

REVISIÓN Y APLICACIÓN DEL PRIMER MÉTODO PARA MAXIMIZACIÓN DEL BANDWIDTH EN EL PROBLEMA DE SINCRONIZACIÓN DE SEMÁFOROS

Cabezas Xavier¹, García Sergio¹, Delgado Erwin³

Resumen: El presente trabajo muestra una revisión completa y exhaustiva del que a nuestro punto de vista es el primer y más influyente enfoque para sincronizar los tiempos de semáforos sobre una arteria en una red de transporte. Hemos organizado la información de los algoritmos propuestos en la publicación original de forma que su lectura y comprensión sea más fluida, no sin antes repasar los teoremas y lemas que justifican y validan el procedimiento. Mostramos además resultados computacionales aplicando el método sobre una avenida de la ciudad de Guayaquil-Ecuador.

Palabras Claves: Sincronización, semáforos, optimización.

Abstract: In this paper we show a complete and thorough review of the first method for synchronization of traffic lights on an artery on a transport network. From our point of view is the first and most influential approach to solve this problem. We have organized the information of algorithms proposed in the original publication in order to make reading and understanding more fluid. It is also presented a review of all lemmas and theorems that justify and validate the complete procedure. Furthermore we give computational results using the method on a street in Guayaquil-Ecuador with different setups.

Keywords: Synchronization, Traffic lights, optimization.

Recibido: Febrero 2016.

Aceptado: Abril 2016.

1. INTRODUCCION Y MOTIVACION.

Quienes poseemos un vehículo sabemos que uno de los enemigos del tiempo son los semáforos. Tratar de evitar una luz roja es casi una prioridad cuando se trata de llegar a tiempo, y seguramente más de una vez nos hemos preguntado del porqué de nuestra mala suerte cuando transitamos en las calles y avenidas de la ciudad. La optimización de los momentos en que un semáforo debe cambiar de verde a rojo puede mejorar ese retraso producido por parar demasiado en una intersección. Sin embargo, dejando a un lado los problemas personales, también hay muchas razones por las que una eficiente temporización semáforos podría beneficiar globalmente a la sociedad, entre ellas:

- Minimizar la contaminación, debido al efecto de la generación gases tóxicos por los cambios de velocidad de los vehículos al momento de parar y luego seguir,
- Mejorar el movimiento del flujo vehicular, lo que reduciría los estancamientos de tráfico debido a colas generadas en las luces rojas, y
- Evitar accidentes de tránsito.

Estos problemas a mejorar son observables en pequeñas y grandes vehículos. Resolver los problemas de tránsito aquí se vuelve una prioridad, más aún cuando ciudades, como en

Guayaquil-Ecuador que con 2'350.915 habitantes [9] poseen un parque automotor de más de 600.000 Resolver los problemas de tránsito aquí se vuelve una prioridad, más aún cuando se sabe que la transportación consume el 27 % de la energía total y casi el 100 % de la energía utilizada globalmente proviene de recursos petroleros y de sus derivados, como la gasolina, ver [11].

El problema en el que se enfoca este estudio es conocido como PSS, Problema de Sincronización de Semáforos, o como STLP por sus siglas en inglés, Synchronization of Traffic Lights Problem. Muchos autores han dado varios enfoques de solución, pero a nuestro entender el más estudiado es aquel que trata de maximizar el tiempo que un vehículo o grupo de vehículos puede cruzar una arteria sobre una red de transporte sin parar debido a la espera de una luz verde donde un semáforo este establecido.

Uno de los primeros trabajos en esta área y que inicia un estudio formal y matemático del problema fue el realizado por Morgan y Little [1] en el año 1964. Este trabajo muestra un método sistemático basado en la geometría de los tiempos para las luces rojas y verdes a lo largo de una arteria. El procedimiento se aplica sobre una arteria de dos vías (ida y venida), ya que el caso de una vía es bastante simple. Cuando una calle tiene dos sentidos el proceso de sincronización es combinatorio y por lo tanto muy difícil de resolver. Sin embargo el algoritmo presentado por Morgan y Little lo maneja bastante bien, dentro de los supuestos que el enfoque original presentó, por ejemplo,

¹School of Mathematics, The University of Edinburgh

²Faculty of Science and Technology, Coimbra University

³Delgado Bravo Joffre Erwin, mail: uc2015161420@student.uc.pt

velocidades fijas de los vehículos al transitar de una esquina a otra. Esta última restricción

no fue relajada en modelos posteriores. Aunque antes de este artículo, hubieron otros enfoques geométricos de solución, éste mejoró los resultados previos considerablemente.

La solución presentada en [1] supone que cada semáforo sobre una arteria funciona dentro de un periodo común (ciclo), el cual es la suma de los tiempos de rojo y verde, es decir, Si r_i y g_i son los tiempos de rojo y verde respectivamente, entonces $r_i + g_i = r_j + g_j$ para todo semáforo i y j . El largo del periodo es medido en segundos y representa la unidad de tiempo para los cálculos del tiempo (Este supuesto es utilizado en casi todos los enfoques hasta el día de hoy). Con la ayuda de la siguiente definición se trataron en este trabajo: se establecen los casos que

Definición 1 (Bandwidth [1]). Considere una arteria sobre una red de transporte con una sucesión de semáforos ubicados sobre sus esquinas. El bandwidth (ancho de banda) a lo largo de la arteria es la porción del periodo durante el cual un vehículo podría comenzar en una esquina, y por medio de viajar a una preasignada velocidad, ir a otra sin parar por una luz roja.

Los dos casos que se resolvieron en 1964 fueron:

Problema 1. Dado un arbitrario número de semáforos a lo largo de una calle, un periodo común, los tiempos de rojo y verde para cada semáforo, y velocidades fijas en cada dirección n de una arteria de dos vías entre cada par de adyacentes semáforos, sincronizarlos para producir bandwidths que son iguales en cada dirección y tan grandes como sea posible.

Problema 2. Resincronizar los semáforos a favor de una dirección (si es factible) y darle a la otra dirección un bandwidth tan grande como sea posible.

Ya para el año 1966, John D.C. Little [2] uno de los autores del artículo del año 64, propone resolver los problemas 1 y 2 utilizando programación lineal entera (PLE), que en esa época ya era popular a pesar de las dificultades de trabajar con variables discretas en esa época (y aún lo es) y que el mismo autor menciona en su trabajo. La formulación es simple y utiliza mucha de la notación de [1], pero muestra también un pequeño gran aporte a la sincronización de semáforos ya no solo sobre una arteria, sino sobre una red, es decir múltiples arterias que se conectan unas con

1 Aunque el periodo se llamará ciclo, este concepto no debe confundirse con la definición de ciclo sobre un grafo. Aquí ciclo hace referencia al largo del periodo.

otras, formando una típica configuración de una red de transporte en una ciudad. Estos modelos fueron resueltos utilizando un algoritmo de ramificación y corte, especialmente diseñado para estos modelos. La introducción de este último caso, trajo consigo un problema adicional, el considerar ciclos sobre el grafo que representa la red, lo que lo hace mucho más difícil de tratar porque implica utilizar variables enteras adicionales en su formulación.

Gartner et al. [3] introdujeron un nuevo enfoque para el PSS, ellos no trataron de maximizar el bandwidth, sino más bien tiene como objetivo minimizar una función de desempeño de la red, en particular el atraso que los vehículos incurren debido a parar por luces rojas. La función objetivo construida es de hecho no lineal, pero es convexa, y los autores proponen linealizarla por partes, esto agrega nuevas restricciones al modelo.

En 1981 Little, Kelson and Gartner propusieron un sistema computacional llamado MAX-BAND [4] el cual resuelve los problemas uno y dos, así como también el caso sobre una red, vía PLE. Las primeras versiones tratan el caso de red de transporte para aquellas cuyos ciclos son formados por solo tres nodos. Los casos más generales fueron introducidos en versiones posteriores. En años posteriores Gartner propuso además considerar bandwidths variables en cada arco sobre cada arteria, lo que mejoró los valores de las funciones objetivos para casos previamente estudiados.

Trabajos más recientes incluyen enfoques heurísticos y modelos que agregan nuevos objetivos de interés global, como por ejemplo el ahorro de energía producida por la congestión vehicular. Sugerimos como referencia el artículo de Gartner y Stamatidis [10] y [11] del año 2014.

Este trabajo muestra la aplicación del método propuesto por Morgan y Little [1], ya que lo consideramos fundamental y básico para empezar una investigación en el área de Sincronización de semáforos. Hemos aplicado el procedimiento completo a un caso real y aunque sincronizar toda una ciudad implica aplicación de metodologías que incluyen el uso de algoritmos de aproximación mucho más elaborados, queremos poner énfasis de que esta revisión tiene como objetivo motivar la aplicación de métodos sistemáticos para resolver problemas que ciertamente son muy difíciles de resolver.

Sobre el caso de estudio:

Guayaquil, cantón de la Provincia del Guayas, está ubicado en la parte noroeste de América del Sur, en la región costera de la República del Ecuador. Su ubicación geográfica, clima, entre otros factores, han contribuido para que en él se

concentren gran cantidad de fábricas, industrias y empresas. Es reconocida como un centro de negocios y es desde hace algún tiempo el cantón con mayor densidad poblacional, con un aproximado de 2'350.915 habitantes [9].

Podría deducirse del hecho de ser la ciudad con mayor número de habitantes, que la cantidad de personas que circulan por las vías de esta urbe porteña utilizando sistemas de transporte público o privado, podrían experimentar problemas de flujo de tránsito. De hecho, el Gobierno Municipal del cantón posee una dependencia encargada de establecer los sectores y horas sensibles al tráfico vehicular, rutas alternativas que coadyuven minimizar las consecuencias de las horas pico, cálculos aproximados de tiempos de viaje entre sectores, así como sincronización de los semáforos y demás señales de tránsito.

Las propuestas que son puestas en práctica para solucionar los problemas de tráfico deberían tener una base técnica y científica que las soporte. Esto no es algo nuevo o no aplicado, sin embargo, es posible siempre ajustar los modelos clásicos de transporte a situaciones particulares que respeten las características particulares de la zona en estudio como situación geográfica, horarios, tipo de vías, medios de transporte utilizados, etc.

Justamente, este trabajo busca una justificación en la aplicación de algoritmos basados en modelos matemáticos que permitan colaborar de alguna forma al ordenamiento del tráfico en Guayaquil y en cualquier ciudad.

1. EL PRIMER ALGORITMO SISTEMÁTICO DE SOLUCIÓN (1964).

Notación:

El trabajo original de Morgan y Little [1] tiene como base la notación que puede ser vista en la figura 1.

n : Número de semáforos sobre una arteria de dos vías.

S_i : Semáforo i con el subíndice incrementándose en la dirección de ida.

C : Largo del periodo, (segundos).

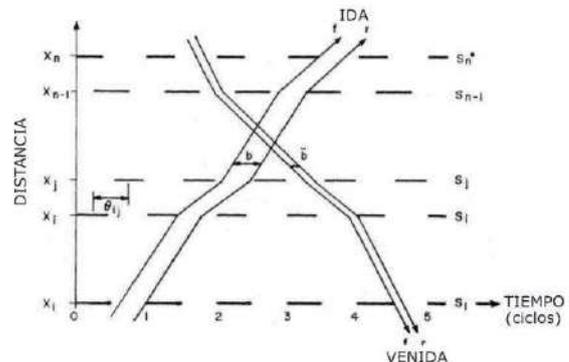
r_i : Tiempo de luz roja del semáforo S_i , (ciclos).

b (\bar{b}): Bandwidth en la dirección de ida (venida), (ciclos, largo del periodo C).

θ_{ij} : Tiempo desde el centro de una luz roja en S_i al próximo centro en S_j . Esto es llamado fase relativa (offset). Por convención deseamos que los valores de esta variable cumplan

Figura 1:

Diagrama Distancia-Tiempo. Las líneas negras representan los tiempos de luz roja y la sección vacía los tiempos de verde. (Gráfico original de Morgan y Little [1])



Con $0 \leq \theta_{ij} < 1$, (ciclos).

x_i : Posición de S_i sobre la calle (metros).

v_k (\bar{v}_k): Velocidad en la dirección de ida (venida) entre los semáforos S_k y S_{k+1} y es considerada constante y conocida para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$, (metros/segundos).

t_{ij} : Tiempo de viaje desde S_i a S_j en la dirección de venida (inbound). Esto ocasiona que los valores de t_{ij} sean negativos ya que se tendrían que calcular, para el caso donde $j = i + 1$ como:

$$t_{i,i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{v_i C} \text{ and } \bar{t}_{i,i+1} = \frac{x_i - x_{i+1}}{\bar{v}_i C}$$

Las letras f y r en la figura 1 representan el borde frontal (front) y posterior (rear) del bandwidth respectivamente.

Se definirá ahora el concepto de sincronización de semáforos:

Definición 2. (Sincronización [1]). Es el conjunto $\{ \theta_{ij} \mid j = 1, \dots, n \}$ para $i \in \{ 1, \dots, n \}$.

1.1. BASE MATEMÁTICA DEL ALGORITMO.

El método es basado sobre una consistente sucesión de lemas, teoremas y corolarios, que se detallan a continuación. Aquí cada semáforo S_i será llamado simplemente señal.

Definición 3 (Señal crítica [1]). Una señal S_i se dice crítica si un borde de las luces rojas S_j 's toca el bandwidth en una dirección y el otro lado lo toca en la otra.

Lema 1 ([1]). Si una sincronización maximiza $b + \bar{b}$ sujeto a $b > 0$ y $\bar{b} > 0$, entonces:

1. Existe al menos una señal crítica.
2. El tiempo de luz roja de cualquier señal crítica tocará el borde frontal de un bandwidth y el borde posterior del otro.

3. Todas las señales críticas pueden ser divididas en dos grupos:
- Grupo 1: Formado por las señales cuyas luces rojas tocan el borde frontal del bandwidth en la dirección de ida y el borde posterior del bandwidth en la dirección de venida (ver figura 2), y
 - Grupo 2: Formado por las señales cuyos tiempos de luces rojas tocan el borde frontal del bandwidth en la dirección de venida y el borde posterior del bandwidth en la dirección de ida (ver Figura 3).

En relación a la figura 1, las señales S_i y S_j pertenecen a los grupos 1 y 2 respectivamente.

Figura 2:

Geometría para dos señales en el grupo 1 (ver [1]).

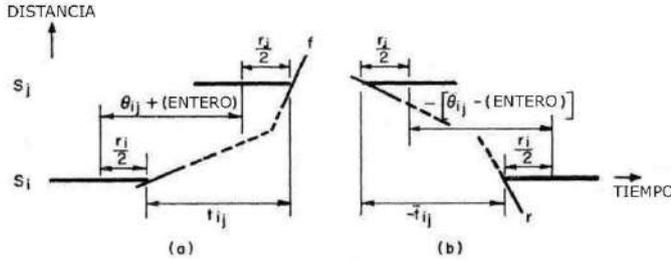
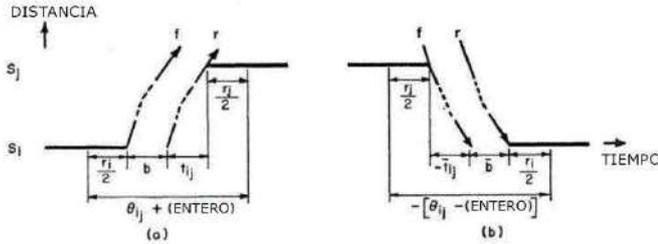


Figura 3:

Geometría para dos señales en diferentes grupos (ver [1]).



Respecto a la figura 2 se puede notar que $\frac{1}{2}r_i + t_{ij} = \frac{1}{2}r_j + \theta_{ij} + (int)$ y que $\frac{1}{2}r_i - \bar{t}_{ij} = \frac{1}{2}r_j - \theta_{ij} + (int)$ donde $int = integer$ representa un entero que es sumado para mantener θ dentro del rango $[0, 1)$. Hay que notar que dependiendo de la velocidad, int se incrementará tanto como ciclos hayan pasado. Ahora, al sumar ambas expresiones se obtiene:

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2}(int) \quad (1)$$

Si se considera la figura 3 se obtiene la misma expresión. Además, es claro que dependiendo de si int es par o impar θ_{ij} podrá tomar dos valores.

Una ecuación mucho más explícita puede ser deducida utilizando la función mantisa (man): $man(\#) = \# - floor(\#)$, donde $\# \in R$. Por lo tanto, desde la ecuación 1 se puede definir:

Definición 4 (Sincronizaciones de Medio Entero [1]). Una Sincronización de Medio Entero

$$\theta_{ij} = man\left[\frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \delta_{ij}\right] \quad (2)$$

Donde $\theta_{ij} \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \in \{0, 1\}$

El mismo resultado puede ser obtenido desde las señales críticas del grupo 2. Lo que se ha probado en estos últimos párrafos es lo siguiente:

Lema 2 ([1]). Bajo las condiciones del lema 1, cada grupo de señales tiene sincronización de medio entero.

También, una importante propiedad de θ es:

$$\begin{aligned} \theta_{ik} &= man[\theta_{ij} + \theta_{jk}] \\ &= man\left[man\left[\frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \delta_{ij}\right] + man\left[\frac{1}{2}(t_{jk} + \bar{t}_{jk}) + \delta_{jk}\right]\right] \\ &= man\left[\frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2}(int) + \frac{1}{2}(t_{jk} + \bar{t}_{jk}) + \frac{1}{2}(int)\right] \\ &= man\left[\frac{1}{2}(t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \frac{1}{2}(int)\right] \\ &= man\left[man\left[\frac{1}{2}(t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \delta_{ik}\right]\right] \\ &= man\left[\frac{1}{2}(t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \delta_{ik}\right] \end{aligned}$$

Teorema 1 ([1]). Existe una sincronización de medio entero que maximiza bandwidths de igual ancho.

El esquema de la prueba es más bien geométrico, constructivo y fácil de seguir, ya que trata de construir paso a paso una sincronización de medio entero a partir del supuesto que se tiene una que produce el máximo de la suma de los bandwidths en ambas direcciones $(b + \bar{b})$, ver [1].

También en la prueba se demuestran dos hechos importantes, el primero es:

Corolario 1.- ([1]). Si se tiene que el máximo de $b + \bar{b}$ es mayor que cero, $max(b + \bar{b})$ sujeto a $b > 0$ and $\bar{b} > 0$ es siempre igual a $max(b + \bar{b})$ subject to $b = \bar{b}$

Y el segundo hecho es que si se obtiene $b = \bar{b}$ en el proceso de $max(b + \bar{b})$ sujeto a $b > 0$ and $b > 0$ y S_i, S_j están en diferentes grupos, entonces S_i y S_j también tiene sincronización de medio entero. Esto es fácilmente verificable de la siguiente forma, en la figura 3 (a)

$\frac{1}{2} r_i + b + t_{ij} + \frac{1}{2} r_j = \theta_{ij} + (int)$ y desde la figura 3 (b) $\frac{1}{2} r_i + \bar{b} - \bar{t}_{ij} + \frac{1}{2} r_j = -\theta_{ij} + (int)$, y restando la segunda ecuación desde la primera se obtiene:

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} (t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2} (int)$$

Teorema 2 ([1]). Bajo cualquier sincronización de medio entero, $b = \bar{b}$.

Demostración. Debido a que las señales críticas definen cotas para los bandwidths, Es suficiente considerar señales críticas para el análisis. Nuevamente en relación a las figuras 3(a) y (b),

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} r_i + b + t_{ij} + \frac{1}{2} r_j = \theta_{ij} + (int) \right] \\ & - \left[\frac{1}{2} r_i + \bar{b} - \bar{t}_{ij} + \frac{1}{2} r_j \right. \\ & \quad \left. = -\theta_{ij} + (int) \right] \\ \Rightarrow & b - \bar{b} + t_{ij} + \bar{t}_{ij} = 2\theta_{ij} + (int) \\ \Rightarrow & \frac{b - \bar{b}}{2} + \frac{t_{ij} + \bar{t}_{ij}}{2} + \frac{1}{2} (int) = \theta_{ij} \end{aligned}$$

y porque $\theta_{ij} = \frac{1}{2} (t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \frac{1}{2} (int) \Rightarrow b = \bar{b}$

2. SINCRONIZACIÓN PARA BANDWIDTHS DE IGUAL TAMAÑO.

2.1. PROCEDIMIENTO SEB.

Para construir el método SEB (por sus siglas en inglés: Synchronization for Equal Band-width) para el problema 1, Morgan y Little solo enfocaron su búsqueda en sincronizaciones de medio entero y analizaron el bandwidth en una sola dirección (ida), esto gracias a los teoremas 1 2 respectivamente.

Teorema 3 ([1]). La máxima suma de bandwidths iguales es alcanzada con $\max \{0, B\}$ donde,

$$B = \max_i \min_j m_\delta$$

Sea $i = c$ un maximizador i y $\delta_{c1}, \dots, \delta_{cn}$ los correspondientes maximizadores δ 's. Entonces, una sincronización para la máxima suma de bandwidths iguales $\theta_{c1}, \dots, \theta_{cn}$ se logra substituyendo el δ_{cj} en $\theta_{ij} = \max \left[\frac{1}{2} (t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \delta_{ij} \right]$

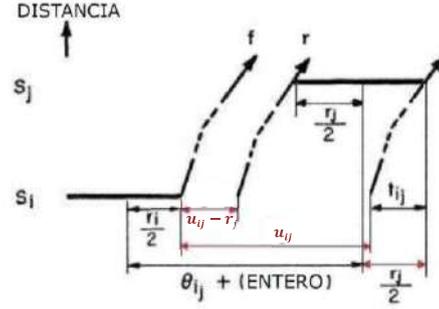
Demostración. En relación a la figura 4, se tiene $u_{ij} = \max \left[\theta_{ij} + \frac{r_j}{2} - \frac{r_i}{2} - t_{ij} \right]$, pero para hacer u_{ij} justo cuando esta expresión es cero, puede ser escrita como $u_{ij} = 1 -$

$\max \left[-\theta_{ij} - \frac{r_j}{2} + \frac{r_i}{2} + t_{ij} \right]$ y reemplazando θ desde la ecuación 2, se tiene,

$$u_{ij}(\delta_{ij}) = 1 - \max \left[\frac{1}{2} (r_i - r_j) + \frac{1}{2} (t_i - \bar{t}_{ij}) - \delta_{ij} \right]$$

Figura 4:

Geometría para el procedimiento SEB (ver [1]).



Ya que $\delta_{ij} \in \{0, \frac{1}{2}\}$ y de acuerdo a la figura 4, el mejor valor para δ_{ij} puede ser obtenido por,

$$\max_{\delta \in \{0,1\}} [u_{ij}(\delta) - r_j]$$

Sea,

b_i : El más grande bandwidth en la dirección de ida bajo la sincronización de medio entero si el tiempo de luz roja S_i toca el borde frontal de la misma.

B : El valor de una de las máximas sumas de bandwidths iguales en ambas direcciones. Entonces:

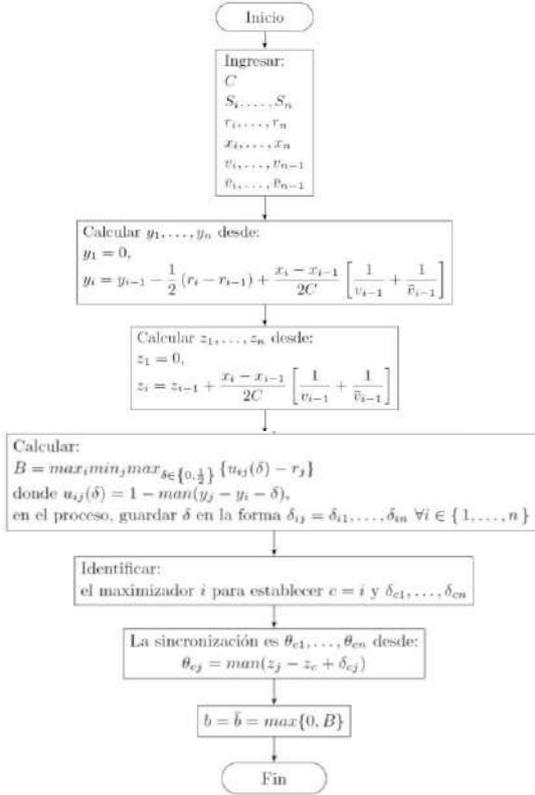
$b_i = \min_j \max_{\delta \in \{0,1\}} [u_{ij}(\delta) - r_j]$ ya que las trayectorias no deberían cruzar las líneas rojas. Por lo tanto el mejor i es Tal que,

$$B = \max_i \min_j \max_{\delta \in \{0,1\}} \{u_{ij}(\delta) - r_j\}$$

Si el mejor i es igual a c , y $\delta_{c1}, \dots, \delta_{cn}$ los maximizadores δ 's, la sincronización logrará substituyendo los δ_{cj} 's en la ecuación 3 para obtener el conjunto $\{\theta_{c1}, \dots, \theta_{cn}\}$ \square

El procedimiento SEB se resume en la figura 5.

Figura 5:
Procedimiento SEB.



3.2. PROCEDIMIENTO SUB.

Luego de resolver la maximización para la suma de bandwidths iguales en ambas direcciones, los esfuerzos se centraron en el problema 2, al desarrollar el procedimiento SUB (por sus siglas en inglés: Synchronization for Unequal Bandwidth). Claramente un pelotón (grupo de vehículos) necesita algún tiempo para cruzar un semáforo, y el largo del pelotón (que es medido en segundos) podría llegar a ser diferente en ambas direcciones.

El tiempo que a un pelotón le toma pasar de una señal a otra consecutiva sobre una arteria claramente afecta la sincronización, por lo tanto el primer paso es evaluar que tanto una luz roja puede ser movida (procedimiento de movimiento) con el fin de evitar que los vehículos se detengan en cada señal. Es claro también que debe existir un límite para este movimiento.

Teorema 4 (El Procedimiento Movimiento [1]). El bandwidth en la dirección de ida b , se le puede asignar cualquier valor en $\max\{0, B\} \leq$

$b \leq g$, haciendo el siguiente movimiento de la fase relativa:

$$\alpha_j = \max\{u_{cj} - 1 + b - B, 0\}$$

Entonces $\bar{b} = \max\{2B - b, 0\}$ y \bar{b} es tan grande como pueda sea posible para un b dado.

De la misma forma, el bandwidth en la dirección de venida \bar{b} , se le puede asignar un valor en $\max\{0, B\} \leq \bar{b} \leq g$, haciendo el siguiente movimiento de la fase relativa:

$$\alpha_j = \max\{\bar{b} + r_j - u_{cj}, 0\}$$

Entonces $b = \max\{2B - \bar{b}, 0\}$ y b es tan grande como pueda sea posible para un \bar{b} dado.

Demostración. Sea,

$\theta_{c1}, \dots, \theta_{cn}$: La sincronización que produce el máximo valor de la suma de los bandwidths iguales obtenida con el procedimiento SEB y con S_c la señal crítica cuya luz roja toca el borde frontal del bandwidth en la dirección de ida (ver figura 6). Los correspondientes u_{c1}, \dots, u_{cn} y B también se suponen conocidos.

α_j : Un movimiento de la fase relativa para S_j , (ciclos).

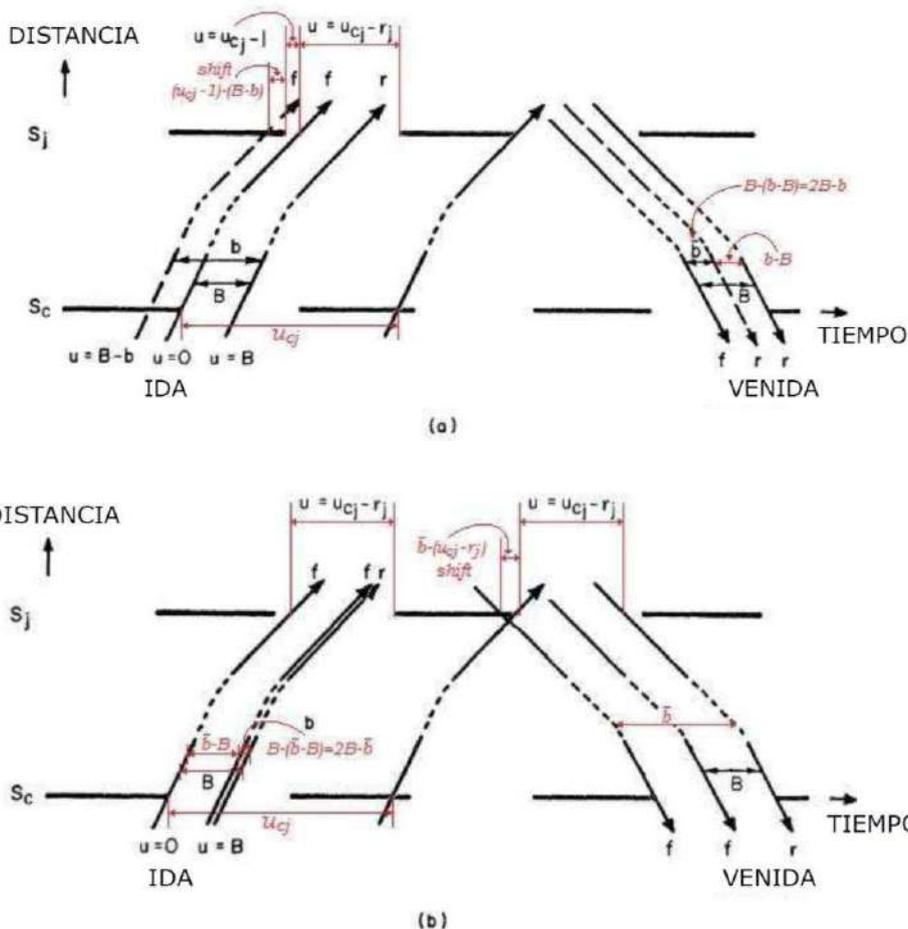
$\theta'_{cj} = \min[\theta_{cj} - \alpha_j]$: Fase relativa ajustada para S_j , (ciclos).

$g = \min_i\{1 - r_i\}$: El más pequeño tiempo de luz verde entre las señales, (ciclos).

Respecto a la figura 6 (a), suponga que se desea mover S_j a la izquierda porque se quiere incrementar el bandwidth en la dirección de ida desde B a b . \bar{b} se reducirá tanto como b es incrementado. Esto es gracias al corolario 1. Además, debido a que las señales limitan el movimiento, éste puede ser a lo mucho g . Por lo tanto, $\max\{0, B\} \leq b \leq g$ y $\bar{b} = \max\{2B - b, 0\}$

Un argumento similar se puede utilizar para incrementar b , entonces $\max\{2B - \bar{b}, 0\}$ y $b = \max\{2B - \bar{b}, 0\}$, ver figura 6(b).

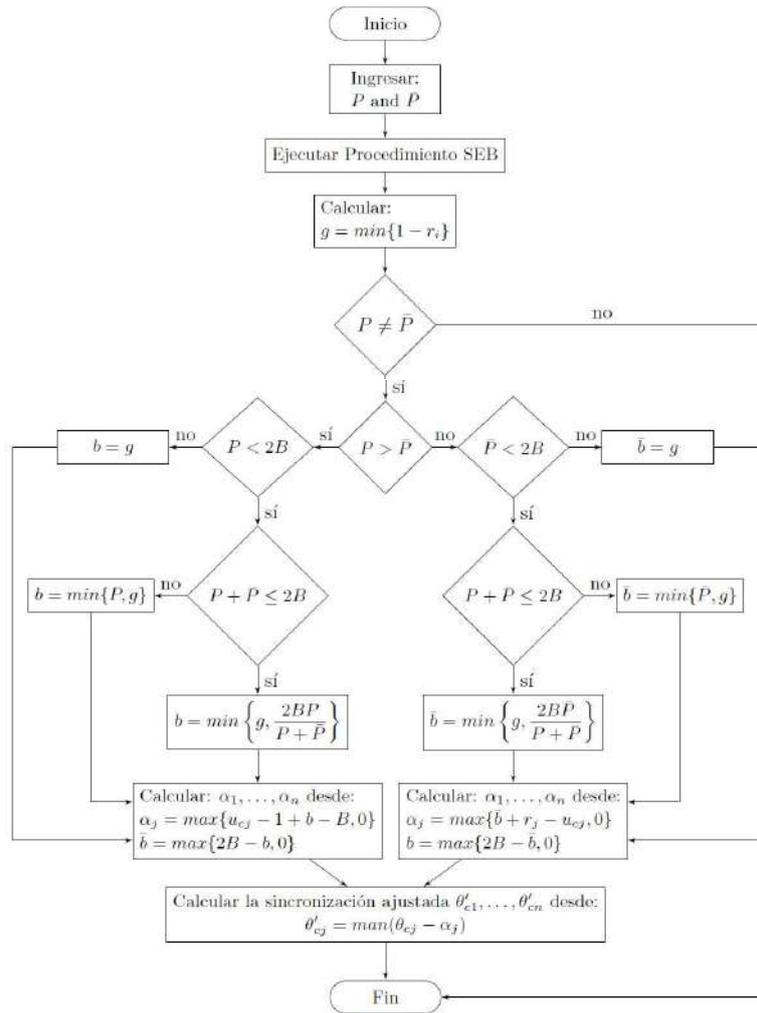
Figura 6:
Geometría para el Procedimiento de Movimiento (ver [1]).



Al ubicarse sobre el lado derecho del tiempo de luz roja S_j en la figura 6 (a), Se puede notar que el movimiento para S_j es a la izquierda dado por $\alpha_j = \max\{u_{c_j} - 1 + b - B, 0\}$. Además, es cierto gracias a la figura 6 (b), que la distancia desde el borde frontal del bandwidth en la dirección de venida al siguiente tiempo de luz roja S_j sobre la izquierda es la misma que la distancia desde la parte posterior del bandwidth en la dirección de venida al siguiente tiempo de luz roja S_j sobre la

derecha, Esto es debido al teorema 2 para mantener constante $b + \bar{b}$. También se puede observar en la figura 6 (b) que para incrementar \bar{b} es necesario mover $\alpha_j = \max\{b + r_j - u_{c_j}, 0\}$ a S_j . Luego de revisar las reglas para el movimiento de señales se define el Procedimiento SUB como sigue:
Sea,
 $P(\bar{P})$: Largo del pelotón en la dirección de ida (venida), (cycles).

Figura 7:
Procedimiento SUB



Si $P = \bar{P}$, la sincronización dada por el procedimiento SEB es aceptada. Caso contrario, si $P + \bar{P} \leq 2B$ entonces es posible hacer un movimiento para que ambos pelotones puedan cruzar de una señal a otra consecutiva sin parar y los bandwidths son divididos proporcionalmente al largo de los pelotones si es posible. Por lo tanto si $P > \bar{P}$

$$b = \min\left\{\frac{2BP}{P+\bar{P}}, g\right\} \text{ and } \bar{b} = [2B - b, 0]$$

Por otro lado si $P + \bar{P} > 2B$ y si es posible, el pelotón cuyo tiempo es el más largo es acomodado para cruzar sin parar, y el tiempo que sobre se lo asigna al más pequeño, por su puesto si existe este sobrante, es decir si $P > \bar{P}$,

$$b = \min\{P, g\} \text{ and } \bar{b} = \max\{2B - b, 0\}$$

Además, si $P > 2B$ entonces b será cero y \bar{b} será g . Argumento similares se aplican si $P > \bar{P}$.

El procedimiento SUB se resume en la figura 7.

Los procedimientos SEB y SUB se han programado en el lenguaje *Matlab*® R2013a y el ejemplo presentado en [1] (synchronization of the signals on a stretch of Euclid Avenue in Cleveland under off-rush hour conditions) se ha reproducido, ver apéndice 5. Además es este algoritmo completo el que se ha utilizado para ejemplos simulados sobre una arteria particular de la ciudad de Guayaquil.

Para concluir se responde a la siguiente pregunta, ¿Qué sucede con el caso unidireccional? Gracias a los resultados mostrados hasta ahora esta pregunta se resuelve con facilidad asignando al pelotón en la dirección de ida el largo $2B$ y en ese caso el bandwidth tomará el valor del mínimo verde g en esa dirección, como debe esperarse ya que no se necesitaba del algoritmo para saberlo.

4. UNA APLICACIÓN SOBRE UNA ARTERIA DE GUAYAQUIL.

Figura 8:

Un Sector de la Avenida Juan Tanca Marengo. Guayaquil-Ecuador.

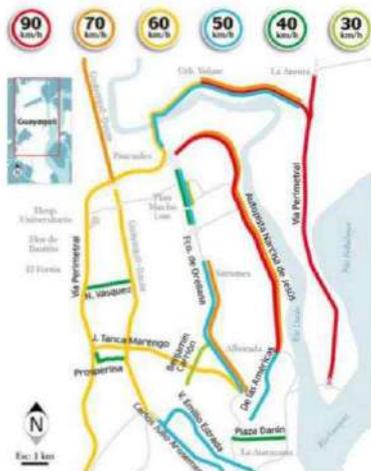


Se ha utilizado un tramo de la AV. Juan Tanca Marengo de Guayaquil, ver figura 8. Esta elección se ha hecho debido a que esta es una arteria de dos vías muy importante, ya que une el sector norte con el sector noroeste, pasando por la ciudadela Marta de Roldos, El Colegio Americano de Guayaquil y por otros puntos importantes de la zona. La avenida llega hasta la intersección de la Vía a Daule, lo que implica un fuerte ingreso vehicular hacia la arteria.

Se han ubicado 6 semáforos dispuestos a una distancia que se encuentra en azul en la figura 8 y en la tabla 1. El resto de datos de entrada han sido establecidos en base a datos tanto reales como simulados, como se verá en lo que sigue de esta sección.

Figura 9:

Límites de Velocidad en Guayaquil. Tomado de [12].



Los ejemplos a continuación han sido resueltos utilizando los procedimientos SEB y SUB, los cuales han sido programados utilizando MATLAB® R2013a.

Tabla 1:

Datos de entrada. Av. Juan Tanca Marengo.

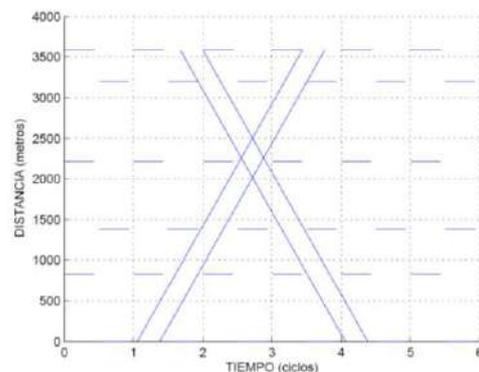
Semáforo (i)-Semáforo (j)	Distancia (metros)	velocidad (ida y regreso) (m/seg)
1-2	825	16,7
2-3	556	16,7
3-4	836	16,7
4-5	985	16,7
5-6	336	16,7
Total	3538	16,7

En un primer ejemplo, las velocidades tanto en la dirección de ida como en la de venida, han sido fijadas en 60 km/hora lo que equivale a 16,7 metros/segundos aproximadamente, esto en base a los límites de velocidad que regulan el tránsito en la Av. Juan Tanca Marengo, ver figura 9. El largo de periodo es 90 segundos y los tiempos de luces rojas para cada señal, en unidades de ciclo, están dadas por el vector [0, 40, 0,42, 0,43, 0,42, 0,42, 0,44].

Los valores de los θ 's obtenidos, luego de aplicar el procedimiento SEB son θ 's = [0,5, 0, 0,5,0, 0,5, 0], siendo la señal crítica de base la número 6(maximizador del bandwidth), es decir que esta señal se considera el origen para ubicar el resto de señales a las distancias θ 's. Estos valores se utilizan para graficar el diagrama espacio-tiempo de la figura 10. El valor de bandwidth, que es el mismo en este caso para ambas direcciones es $b = 0,32345$ ciclos ó 29,1150 segundos.

Figura 10:

Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 1. $P = \bar{P}$.

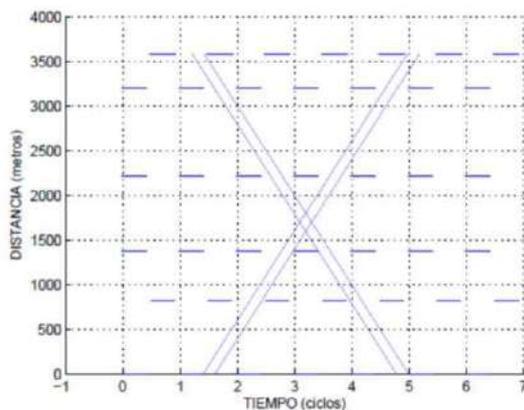


Las líneas horizontales en el diagrama espacio tiempo de la figura 10, representan los tiempos de luces rojas que no se deberían cruzar con el intervalo de tiempo del bandwidth, que se aprecia con líneas paralelas. Aquellas con pendiente positiva son en dirección de ida, y con pendiente negativa de venida. Por simplicidad se han graficado solo un bandwidth

de cada tipo, pero la sincronización hace que después de cada tiempo rojo una banda verde puede ser ubicada en ambas direcciones.

Con un pequeño cambio en el tamaño del periodo de $T = 90$ segundos a $T = 60$ segundos la sincronización cambia como se nota en la figura 11. El bandwidth total en este caso disminuyó a $b = 0,2068$ y los valores de θ , cambiaron a $\theta's = [0, 0,5, 0, 0, 0, 0,5]$, aunque esta vez la señal de base es la número 1. Esto implica que una reducción del tiempo en el periodo T , lo que equivale a disminuir el tiempo de luces rojas, produce un ancho de banda verde menor.

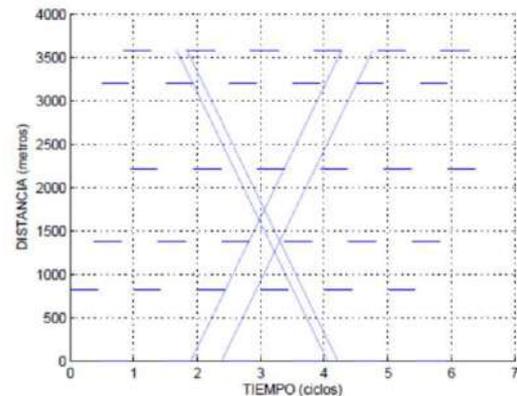
Figura 11:
Sincronización. Caso Arterial.
Ejemplo 2. $P = \bar{P}$.



Si se establece que la dirección de ida es la que va desde la señal 1 a la 6 y cambiando las reglas del juego al considerar que los pelotones en ambas direcciones no son iguales, por ejemplo $P = 0,3$ ciclos y $\bar{P} = 0,1$ ciclos, y manteniendo el largo del periodo en 90 segundos, se obtiene diferentes valores del bandwidth en las direcciones contrarias. En este ejemplo se logra $b = 0,4852$ y $\bar{b} = 0,1617$, es decir $b + \bar{b} = 0,6469$, que como se esperaba, es igual a $2b = 2(0,32345)$ del primer caso presentado. Aquí además se tiene $\theta's = [0, 4744, 0, 0,3782, 0,9394, 0,5, 0,8383]$, ver figura 12.

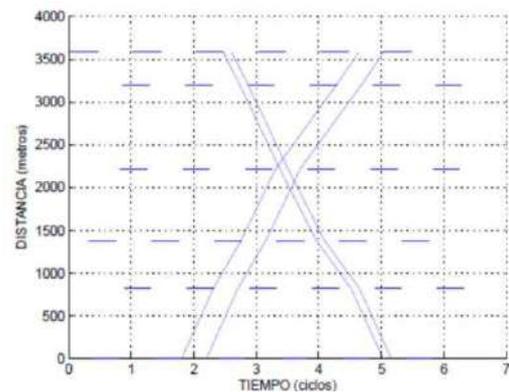
Aunque el ancho de las líneas paralelas en la dirección de ida es más amplio que en las de venida, en ambos casos los pelotones han sido acomodados para que crucen la avenida sin detenerse, favoreciendo a aquel grupo de vehículos con un largo mayor.

Figura 12:
Sincronización. Caso Arterial.
Ejemplo 3. $P \neq \bar{P}$.



El cambiar las velocidades sobre la arteria, lo cual tiene sentido en diferentes sectores del tramo, a diferentes horas del día, el resultado, con los mismos datos anteriores puede ser visto en la figura 13. Aquí las velocidades fueron establecidas como $[18,0, 14,0, 16,8, 11,3, 12,1]$ y $[17,8, 0,8968, 0,3331, 0,8314, 0,8682, 0,0435]$ entre las señales en la dirección de ida y venida respectivamente. Los bandwidths encontrados fueron $b = 0,3954$ y $\bar{b} = 0,1318$, por lo tanto $b + \bar{b} = 0,5272$. Además $\theta's = [0,3976, 0,8968, 0,3331, 0,8314, 0,8682, 0,0435]$ en referencia a la señal 5.

Figura 13:
Sincronización. Caso Arterial.
Ejemplo 4. $P \neq \bar{P}$.



5. CONCLUSIONES.

El procedimiento de Morgan y Little es computacionalmente rápido, pero sus limitaciones en restricciones lo podrían hacer ver como un método poco aplicable a casos de la vida real, pero esto no es del todo cierto. La mayoría de las ciudades tienen una programación de semáforos y velocidades de vehículos ya establecidas, y el problema sigue

siendo como mover los tiempos de las señales para mejorar el flujo vehicular. Por lo tanto, concluimos que el caso arterial aún sigue siendo importante, sin embargo hay que recalcar que un modelo lineal para este problema, es en la actualidad, mucho más práctico gracias en parte al gran avance de motores de optimización que se tienen en la actualidad, incluso aquellos que vienen incluidos en programas que manejan lenguajes de programación de alto nivel.

Esto último es la principal justificación de estudiar este primer método sistemático, ya que el modelo lineal para este caso es en casi su totalidad basado en este inicial enfoque, de hecho, fue propuesto por el mismo autor, ver Little [2]

Ciertamente el problema global debe implicar una red completa y los movimientos que los vehículos deben hacer sobre esta. Wunsch [5] demostró que este problema es NP-hard. Pero como se ha mencionado antes, el propósito que busca este estudio es el de socializar este primer procedimiento sistemático, y como se puede leer en la introducción, este es solo el

comienzo de una larga trayectoria de modelos, en particular de programación matemática que han sido bastante utilizados en la academia y en la práctica. Sin embargo casos de estudios reales son mayormente abordados utilizando software comercial, y el que probablemente sea el de mayor éxito es TRANSYT [8] que, de hecho, utiliza algunos procedimientos heurísticos y de simulación para alcanzar una solución aproximada. Transyt, no trata de maximizar el bandwidth, sino más bien busca minimizar una muy completa función objetivo que considera entre otras cosas el tráfico y una medida del atraso que sufren los vehículos cuando circulan sobre una red de transporte. Este claro es otro enfoque.

Finalmente, la experiencia en programación de este procedimiento nos llevó a la conclusión que su implementación no es muy compleja, pero entender cada uno de sus pasos, incluidos sus fundamentos matemáticos, es de vital importancia para una correcta interpretación de los resultados.

REFERENCIAS

- [1]. John T. Morgan and John D. C. Little. Synchronizing traffic signals for maximal bandwidth. *Operations Research*, Vol. 12, No. 6, Special Transportation Science Issue (1964), pp. 896-912.
- [2]. John D. C. Little. The synchronization of traffic signals by mixed-integer linear programming. *Operations Research*, Vol. 14, No. 4 (1966), pp. 568-594.
- [3]. N. H. Gartner, D. C. Little, H. Gabbay. Optimization of traffic signal settings by mixed-integer linear Programming; part I: The network coordination problem; part II: The network synchronization problem. *Transportation Science* 9, (1975), pp. 321-363.
- [4]. D. C. Little, M. D. Kelson, N.H. Gartner, MaxBand: A versatile program for setting signal on arteries and triangular networks. *Transportation Research Record* (1980), 795, 40.
- [5]. G. Wuñsch. Coordination of traffic signals in networks. Technische Universität Berlin. PhD thesis (2008).
- [6]. T. Kavitha, C. Liebchen, K. Mehlhorn, D. Michail, R. Rizzi, T. Ueckerdt, K. Zweig. Cycle bases in graphs: Characterization, algorithms, complexity and applications. *Computer Science Review*, Vol. 3, Issue 4 (2009), pp. 199-243.
- [7]. Christian Liebchen and Romeo Rizzi. *Classes of cycle bases*. Discrete Applied Mathematics. Elsevier. (2006).
- [8]. Cohen S.L. Concurrent use of MAXBAND and TRANSYT signal timing programs for Arterial Signal Optimization. *Transportation Research Record*, Vol. 906, pp. 81-84, (1983).
- [9]. INEC. Instituto Nacional de Estadísticas y Censos. <http://www.ecuadorencifras.gob.ec/censo-de-poblacion-y-vivienda/>. Censo de Población 2010. Último acceso: Abril 2015.
- [10]. Gartner, N. H. and Stamatiadis, C. *Progression optimización featuring arterial and route-based priority signal networks Intelligent Transportation System*, Copy-right Taylor and Francis Inc. (2004).
- [11]. Essam H. Almasri. Signal coordination for saving energy and reducing congestion using TRANSYT-7F Model and Its Application in Gaza City Natural Resources, (2014).
- [12]. Noticias de Ecuador. Límites de velocidad en Guayaquil. <http://ecuadorecuatoriano.blogspot.co.uk/2012/08/limites-de-velocidad-en-guayaquil.html>. Último acceso: Abril 2015.

7. APENDICE.

Ejemplos el caso arterial

```
>> C=65;
xp=[0,550,1250,2350,3050,3850,4500,4900,5600,6050];
r=[0.47,0.40,0.40,0.47,0.48,0.42,0.40,0.40,0.40,0.42];
ov=[50,50,50,50,50,50,50,50,50]; iv=[50,50,50,50,50,50,50,50,50];

>> [SthetaP,OB,IB,c,alpha] = STLEBP(C,r,xp,ov,iv,OP,OP)
SthetaP = [0.5,0,0,0.5,0.5,0,0,0,0.5,0.5]

OB = 0.2342  IB = 0.2342
```

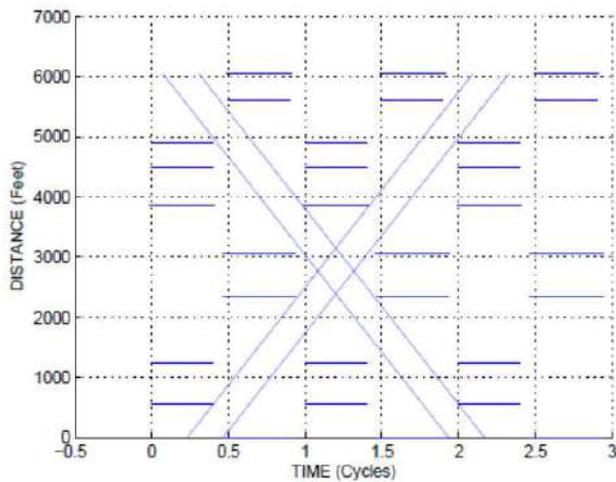


Figura 14: Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland. $P = \bar{P}$

```
>> C=65;
xp=[0,550,1250,2350,3050,3850,4500,4900,5600,6050];
r=[0.47,0.40,0.40,0.47,0.48,0.42,0.40,0.40,0.40,0.42];
ov=[50,50,50,50,50,50,50,50,50];
iv=[50,50,50,50,50,50,50,50,50];
OP=0.30;
IP=0.10;

>> [SthetaP,OB,IB,c,alpha] = STLEBP(C,r,xp,ov,iv,OP,IP)
SthetaP = [0.5,0.8829,0,0.4017,0.5,0.8883,0,0,0.4367,0.5]

OB = 0.3513  IB = 0.1171

alpha = [0,0.1171,0,0.0983,0,0.1117,0,0,0.06333,0]
```

REVISIÓN Y APLICACIÓN DEL PRIMER MÉTODO PARA MAXIMIZACIÓN DEL BANDWIDTH EN EL PROBLEMA DE SINCRONIZACIÓN DE SEMÁFOROS

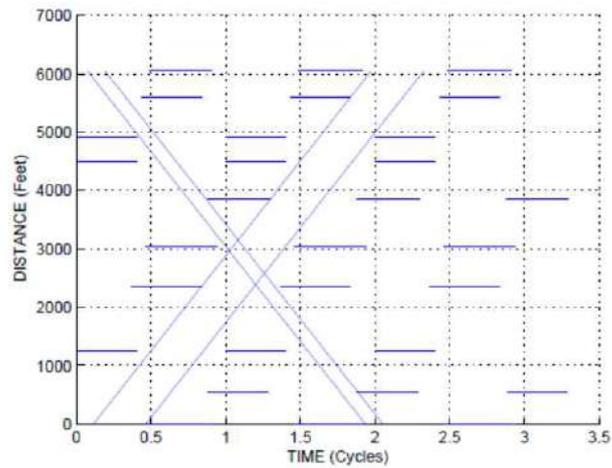


Figura 15: Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland. $P \neq \bar{P}$

```
>> C=65;
xp=[0,550,1250,2350,3050,3850,4500,4900,5600,6050];
r=[0.47,0.40,0.40,0.47,0.48,0.42,0.40,0.40,0.40,0.42];
ov=[50,20,50,50,100,50,10,50,30];
iv=[50,20,5,50,28,50,120,50,20];
OP=0.30;
IP=0.10;

>> [SthetaP,OB,IB,c,alpha] = STLEBP(C,r,xp,ov,iv,OP,IP)
SthetaP = [0.879,0,0.5,0.926,0.976,0.289,0.318,0.101,0.101,0.543]

OB = 0.3606    IB = 0.1202

alpha = [0.1202,0,0,0.0510,0,0.0293,0,0,0,0]
```

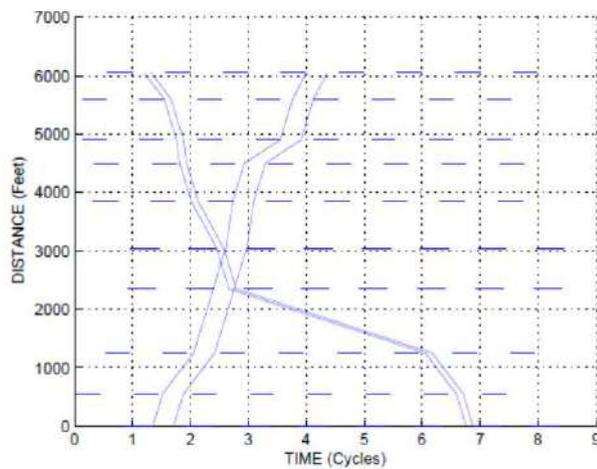


Figura 16: Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland. $P \neq \bar{P}$ y diferentes velocidades.