de (3.68) pertenezca al anillo W con respecto a la variable $w(t)$. Si estas condiciones se cumplen, entonces la solución general de la ecuación (3.38) viene dada por las fórmulas (3.67), y (3.68), en donde f es una función automorfa arbitraria con respecto al grupo Λ_0 , analítica en G y perteneciente al anillo W con respecto a las dos variables $z(t)$ y $w(t)$.

Volviendo a la ecuación (3.21), en donde Φ y Ψ están condicionadas por (3.22) y (3.23) respectivamente, tenemos que la ecuación (3.21) se transformó en el sistema (equivalente a ella) de ecuaciones independientes (3.37)-(3.40), el mismo que anteriormente fue analizado, por lo tanto nos resta reunir los resultados obtenidos y utilizarlos para la ecuación (3.21):

Teorema 6. Para la solubilidad de la ecuación funcional (3.21) con las condiciones (3.22) y (3.23) es necesario y suficiente que se cumpla:

1. $\tilde{\eta}_3(t) \equiv 0$
2. $\tilde{\eta}_1(t)$, permite una prolongación analítica sobre D_α hasta la función Ψ_1 , perteneciente al anillo W con respecto a la variable $w(t)$;
3. $\tilde{\eta}_2(t)$, permite una prolongación analítica sobre D_α hasta la función Φ_2 , perteneciente al anillo W con respecto a la variable $z(t)$;
4. el problema de contorno (3.37) es soluble.

Si estas condiciones se cumplen, entonces la solución general de la ecuación puede ser representada en la forma $\Phi(t) = \Phi_0(t) + \Phi_1(t)$; $\Psi(t) = \Psi_0(t) + \Psi_2(t)$ en donde Φ_0 , Φ_1 , Ψ_0 , Ψ_2 fueron halladas anteriormente. Las funciones arbitrarias que entran en la solución se las elije de tal manera que cumplan las condiciones: cuando $\Phi(i) = \Phi(-i)$ cuando $\alpha > 1$ y $\Psi(1) = \Psi(-1)$ cuando $\beta > 1$.

Regresando al problema (3.1), (3.2) hallamos las condiciones bajo el cumplimiento de las cuales, la solución general de la ecuación funcional viene dada por la fórmula (3.3). Suponiendo que la ecuación (3.5) es soluble, y colocando en ella la solución general en el numerador de la parte derecha de (3.3), concluimos que la parte derecha de (3.3) es analítica en el bicírculo $|z| < 1, |w| < 1$, es decir permite el desarrollo en serie de potencias

$$\xi(z, w) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \xi_{mn} z^m w^n, \quad (3.69)$$

Los coeficientes ξ_{mn} pueden ser obtenidos mediante la división del numerador por el denominador en (3.3). Finalmente tenemos el resultado:

Teorema 7. Para la solubilidad de la ecuación funcional (3.1) con núcleo de la forma (3.2), es necesario y suficiente que se cumplan todas las condiciones del Teorema 5, y que tengamos $\xi(z, w) = \sum_{m, n=0}^{\infty} |\xi_{mn}| < +\infty$ en donde ξ_{mn} son los coeficientes del desarrollo (3.69), obtenidos mediante la división del numerador por el denominador de la parte derecha de la fórmula (3.3). Bajo el mismo cumplimiento de las condiciones indicadas, la solución general viene dada por la fórmula (3.3).

4 Resultados y Discusión

Finalmente, hemos presentado en el contenido de siete teoremas, las condiciones y fórmulas generales para resolver la ecuación funcional lineal para funciones analíticas en el bicírculo

$$A(z, w)\xi(z, w) - A(z, 0)\xi(z, 0) - A(0, w)\xi(0, w) + A(0, 0)\xi(0, 0) = zw\eta(z, w), \quad (4.1)$$

$$(z, w) \in \mathbb{R}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \leq 1, |w| \leq 1\},$$

donde el núcleo $A(z, w)$ tiene la forma de cuádrice $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c$. Hemos mostrado que las soluciones de la ecuación funcional anterior están contenidas en la fórmula

$$\xi(z, w) = \frac{A(z, 0)\xi(z, 0) + A(0, w)\xi(0, w) - A(0, 0)\xi(0, 0) + zw\eta(z, w)}{A(z, w)} \quad (4.2)$$

La solubilidad de la ecuación anterior es equivalente a la posibilidad de encontrar las funciones $\xi(z, 0)$ y $\xi(0, w)$ pertenecientes al anillo W de Wiener, de tal manera que el numerador de su parte derecha se divida sin resto por $A(z, w)$ en el anillo W . Para la división, a su vez es necesario que el numerador se anule en todos los ceros del denominador. Considerando esto, llegamos a la siguiente ecuación funcional lineal:

$$A(z, 0)\xi(z, 0) + A(0, w)\xi(0, w) - A(0, 0)\xi(0, 0) = zw\eta(z, w) \quad (4.3)$$

donde $(z, w) \in \Omega$, siendo

$$\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : az^2 + bw^2 + c = 0, |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$$

Esta última ecuación funcional la resolvemos, primeramente, mediante la uniformización global de la correspondencia $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c = 0$, es decir

$$\begin{cases} z = z(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-\frac{1}{t}\right) \\ w = w(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$t \in \hat{\mathbb{C}},$$

lo que significa que $A(z(t), w(t)) \equiv 0$

Reemplazando las funciones uniformizantes en la última ecuación funcional obtenemos la nueva ecuación funcional equivalente:

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \mu + \tilde{\eta}(t), \quad t \in D, \quad (4.5)$$

$$D = D_1 \cap D_2 = \{t \in \mathbb{C} : |z(t)| \leq 1, |w(t)| \leq 1\}$$

Analizando las distintas configuraciones del conjunto D , resolvemos esta última ecuación funcional utilizando la prolongación analítica con la integral del tipo de Cauchy, las propiedades de las funciones automorfas y los desarrollos en series de potencias de funciones analíticas con la exigencia de que pertenezcan al anillo de Wiener $W_z, W_w, W_{z,w}$

5 Conclusiones y Recomendaciones

Mediante la aplicación de funciones generatrices en el espacio l^1 (series absolutamente convergentes) se transforma la ecuación bidimensional discreta de *Wiener* y *Hopf* en un cuadrante del plano en una ecuación funcional equivalente, con funciones pertenecientes al anillo $W_{z,w}$ de Wiener. Esta ecuación funcional viene dada en su forma general y para su estudio se hace conveniente analizar varios casos particulares, es decir, distintas variantes o formas del núcleo $A(z, w)$, principalmente algebraicas.

En este artículo, la ecuación funcional analizada posee el núcleo particular $A(z, w) = az^2 + bw^2 + c, abc \neq 0$, y se la resuelve completamente. Inicialmente mediante la uniformización (parametrización) de la relación $A(z, w) = 0$, transformamos la ecuación en una nueva ecuación funcional equivalente con variable $t \in \mathbb{C}$. Como resultado fundamental tenemos que la ecuación funcional en $t \in \mathbb{C}$ se la resuelve para todos los casos presentados en el estudio del conjunto D . Luego, mediante el uso de técnicas del análisis complejo (uniformización, automorfismos, desarrollos en series de potencias, integral del tipo de Cauchy, problemas de contorno, prolongación analítica, otras) se llega a las soluciones.

La ecuación funcional inicial, en su caso general, está muy lejos de ser resuelta totalmente, pero los resultados parciales o particulares para distintos tipos de núcleos $A(z, w)$ son muy ricos en sus contenidos y métodos matemáticos como se demuestra en varios trabajos y resultados de los autores y otros especialistas, y pueden seguir estudiándose.

Los métodos de análisis de la ecuación funcional con núcleo en forma de cuadrática, objeto de estudio del presente trabajo, tienen carácter teórico, pero pueden ser aplicados al estudio de ecuaciones funcionales semejantes que aparecen en la teoría de colas, marchas aleatorias, ecuaciones del tipo de *Wiener* y *Hopf* y otros fenómenos.

La idea de uniformizar la relación algebraica $A(z, w) = 0$ (núcleo) para resolver la ecuación funcional original en una sola variable $t \in \mathbb{C}$, pertenece al Profesor, Dr. Edmund Ivanovich Zverovich de la Universidad Estatal de Belarus (Rusia Blanca).

6 Bibliografía

Referencias

- Cohen, J. W., y Boxma, O. J. (1987). Boundary value problems in queueing system analysis. Moscow: Ed. Mir. (in russian).
- Courant, R., Hurwitz A. (1968). Theory of functions. Moscow: Nauka. (in russian).
- Fayolle, G. (1983). On functional equations for one or two complex variables arising in the analysis of stochastic models. In *Proceedings of the International Workshop on Computer Performance and Reliability*, (pp. 55-75). North-Holland Publishing Co.
- Flatto, L., y McKean, H. P. (1977). Two queues in parallel. *Communications on pure and applied mathematics*, 30(2), (pp. 255-263). doi: 10.1002/cpa.3160300206
- Ford, L. R. (1936). Automorphic functions. Moscow: ONTI. (in russian).
- Gajov, F. D. (1977) Boundary problems. Moscow: Nauka. (in russian).
- Gortaire, Danilo. (1994). Investigation of functional equations for analytical functions in the bicircle with the method of uniformization and applications (Doctoral thesis). University of Belarus, Minsk. (in russian).
- Krushevskii, E. A. (1992). Linear equations for analytical functions in the bicircle and applications. *Thesis of doctor candidate in mathematics*, University of Belarus, Minsk. (in russian).
- Kingman J. F. C. (1961). Two similar queues in parallel. *The Annals of Mathematical Statistics*, 32(4), 1314-1323.
- Malyshev, V. A. (1970). Random walks. The Wiener-Hopf equations in a quadrant of the plane. Galois automorphisms. Moscow University: Moscow.
- Malyshev, V. A. (1976). Wiener and Hopf equations and their uses in probability theory. *Resultados científicos*, (Itogi Nauki) 13 (pp. 5-35). (in russian).
- Mujelishvili, N. I. (1962). Singular integral equations. Moscow: Ed. Fis.- Mat. (in russian).
- Nevanlinna, R. (1965). Uniformización. Moscú: Ed. Literatura Extranjera. (in russian).
- Rogosin, S. V. (1992). Some questions of analytic functions applications in the queueing theory. *Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität*, Bochum.
- Shabat, B. V. (1985). Introduction to Complex Analysis. Moscow, Nauka. (in russian).
- Zigmund, A. (1965). Trigonometric Series. Moscow: Ed. Mir. (in russian).
- Zverovich, E. I. (1971). Boundary problems of analytical functions in Holder classes on Riemann surfaces. *Uspehi Matematicheskij Hayk*, (157) (pp. 113-179). (in russian).
- Zverovich, E. I. (1992). On a certain functional equation in the theory of random walks and equations of Wiener and Hopf in a quadrant. *Thesis of the international conference of mathematics dedicated to the 100 years of the birth of S. Banach*. Lvov. (in russian).
- Zverovich, E. I., Krushevskii E. A. (1987). Implicit solution of some particular cases of the two-dimensional discrete equation of Wiener and Hopf in a quadrant. *Modern problems of mathematical physics. Works of Soviet symposium*, Tbilisi University (pp. 33-39). (in russian).
- Zverovich, E. I. (1998). On the possibility of constructing a global uniformization of an algebraic correspondence, Serie I: Physics, Mathematics, Mechanics. University of Belarus Journal (pp. 57- 60). (in russian).