Matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2015, Vol. 13, No. 1

SERGEI SOBOLEV, CÁLCULO DEL SIGLO XX Y LAS DERIVADAS DE FUNCIONES GENERALIZADAS.

Bustamante Romero Johni[1], Acosta Acosta Ángel[2].

Resumen. *El artículo trata sobre la escuela matemática rusa y aspectos importantes en la vida de S. L. Sobolev y su aporte a la «Teoría de Ecuaciones de la Física - Matemática», además la definición de funciones generalizadas y algunos ejemplos.*

Palabras Claves: Sobolev, funcionales, funciones generalizadas, Espacio Dual, Espacio de Sobolev, soporte, Espacio de Banach, Schwartz, Distribuciones, funciones generalizadas.

Abstract: *In this article an introductory historical review of the activity and scientific production of Sergei Sobolev, on the calculation of the 20th century known as the Theory of Distribution. The most important part of this theory is based on the definition of generalized functions and the derivative of generalized functions.*

Keyword: Sobolev, functional, generalized functions, Dual Space, Sobolev, support, stand, Banach space, Schwartz, Distributions, generalized functions.

Recibido: Marzo 2015.
Aceptado: Marzo 2015.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se describe una reseña histórica introductoria de la actividad y producción científica del Sergei Sobolev, sobre el cálculo del siglo 20 conocido como Teoría de las Distribuciones, presentado por L. Schwartz.
La parte más importante de esta teoría está basada en la definición de las funciones generalizadas y la derivada las mismas.

2. LA ESCUELA RUSA

El principio de crear una escuela se encuentra tácito en las sociedades que tienen la capacidad de generar ciencia y transmitirla «Maestro – discípulo» «Profesor- estudiante» en este artículo presentaré la cadena de transmisión de grandes maestros a discípulos que luego fueron grandes maestros y así la gran escuela rusa.
De la conferencia de «Matemáticos de la academia de ciencias Rusa» en el «4to festival de ciencia anual de Moscú – 2011» tenemos la siguiente historia:
Pedro Primero[1] en 1724 emite el decreto de creación de la Academia de Ciencias, por consejo de su amigo y muy conocido matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz[2]. Estos dos personajes tuvieron varios encuentros en los cuales discutieron este proyecto, casi todo el decreto contenía los sabios consejos de Leibniz. La sede de la academia fue la joven ciudad de San Petersburgo y como es de suponerse en Rusia no existían científicos de renombre para la academia, por tanto tuvieron que contratar científicos del extranjero, entre los invitados a trabajar en la recién creada academıa fueron los hermanos Nocolai y Daniel Bernouille[3]. La contratación de los hermanos Bernouille tiene la siguiente interpretación:
Uno de los discípulos más queridos por Leibniz fue Jakob Bernouille, el mismo que ocupaba una posición de influencia en la universidad de Basilea[4] en Suiza.
Nicolai Bernouille murió luego de un año de haber llegado a Rusia. Daniel (hermano menor) ocupó el puesto de su hermano fallecido. Uno de los más grandes aciertos administrativos fue el haber influido en la contratación del joven Leonard Euler. Euler llego a San Petersburgo en 1729[5] La mayor parte de su producción científica la realizó en Rusia. Un periodo de 14 años trabajó en Berlín y por petición de la Emperatriz Ekaterine Alekséyevna (Catalina II la Grande) volvió a Rusia hasta el final de sus dias6, por eso Leonard Euler es considerado el fundador de la Escuela Rusa y en el siglo XVIII, San Petersburgo se convirtió en la capital mundial de la Matemática (1830).
Luego de fundada la PAH (Rosiskaya Akademiya Nauki / Academia de Ciencia Rusa), de ella se forman directamente e indirectamente grandes mentes del mundo científico, tales como:
Pafnuti Lvovivh Chebyshev 1821 - 1894.[7]
Alexander Mijailovich Liapunov 1857 - 1918.
Vladimir Andreyevich Steklov 1863 -1926.

[1]*Bustamante Johni Profesor Departamento de Matemáticas, FCNM, ESPOL (e-mail: jobustam@espol.edu.ec) Guayaquil.*
[2]*Acosta Ángel Profesor de la Universidad Politécnica Salesiana, Facultad Ciencias Matemáticas y Físicas (e-mail: aacosta@ups.edu.ec), Guayaquil.*

[1]*Moscu, 09.06.1672; San Petersburgo, 08.02.1725. El emperador Pedro I Alexeievich, conocido como Pedro el Grande. fue el fundador de la ciudad de San Petersburgo el 16 de Mayo 1703, y fue la capital de Rusia desde 1712 a 1918.*
[2]*Alemania, Leipzig, 1.06.1646; Hannover, 14.11.1716*
[3]*Nacidos en Suiza*
[4]*Universitat Basel*
[5]*Edad de 19 años. 1729 año que falleció el gran Isaac Newton*
[6]*San Petersburgo 1830, Su tumba se encuentra en esta ciudad*
[7]*Entre sus estudiantes estuvieron Dmitry Grave, Aleksandr Korkin, Aleksandr Liapunov y Andréi Márkov*

Andréi Andreyevich Márkov 1856 -1922.[8]
A. N. Krilov 1863 - 1945. [9]
N: M: Günter [10]
V. I. Smirnov 1887 - 1974 [11]
G.M. Fikstengoltd
Sergei Lvovich Sobolev[12]
Vera Nikolaevna Maslennikova[13]
Mijail Evguenievich Bogovskii[14]

Vale la pena subrayar que S. L. Sobolev tuvo como profesores y tutores varias mentes privilegiadas tales como:
Hunter, Smirnov, Fikstengoltd, Dilone.

En la escuela rusa de matenmáticos, existió grandes mentes en la ciudad de Moscú (segundo polo en desarrollarse en Rusia siglo XVIII), su creación fue influenciada por la academia de ciencias Rusa ubicada en San Petersburgo y de la famosa escuela francesa, tales personajes como:
Bashman, Rhukovskii, Chapligin, Ostrogradskii.
La influencia francesa de aquel tiempo (siglo XVIII- XIX) fueron los grandes personajes como: Laplace, Poisson, Fourier, Cauchy.

3. FUNCIONES GENERALIZADAS DE SOBOLEV

En 1932, S. L. Sobolev trabajo en el Instituto de Matemáticas V. A. Stiklov en Leningrado y en 1934 en Moscú, en este periodo el propuso un nuevo método de solución del problema de Cauchy de la ecuación hiperbólica con coeficientes variables, este trabajo con la ecuación hiperbólica lo llevo a S. L. Sobolev a cambiar el punto de vista clásico de solución de esta ecuación diferencial y así Sobolev propone la solución del problema de Cauchy en un espacio funcional, esta idea fue el inicio del tratamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales como funcionales (funciones generalizadas). Esto ocurrió en 1935, y por eso se considera a este año como el año del nacimiento de la «Teoría de las funciones generalizadas»

Sobolev definió las derivadas generalizadas, las cuales se calculan con la integración en un determinado exponente, relación que define un espacio funcional, los cuales toman el nombre de «Espacios de Sobolev W_p^l »

[8] *N: M: Günter fue estudiante de Márkov*
[9] *Krylov publicó la primera traducción al ruso de Isaac Newton, Philosophi_ Naturalis Principia Mathematica*
[10] *Hunter fue el dirigente del diploma de S. L. Sobolev*
[11] *Vladimir Steklov fue su tutor en el grado de Ph.D*
[12] *San Petersburgo, 23.07.1908; Moscú 03.01.1989*
[13] *Mosc´u 29.04.1926,Fue estudiante de S. L. Sobolev, y fue miembro principal de la Academia de ciencias URSS*
[14] *Fue estudiante de V. N. Maslennikova*

Estos principios los exponemos a continuación:

Definición 1. (Definición de un funcional.).- Llamaremos Funcional a la aplicación $L: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ Donde $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es un espacio de Banach (espacio vectorial normado).

En este punto es claro tener en cuenta que: Si un funcional es lineal y continuo entonces existe una función $\boldsymbol{f}$, se expresa como producto interno.

También debemos tener claro que una función generalizada es un funcional lineal y continuo. Y en adelante denotaremos a las funciones generalizadas por el nombre de la función en su representación como producto interno, es decir Si $L(\varphi) = (f, \varphi)$; la denotamos $f = L(\varphi)$, Debemos tener en cuidado, a veces podemos confundir la función clásica con el funcional.

Definición 2. (Definición de derivada generalizada -derivada de un funcional-).- Sea f y g funciones localmente integrables (según Lebesgue $L_1(G)$) definidas en un subconjunto abierto $G \subset R^n$, y α un multi-índice, la función g se llama derivada generalizada de orden α de la funcion $\boldsymbol{f}$ en el sentido de Sobolev y la denotamos $D^\alpha f$, si para cualquier función $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ se verifica:

$$(D^\alpha f, \varphi) = \left|(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi)\right| \quad (1)$$

Donde el conjunto $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ es el conjunto de todas las funciones de $c^{o\,\infty}(\mathbb{R}^n)$ esto significa que es continua y derivable infinitas veces, además tiene suporte compacto en $\mathbb{R}^n$, es decir $supp\varphi = \{x \,/\, \varphi(x) \neq 0\}$, además en estas funciones se define la convergencia de la siguiente forma: $\forall\{\varphi(x)\} \in \mathcal{D}$ converge a la función $\varphi \in \mathcal{D}$ solo si existe un radio r tal que la bola B_r contiene a $supp\varphi_k$,es decir $\exists r > 0, supp\varphi_k \subset B_r$ lo antes dicho se resumen en decir que el soporte es acotado lo cual nos garantiza que la convergencia sea uniforme

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \quad (2)$$

En la notación usamos: muti-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) y |\alpha| = \alpha, +\alpha_2 \ldots + \alpha_n, \forall \alpha_i \geq 0$

El conjunto de las funciones generalizadas definido en $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ lo denotamos $\boldsymbol{\mathcal{D}}$'

Existen otras funciones generalizadas tales como las funciones generalizadas de crecimiento lento y se usan para generalizar la transformada de Fourier.

Lorenz Schwarz y la Teoría de Distribuciones

Lorenz Schwarz nació en Paris el 5 de marzo de 1915, de una familia de cirujanos, entre sus familiares tenemos a Adamar que fue el hermano de su abuela, en 1938 L. Schwarz se casó con Mari-Elen Levi hija del famoso matemático P. Levi, En sus años escolares coincidió con E. Borel, E. Cartan, M. Freshe, P. Montiel, y en un colega vecino dictaba lecciones el famoso A. Lebesgue, y dictaba seminarios J. Adamar, a estas clases asistía L.

Schwarz. Luego de terminar la escuela, Schwarz decidió ir al servicio militar, y aquellos tiempos fueron muy difíciles por la segunda guerra mundial, esto retraso su formación pero luego continúo sus estudios y su producción científica. En 1950, L. Schwarz recibio la medalla fields por la «Teoría de distribuciones» la cual es la misma teoría de las funciones generalizadas específicamente en la generalización de la transformada de Fourier o funciones generalizadas de lento crecimiento.
L. Schwarz en 1950 fue parte del grupo de Burbaki, en el cual tuvo gran influencia y grandes aportes.

4. SOLUCIONES GENERALIZADAS DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Antes de pasar a definir las soluciones generalizadas de una ecuación diferencial, debemos hacer algunas aclaraciones tales como:
En muchos casos la derivada clásica de una función es la misma función que caracteriza al funcional, pero no siempre, y por tal motivo a continuación un ejemplo:
La función escalón es $f(x)=\begin{cases}0, & si\ x\leq 0\\ 1, & \text{si } x>0\end{cases}$, si derivamos esta función en el sentido clásico observamos que esta derivada existirá en todos los puntos excepto en el punto cero y en todo su dominio es la función cero. Ahora aplicamos la Definición 2 y buscamos Df su correspondiente derivada función generalizada

$\forall\varphi, (Df,\varphi)=(-1)^1(f,D\varphi)$, tenemos:

$$(Df,\varphi)=-(f,D\varphi)=$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)D\varphi(x)\ dx\ =$$

$.-(\int_{-\infty}^{0}\ \ +\int_{0}^{\infty}\ \ )(f(x)D\varphi(x)\ \ dx=$
$-\int_{0^+}^{\infty}1.D\varphi(x)\ dx\ =\ -\int_{0^+}^{\infty}1.d\varphi(x)\ dx\ =$
$-\ 1\cdot\varphi(x)|_{0}^{\infty}+\int_{0^+}^{\infty}0.\varphi(x)\ dx\ =\ -\varphi(\infty)+\varphi(0^+)=\varphi(0),$
tenemos entonces:
$(Df,\varphi)=\ \varphi(0)$, y a su vez $\varphi(0)=(\delta,\varphi)$, por lo tanto $(Df,\varphi)=(\delta,\varphi)$.
Otro ejemplo:
A continuación veremos una de las grandes diferencias entre derivadas clásicas y las derivadas generalizadas.
Una característica importante de la derivada de las funciones generalizadas es que la derivada generalizada de orden superior existe y no necesariamente debe previamente existir su derivada de orden inferior.
Y así:
Sea $u(x,y)=u_1(x)+u_2(y)$ una función generalizada, ahora calculamos la derivada de segundo orden:

$$\left(D_{xy}u,\varphi\right)=\left(u,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)=$$

$$\int_{\Omega}\left(u_1(x)+u_2(y)\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx\,dy=$$

$$\int_{\Omega}u_1(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx\,dy+\int_{\Omega}u_2(y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx\,dy,$$

$$\int_{\Omega}u_1(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx\,dy=$$

$$\int_{a}^{b}\left(u_1(x)\int_{\Psi_1}^{\psi_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dy\right)dx=$$

$\int_{a}^{b}u_1(x)|_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)}\,dx$, de forma similar tenemos:

$\int_{a}^{b}u_2(y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx=0$, es decir:

$\left(D_{xy}u,\varphi\right)=0$, esto nos demuestra que la derivada de segundo orden existe indiferentemente exista la derivada de primer orden, se podía haber tomado $u_1(x)$ y $u_2(y)$tales que sean continuas y no tengan primera derivada generalizada, y esto no afectaría el cálculo de su segunda derivada.

5. CONCLUSIONES

Podemos decir que las herramientas matemáticas desarrolladas por Sobolev, constituyen elementos nuevos necesarios para resolver problemas de la física matemática y así ampliar el diapasón de búsqueda de soluciones que mediante los métodos clásicos eran imposibles. En el siglo XVII el cálculo clásico alcanzo su mejor época y los personajes más representativos fueron Newton y Leibniz, luego de 200 años, es decir en el siglo XIX nace el nuevo cálculo, con dos grandes personajes como lo son S.L Sobolev y L. Schwarz, los cuales fueron resultado de dos grandes escuelas como lo es la escuela rusa de línea directa del gran Euler, y de la escuela francesa con los personajes tales como Lagrange, Fourier, Laplace.

El nuevo cálculo se apoya mucho del análisis funcional, tal como lo evidenciamos en la definición de funciones generalizadas y su derivada, y Sobolev hace un aporte importante con los espacios funcionales que llevan su nombre «Espacios de Sobolev $W_p^l(\Omega)$»

El nuevo cálculo es conocido y presentado al mundo por L. Schwarz como «Teoría de distribuciones»

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **KUTATELADZE, S.S. ARTICLE: SOBOLEV OF THE EULER SCHOOL, "ON THE OCCASION OF THE CENTENARY OF THE BIRTH OF S. L. SOBOLEV",** *JANUARY 25, 2008.*
2. **KUTATELADZE, S.S. ARTICLE: SOBOLEV AND THE CALCULUS OF THE TWENTIETH CENTURY,** *"ON THE OCCASION OF THE CENTENARY OF THE BIRTH OF S. L. SOBOLEV", JANUARY 25, 2008.*
3. **KUTATELADZE, S.S. "SERGEI SOBOLEV AND LAURENT SCHWARTZ,** *"HERALD OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, 74:2, PP 183-188 (2005).*
4. **BRYLEVSKAYA, L. I., THE MYTH OF OSTROGRADSKII: TRUE AND PREVARICATION,** *ISTORICO-MATEMATICHESKIE ISSLEDOVANIYA, SECOND SERIES, ISSUE 7 (42), YANUS-K, MOSCOW, 2002, PP 18-28 (IN RUSSIAN).*